Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska

Laboratorium Sterowania Robotów

Laboratorium nr 13

Temat: **Liniowo kwadratowe sterowanie optymalne z wyliczanym momentem (robot manipulacyjny o dwóch stopniach swobody)**

Celem tematyki laboratorium jest testowanie metody **sterowania optymalnego robotem manipulacyjnym.**

Rozważania związane ze sterowaniem optymalnym można interpretować jako pomost pomiędzy klasycznymi technikami sterowania a nowoczesnym ujęciem tych problemów.

A. Synteza sterowania optymalnego pętli zewnętrznej PD + WM dla manipulatora o 2 stopniach swobody.

Zapiszmy dynamiczne równania ruchu manipulatora w formie wektorowej

$$\mathbf{M}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \boldsymbol{\tau}\,, \tag{1}$$

gdzie $\boldsymbol{\tau}$ to wektor sterowań, $\mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{C}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{G}(\mathbf{q})$. Dla uproszczenia pominięto w modelu wpływ zakłóceń. Przyjmijmy, że znamy zadaną trajektorię ruchu $\mathbf{q}_d$ we współrzędnych konfiguracyjnych robota. Wybierzmy sterowanie z uwzględnieniem kompensacji nieliniowości obiektu (linearyzujemy obiekt sterowania) w postaci

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{M}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}_d - \mathbf{u}) + \mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}}), \tag{2}$$

Niech będzie dany również wskaźnik jakości o postaci

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(\mathbf{t})\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{t})\mathbf{R}\mathbf{u}(\mathbf{t}))\mathbf{dt} \tag{3}$$

przy czym Q — macierzą symetryczną dodatnio określoną o wymiarach 4x4, R — macierzą symetryczną dodatnio określoną o wymiarach 4x4.

Opis metody wyliczanego momentu w postaci opisu w przestrzeni błędów zapiszemy jako

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e \\ \dot{e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} w \tag{4}$$

Przechodząc do opisu równania (3) w przestrzeni stanu dla w=0, otrzymamy

$$\begin{aligned} e_1 &= y_1 \\ e_2 &= y_2 \\ \dot{e}_1 &= \dot{y}_1 = y_3 \\ \dot{e}_2 &= \dot{y}_2 = y_4 \\ \ddot{e}_1 &= \dot{y}_3 = -K_{D1}y_3 - K_{p1}y_1 \\ \ddot{e}_2 &= \dot{y}_4 = -K_{D2}y_4 - K_{p2}y_2 \end{aligned} \tag{5}$$

gdzie założono **u,** jako sterowanie od stanu

$$u = -Ky = -[K_p \quad K_D]y = -K_p e - K_D \dot{e} \tag{6}$$

a macierze wzmocnień mają formę

$$K_P = \begin{bmatrix} K_{p1} & 0 \\ 0 & K_{p2} \end{bmatrix}, \quad K_D = \begin{bmatrix} K_{D1} & 0 \\ 0 & K_{D2} \end{bmatrix} \tag{7}$$

i wyznaczamy je z równania

$$K = R^{-1}B^{T}P \tag{8}$$

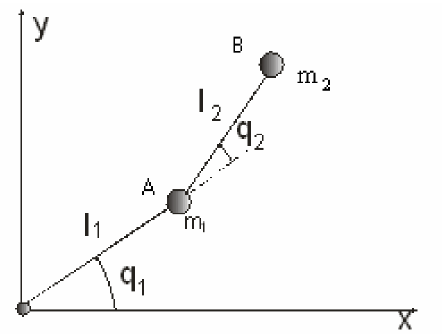
gdzie **P** jest macierzą symetryczną i jest rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$PA + A^{T}P + PBR^{-1}B^{T}P - Q = 0 \tag{9}$$

W ogólnej postaci opis w przestrzeni stanów obiektu na podstawie równania (5) ma formę

$$\dot{y} = Ay + Bu \tag{10}$$

Obiektem sterowania jest dwuczłonowy manipulator , rys.1,



Rys. 1. Dwuczłonowy manipulator

opisany równaniem (1) gdzie wektory i macierze mają następującą formę

$$\begin{bmatrix} a_1 + a_2 + 2a_3\cos q_2 & a_2 + a_3\cos q_2 \\ a_2 + a_3\cos q_2 & a_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_3\dot{q}_2\sin q_2 & -a_3(\dot{q}_1 + \dot{q}_2)\sin q_2 \\ a_3\dot{q}_1\sin q_2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix} +$$
$$+\begin{bmatrix} a_1a_4\cos q_1 + a_3a_4\cos(q_1 + q_2) \\ a_3a_4\cos(q_1 + q_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = (m_1 + m_2)l_1^2,\quad a_2 = m_2l_2^2,\quad a_3 = m_2l_1l_2,\quad a_4 = g/l_1\,.$$

W testach symulacyjnych przyjąć dane:

