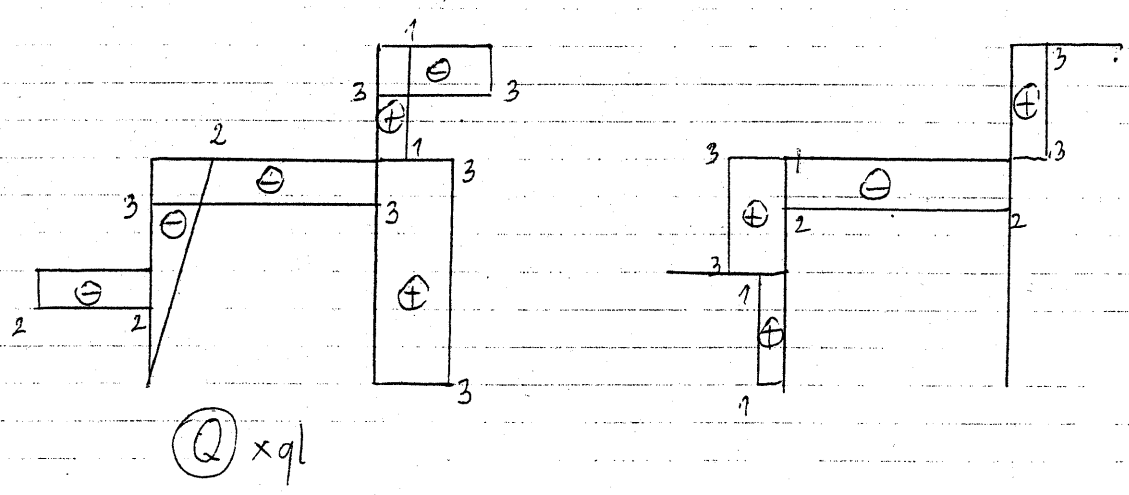
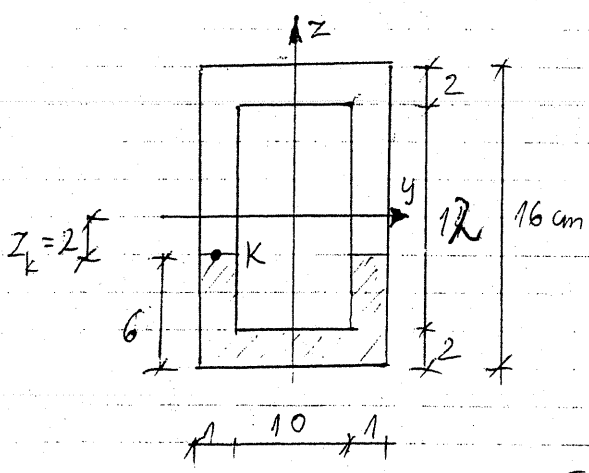


$q = 5 \text{ kN/m} \quad l = 1 \text{ m}$

(M)  $\times ql^2$



(N)  $\times ql$



$A = 12 \cdot 16 - 10 \cdot 12 = 72 \text{ cm}^2$

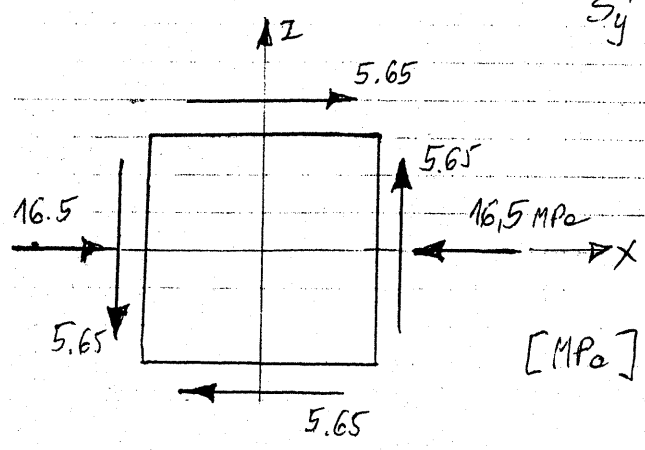
$I_y = \frac{12 \cdot 16^3}{12} - \frac{10 \cdot 12^3}{12} = 2656 \text{ cm}^4$

$M_L = 4ql^2 = 20 \text{ kNm} \quad Q_L = 15 \text{ kN} \quad N_L = 10 \text{ kN}$

$\sigma_x^K = -\frac{M_y}{I_y} z_k - \frac{N}{A} = -\frac{2000}{2656} \cdot 2 - \frac{10}{72} = -1.65 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}$

$\tau_{xz}^K = \frac{15 \cdot 200}{2656 \cdot 2} = 0.565 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} = 5.65 \text{ MPa}$

