Informatyka

WYKŁAD 14

Wielomiany

Wielomian rzeczywisty stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ to funkcja $W: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zadana wzorem

$$W(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

gdzie $a_k \in \mathbb{R}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$ oraz $a_n \neq 0$. Liczby a_k to współczynniki wielomianu.

Przyjmujemy, że funkcja zerowa $W(x) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$.

Wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ to funkcja $W: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zadana wzorem

$$W(z) = c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \dots + c_1 z + c_0,$$

gdzie $c_k \in \mathbb{C}$ dla $k = 0, 1, \dots, n$ oraz $c_n \neq 0$. Liczby c_k to współczynniki wielomianu.

Przyjmujemy, że funkcja zerowa $W(z) \equiv 0$ jest wielomianem stopnia $-\infty$.

UWAGA Ponieważ $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, więc każdy wielomian rzeczywisty można traktować jako wielomian zespolony rozszerzając jego dziedzinę z $\mathbb{R}$ na $\mathbb{C}$.

wielomian rzeczywisty
wielomian zespolony } krótko: wielomian

Definicja: P, Q - wielomiany

Sumę, różnicę i iloczyn wielomianów określamy w naturalny sposób, czyli:

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$$

$$(P-Q)(x) = P(x) - Q(x)$$

$$(P \cdot Q)(x) = P(x) \cdot Q(x)$$

Definicja

Jeżeli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ $(x \in \mathbb{C})$ zachodzi warunek

$$P(x) = Q(x) \cdot S(x) + R(x),$$

gdzie $st\, R(x) < st\, Q(x)$, to mówimy, że wielomian S jest ilorazem, a wielomian R resztą z dzielenia wielomianu P

Definicja

Liczbę rzeczywistą (zespoloną) x_0 nazywamy pierwiastkiem rzeczywistym (zespolonym) wielomianu W, jeżeli

$$W(x_0)=0.$$

Twierdzenie (Bézout):

Liczba x_0 jest pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x)=(x-x_0)\cdot P(x).$$

Przykład: Znając jeden z pierwiastków wielomianu, znaleźć pozostałe pierwiastki

a) $W(x)=x^4+x^3-3x^2-5x-2, \quad x_1=2$

	1	1	-3	-5	-2
2	1	3	3	1	0

$$W(x)=(x-2)(x^3+3x^2+3x+1)$$

	1	3	3	1
-1	1	2	1	0

$$W(x)=(x-2)(x+1)(x^2+2x+1)$$

$$W(x)=(x-2)(x+1)(x+1)^2$$

$$W(x)=(x-2)(x+1)^3$$

$W(x)$ ma dwa pierwiastki

$x_1=2$ p. jednokrotny

$x_2=-1$ p. potrójny

b) $W(z) = z^3 + 5iz^2 - 7z - 3i$, $z_1 = -3i$

	1	$5i$	-7	$-3i$
$-3i$	1	$2i$	-1	0

$-3i \cdot 2i = -6i^2 = 6$

$W(z) = (z+3i)(z^2+2iz-1)$

$az^2 + bz + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{C}$

$a \neq 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$\sqrt{\Delta} = \{\delta, -\delta\}$

$z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$, $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$

$\Delta = (2i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) =$

$= 4i^2 + 4 = 0$

$\delta = 0$

$z_2 = \frac{-b}{2a} = z_3$

$z_2 = \frac{-2i}{2} = -i$

$W(z) = (z+3i)(z+i)^2$

$W(z)$ ma dwa pierwiastki $z_1 = -3i$ p. jednokrotny

$z_2 = -i$ p. podwójny (dwukrotny)

Zapiszemy formalną definicję:

Definicja

Liczba x_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje wielomian P taki, że

$$W(x) = (x-x_0)^k \cdot P(x) \quad \text{oraz} \quad P(x_0) \neq 0.$$

Twierdzenie (o pierwiastkach całkowitych)

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych oraz niech liczba całkowita p będzie pierwiastkiem wielomianu W. Wtedy p jest dzielnikiem wyrazu wolnego a_0.

Twierdzenie (o pierwiastkach wymiernych)

Niech $W(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ będzie wielomianem o współczynnikach całkowitych oraz niech liczba wymierna $\frac{p}{q}$, gdzie $p, q \in \mathbb{Z}$, $(p,q) = 1$ (czyli p, q są względnie pierwsze) będzie pierwiastkiem wielomianu W.
Wtedy p jest dzielnikiem współczynnika a_0, zaś q jest dzielnikiem współczynnika a_n.

Przykład

Znaleźć wszystkie pierwiastki wymierne wielomianu

$W(x) = 4x^4 + x^2 - 3x + 1$

$a_0 = 1$: dzielniki a_0 : $1, -1$

$a_4 = 4$: dzielniki a_4 : $1, -1, 2, -2, 4, -4$

Liczby wymierne, które mogą być pierwiastkami $W(x)$:

$1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}$

Poza tym zbiorem wiel. $W(x)$ NA PEWNO NIE MA pierwiastków wymiernych.

Sprawdzamy

$W(1) \neq 0$

$W(-1) \neq 0$

$W(\frac{1}{2}) =$

$W(-\frac{1}{2}) =$

$W(\frac{1}{4}) =$

$W(-\frac{1}{4}) =$

Zasadnicze twierdzenie algebry

Każdy wielomian zespolony stopnia $n \geq 1$ ma co najmniej jeden pierwiastek zespolony.

Stąd otrzymujemy:

Każdy wielomian zespolony stopnia $n \in \mathbb{N}$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych, uwzględniając krotności.

Jeśli W stopnia n ma pierwiastki zespolone z_j o krotnościach odpowiednio k_j ($k_j \in \mathbb{N}$ dla $j = 1, \dots, m$) oraz $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$, to

$$W(z) = c_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \cdot \ldots \cdot (z - z_m)^{k_m},$$

gdzie c_n to współczynnik przy z^n.

Przykład: Rozłóż na iloczyn dwumianów

$$W(z) = z^2 + i$$

$$z^2 + i = az^2 + bz + c$$

$$\Delta = 0 - 4 \cdot 1 \cdot i = -4i$$

$$\sqrt{\Delta} = \sqrt{-4i} = \{z_0, z_1\}$$

$$z = -4i = 4\left(\cos \tfrac{3}{2}\pi + i \sin \tfrac{3}{2}\pi\right)$$

$$z_0 = 2\left(\cos \frac{\frac{3}{2}\pi + 2\cdot 0 \cdot \pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3}{2}\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2}\right) = 2\left(\cos \tfrac{3}{4}\pi + i \sin \tfrac{3}{4}\pi\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$z_1 = \frac{-(-\sqrt{2} + i\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2} - i\sqrt{2}}{2}$$

$$z_2 = \frac{-\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2}$$

$$\boxed{W(z) = (z - z_1)(z - z_2)}$$

Uwaga

Niech W będzie wielomianem o współczynnikach nieczynistych. Wówczas liczba zespolona z_0 jest k-krotnym pierwiastkiem wielomianu W wtedy i tylko wtedy, gdy liczba $\bar{z}_0$ jest k-krotnym pierwiastkiem tego wielomianu.