$[q_{10}, q_{20}, \dot{q}_{10}, \dot{q}_{20}]^T = [0.2,0,0,0]^T$,%warunki początkowe manipulatora

$q_{d1} = A1\sin(pi*t), q_{d2} = A1\sin(pi*t)$, % zadana trajektoria

$t \in (0,6)[s]$, % czas realizacji ruchu

$$Q = \begin{bmatrix} 350+i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 350+i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6+i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5.6+i \end{bmatrix},\quad i = \text{numer zespołu}$$

Tab.1. Dane do symulacji

Zespół	1	2	3	4	5	6	7	8
m1=m2	1	1	1	2	2	2	2	2
l1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
l2	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9
A1=A2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2
Δm_2	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.1	1.2	1.3

B. Zadania do wykonania

1. Dobrać macierz R aby układ zamknięty o macierzy A-BK był stabilny.

2. Wyznaczyć wzmocnienia sterowania, macierze $\lfloor K_p \quad K_D \rfloor$ rozwiązując **równanie Riccatiego:**

a) zastosować **pakiet Maple**

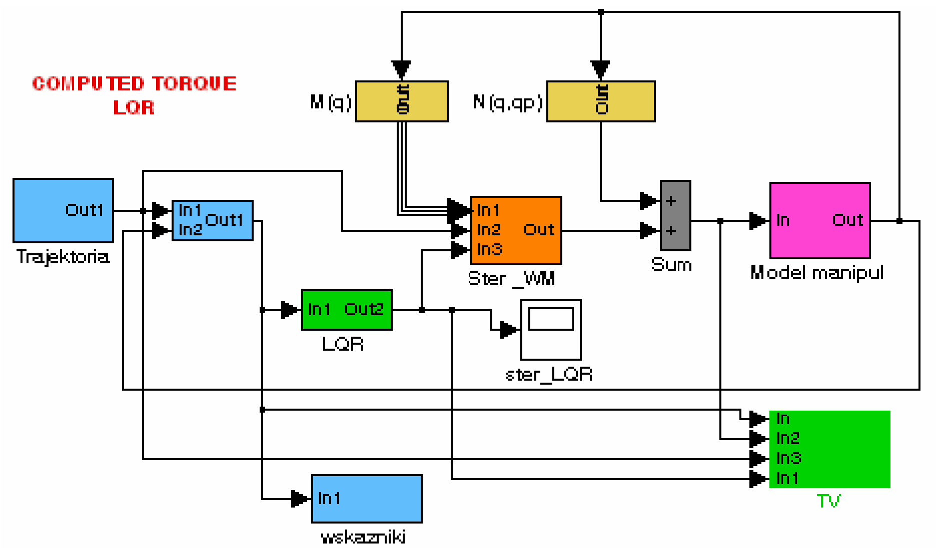
b) zastosować **procedurę Matlaba**

1. Przeprowadzić testy numeryczne wg schematu pokazanego na rys. 2.

   - Bez zakłóceń masy m_2
   - Z zakłóceniem masy $m_2 + \Delta m_2$

2. Na wykresach zamieścić
   a) zadaną trajektorię ruchu punktu B
   b) sterowania LQR,
   c) sterowania całkowite
   d) błędy sterowania
   e) pochodne błędów sterowania.

3. Ocenić stabilność układu, podać wartości własne układu zamkniętego.



Rys.2. Schemat sterownika typu LQR + WM

4. Przeprowadzić ocenę ilościową sterowania przyjmując następujące wskaźniki jakości:

- pierwiastek błędu średniokwadratowego błędów nadążania $e_1 = q_{1d} - q_1$, $e_2 = q_{2d} - q_2$,

$\varepsilon_1 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_{1k}^2}$, $\varepsilon_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e_{2k}^2}$ [rad], gdzie k - to numer kolejnych dyskretnych pomiarów, n- całkowita liczba dyskretnych pomiarów,

- pierwiastek błędu średniokwadratowego pochodnych błędów $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{q}_{1d} - \dot{q}_1$, $\dot{\varepsilon}_2 = \dot{q}_{2d} - \dot{q}_2$

$\dot{\varepsilon}_1 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dot{e}_{1k}^2}$, $\dot{\varepsilon}_2 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \dot{e}_{2k}^2}$ [rad/s],

- całkowy wskaźnik jakości $J = \int_0^\infty (q^T(t)Qq(t) + u(t)^T Ru(t))dt$

5.Uzyskane oceny ilościowe zamieścić w Tab.

Tab. 2. Wartości wskaźników jakości dla sterowania **WM + LQR**

Wskaźnik:	ε_i [rad]	$\dot{\varepsilon}_i$ [rad/s]	J
ramię 1, i=1			
ramię 2, i=2			

Sprawozdanie powinno zawierać:

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji,
- listingi programów,
- otrzymane wykresy (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- wnioski.