$\bar{S}_y^K = 12 \cdot 2 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 4 = 200 \text{ cm}^3$

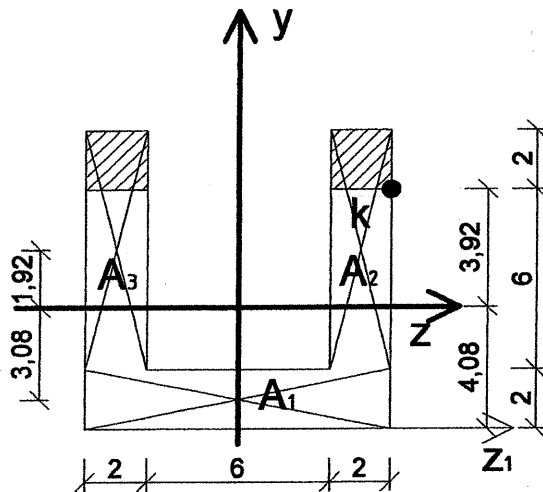


$T_\sigma = \begin{bmatrix} -16.5 & 0 & 5.65 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5.65 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_\sigma = \begin{bmatrix} -0.55 & 0 & 0 \\ 0 & -0.55 & 0 \\ 0 & 0 & -0.55 \end{bmatrix}$

$D_\sigma = \begin{bmatrix} -1.1 & 0 & 5.65 \\ 0 & 0.55 & 0 \\ 5.65 & 0 & 0.55 \end{bmatrix}$

[MPa]

2. W przekroju  $\alpha$ - $\alpha$ , w punkcie „k” oblicz naprężenie zastępcze wg. hipotezy Hubera, oraz wg. hipotezy największych naprężeń stycznych.



Wyznaczenie środka ciężkości:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 10 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 = 20 + 16 + 16 = 52 [\text{cm}^2]$$

$$S_z = A_1 \cdot h_{z1.1} + A_2 \cdot h_{z1.2} + A_3 \cdot h_{z1.3} = 20 \cdot 1 + 16 \cdot 6 + 16 \cdot 6 = 20 + 96 + 96 = 212 [\text{cm}^2]$$

$$z_e = \frac{S_z}{A} = \frac{212}{52} = 4,08 [\text{cm}]$$

Odległość punktu K od osi obojętnej:

$$z_k = h_k - z_e = 8 - 4,08 = 3,92 [\text{cm}]$$

Wyznaczenie momentu bezwładności figury płaskiej:

$$I_z = I_{z1} + I_{z2} + I_{z3} = \frac{b_1 \cdot h_1^3}{12} + A_1 \cdot (-h_{z1})^2 + \frac{b_2 \cdot h_2^3}{12} + A_2 \cdot (h_{z2})^2 + \frac{b_3 \cdot h_3^3}{12} + A_3 \cdot (h_{z3})^2$$

$$I_z = \frac{10 \cdot 2^3}{12} + 20 \cdot (-3,08)^2 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + 16 \cdot (1,92)^2 + \frac{2 \cdot 8^3}{12} + 16 \cdot (1,92)^2 = 485,02 [\text{cm}^4]$$

Wyznaczenie naprężeń w punkcie K.

$$M_\alpha = -90 \text{ kNm}$$

$$Q_\alpha = 30 \text{ kN}$$

$$N_\alpha = -20 \text{ kN}$$

$$\sigma_x^k = \frac{M_\alpha}{I_z} \cdot z_k + \frac{N_\alpha}{A} = \frac{90 \cdot 10^3}{485,02} \cdot 3,92 + \frac{20 \cdot 10^3}{52} = 11119,5 [\text{MPa}]$$

$$S_{z1} = 4 \cdot 2 \cdot (3,92 + 1) = 39,36 \text{ cm}^3$$

$$\tau_{xz} = \frac{Q_\alpha \cdot S_{z1}}{I_z \cdot b_1} = \frac{30 \cdot 39,36}{485,02 \cdot 4} = 6,09 [\text{MPa}]$$

Naprężenie zastępcze wg hipotezy największych naprężeń stycznych

$$\sigma_o^K = \sqrt{(\sigma_x^K)^2 + 4 \cdot (\tau_{xz})^2} = \sqrt{11119,5^2 + 4 \cdot (6,09)^2} = 11119,5 [\text{MPa}]$$

Naprężenie zastępcze wg hipotezy Hubera

$$\sigma_o^K = \sqrt{(\sigma_x^K)^2 + 3 \cdot (\tau_{xz})^2} = \sqrt{11119,5^2 + 3 \cdot (6,09)^2} = 11119,5 [\text{MPa}]$$

### 3. Wyznaczenie naprężeń w przekroju $\alpha-\alpha$ .

#### 3.1. Siły wewnętrzne w przekroju $\alpha-\alpha$ .

$$N_{\alpha-\alpha} = 12,5kN$$

$$Q_{\alpha-\alpha} = 2,5kN$$

$$M_{\alpha-\alpha} = 15kNm$$

Tensor naprężenia:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [MPa]$$

Naprężenia normalne:

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \pm \frac{N}{A}$$

gdzie:

$M_z$  – moment zginający względem osi z;

$I_z$  – moment bezwładności przekroju względem osi z;

$N$  – siła podłużna;

$A$  – pole przekroju;

Naprężenia styczne:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_z \cdot b}$$

gdzie:

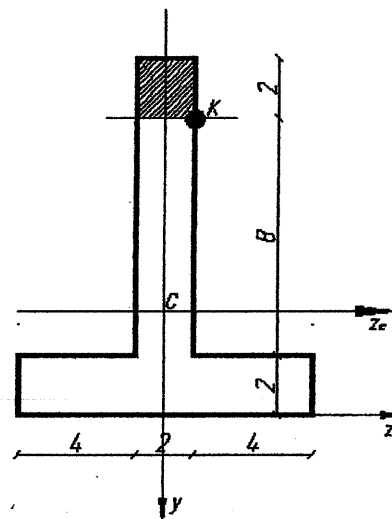
$Q_z$  – siła poprzeczna;

$I_z$  – moment bezwładności przekroju względem osi z;

$S_y$  – moment statyczny;

$b$  – szerokość przekroju;

#### 3.2. Wyznaczenie charakterystyk geometrycznych przekroju.



Pole przekroju:

$$A = 2cm \cdot 10cm + 10cm \cdot 2cm = 40cm^2$$

Moment statyczny względem osi z:

$$S_z = 2cm \cdot 10cm \cdot 1cm + 2cm \cdot 10cm \cdot 6cm = 140cm^3$$

Wyznaczenie środka ciężkości przekroju (położenie osi  $z_c$ ) "C":

$$y_c = \frac{S_z}{A} = \frac{140\text{cm}^3}{40\text{cm}^2} = 3,5\text{cm}$$

Moment bezwładności przekroju względem osi z:

$$I_z = \frac{10\text{cm} \cdot (2\text{cm})^3}{12} + 10\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot (-2,5\text{cm})^2 + \frac{2\text{cm} \cdot (10\text{cm})^3}{12} + 2\text{cm} \cdot 10\text{cm} \cdot (8,5\text{cm})^2 = 1743,33\text{cm}^4$$

### 3.3. Naprężenia normalne w punkcie K.

Wartość momentu zginającego:

$$M_z = M_{\alpha-\alpha} = 15\text{kNm}$$

Moment bezwładności względem osi z:

$$I_z = 1743,33\text{cm}^4$$

Pole przekroju:

$$A = 40\text{cm}^2$$

Wartość siły podłużnej:

$$N_{\alpha-\alpha} = 12,5\text{kN}$$

Wyznaczenie naprężeń normalnych w punkcie K:

$$\sigma_x^K = \frac{M_z}{I_z} \cdot y \pm \frac{N}{A} = -\frac{1500}{1743,33} \cdot 6,5 + \frac{12,5}{40} = -52,80\text{MPa}$$

### 3.4. Naprężenia styczne w punkcie K.

Wartość siły poprzecznej:

$$Q_z = Q_{\alpha-\alpha} = 2,5\text{kN}$$

Moment bezwładności względem osi z:

$$I_z = 1743,33\text{cm}^4$$

Szerokość przekroju:

$$b = 2\text{cm}$$

Moment statyczny części odciętej:

$$S_y = 2\text{cm} \cdot 2\text{cm} \cdot 7,5\text{cm} = 30\text{cm}^3$$

Wyznaczenie naprężeń stycznych w punkcie K:

$$\tau_{xy}^K = \frac{Q_z \cdot S_y}{I_z \cdot b} = \frac{2,5 \cdot 30}{1743,33 \cdot 2} = 0,22\text{MPa}$$

### 3.5. Tensor naprężenia.

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} [\text{MPa}] = \begin{pmatrix} -52,80 & 0,22 & 0 \\ 0,22 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{MPa}$$

### 3.6. Naprężenia zastępcze wg. Hipotezy Hubera.

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2} = \sqrt{(-52,80\text{MPa})^2 + 3 \cdot (0,22\text{MPa})^2} = 52,80\text{MPa}$$

### 3.7. Naprężenia zastępcze wg. Hipotezy największych naprężeń stycznych.

$$\sigma_0 = \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} = \sqrt{(-52,80\text{MPa})^2 + 4 \cdot (0,22\text{MPa})^2} = 52,80\text{MPa}$$