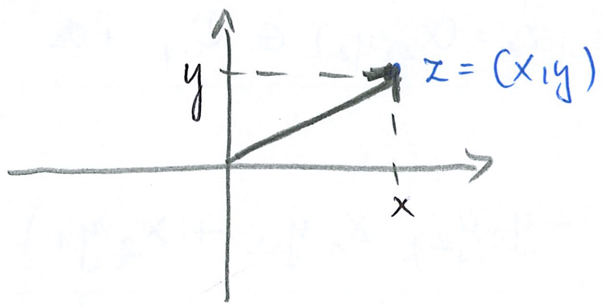
Informatyka
WYKŁAD 13

Liczby zespolone

Liczba zespolona to uporządkowana para liczb rzeczywistych, np. (x,y), (a,b). Liczby zespolone oznaczamy literami $z, w, v, \ldots$ Zbiór wszystkich liczb zespolonych oznaczamy przez $\mathbb{C}$. Mamy zatem

$$\mathbb{C} = \{ z = (x,y) : x, y \in \mathbb{R} \}.$$

Liczbę zespoloną $z = (x,y)$ możemy przedstawić na płaszczyźnie jako punkt o współrzędnych (x,y) lub jako wektor o początku w punkcie $(0,0)$ i końcu w punkcie (x,y):



Wtedy zbiór wszystkich liczb zespolonych nazywamy płaszczyzną zespoloną.

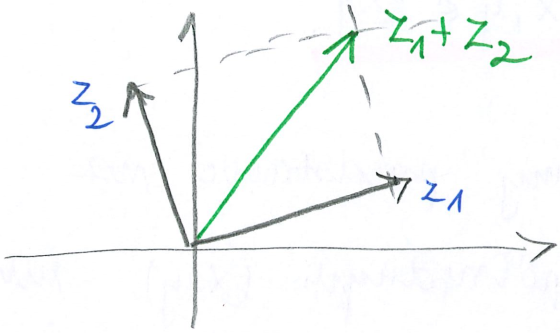
W zbiorze $\mathbb{C}$ wprowadzamy dwa działania – dodawanie i mnożenie:

dodawanie liczb zespolonych:

mamy dwie liczby zespolone $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$, ich sumę określamy wzorem:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Na płaszczyźnie zespolonej dodawanie liczb zespolonych możemy zinterpretować następująco:



mnożenie liczb zespolonych:

mamy $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2) \in \mathbb{C}$, ich iloczyn określamy wzorem:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

UWAGA Z określenia pary uporządkowanej wynika, że dwie liczby zespolone $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 = x_2$ i $y_1 = y_2$.

Iloczyn $\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n \text{ razy}}$ oznaczamy przez z^n.

Po co nam liczby zespolone:

pierwotnie znano jedynie liczby naturalne, ale:

$x+10=0$ nie ma rozwiązania w $\mathbb{N}$, ale ma rozwiązanie w $\mathbb{Z}$

$3x-2=0$ nie ma rozwiązania w $\mathbb{Z}$, ale ma rozwiązanie w $\mathbb{Q}$

$x^2-2=0$ nie ma rozwiązania w $\mathbb{Q}$, ale ma rozwiązanie w $\mathbb{R}$

$x^2+2=0$ nie ma rozwiązania w $\mathbb{R}$, ale ma rozwiązanie w $\mathbb{C}$!!

Własności działań w zbiorze $\mathbb{C}$:

niech $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, wtedy

1) $z_1+z_2=z_2+z_1$

2) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$

3) $\forall_{z=(x,y)\in\mathbb{C}}\ (x,y)+(0,0)=(x,y)$, czyli liczba zespolona $(0,0)=0$ jest elementem neutralnym dodawania w $\mathbb{C}$

4) $\forall_{z=(x,y)\in\mathbb{C}}\ z+(-x,-y)=(0,0)$, wtedy $(-x,-y)=:-z$ i nazywamy liczbą przeciwną do z

5) $z_1\cdot z_2=z_2\cdot z_1$

6) $(z_1\cdot z_2)\cdot z_3=z_1\cdot(z_2\cdot z_3)$

7) $\forall_{z=(x,y)\in C}\ (x,y)\cdot(1,0)=(x,y)$, czyli liczba $(1,0)=1$ jest el. neutralnym mnożenia

8) $\forall_{z=(x,y)\in\mathbb{C}\setminus 0} \quad (x,y)\cdot\underbrace{\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}\right)}_{\text{oznaczymy } \frac{1}{z} \text{ i nazwiemy odwrotnością } z} = (1,0),$

9) $z_1\cdot(z_2+z_3) = z_1\cdot z_2 + z_1\cdot z_3$

Oprócz dodawania i mnożenia liczb zespolonych, definiujemy również:

odejmowanie liczb zespolonych:

niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, wtedy różnicę liczb z_1, z_2 określamy wzorem:

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2) \quad \text{różnica liczb zespolonych}$$

dzielenie liczb zespolonych:

niech $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_2 \in \mathbb{C}\setminus 0$, wtedy iloraz liczb z_1, z_2 określamy wzorem:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} \quad \text{iloraz liczb zespolonych}$$

UWAGA Można sprawdzić, że w liczbach zespolonych prawdziwe zostają reguły znane dla $\mathbb{R}$, w szczególności prawdziwe pozostają wzory skróconego mnożenia, wzory na sumę ciągu arytmetycznego i geometrycznego itd.

Przykład

a) $(0,1)+(3,-4)=(0+3,1+(-4))=(3,-3)$

b) $(0,1)\cdot(3,-4)=(0\cdot3-1\cdot(-4),\ 0\cdot(-4)+3\cdot1)=(4,3)$

c) $(4,-1)-(-3,5)=(4,-1)+(3,-5)=(7,-6)$

d) $\dfrac{(-1,-2)}{(3,4)}=(-1,-2)\cdot\dfrac{1}{(3,4)}=(-1,-2)\cdot\left(\dfrac{3}{9+16},\dfrac{-4}{9+16}\right)=$

$=(-1,-2)\cdot\left(\dfrac{3}{25},\dfrac{-4}{25}\right)=\left(\dfrac{-3}{25}-(-2)\cdot\left(\dfrac{-4}{25}\right),\ (-1)\cdot\dfrac{(-4)}{25}+\dfrac{3}{25}\cdot(-2)\right)$

$=\left(\dfrac{-11}{25},\dfrac{-2}{25}\right)$

Zbiór liczb rzeczywistych jako podzbiór zbioru liczb zespolonych

Liczbę zespoloną postaci $(x,0)$ będziemy utożsamiać z liczbą rzeczywistą x. Ponadto, mamy własności:

1) $(x_1,0)+(x_2,0)=(x_1+x_2,0)$

2) $(x_1,0)-(x_2,0)=(x_1-x_2,0)$

3) $(x_1,0)\cdot(x_2,0)=(x_1\cdot x_2,0)$

4) $\dfrac{(x_1,0)}{(x_2,0)}=\left(\dfrac{x_1}{x_2},0\right),\quad x_2\neq0$

Zatem zbiór $\tilde{\mathbb{R}}=\{(x,0): x\in\mathbb{R}\}$ możemy utożsamiać ze zbiorem $\mathbb{R}$. Można więc zapisać:

$\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$, a ponieważ $\tilde{\mathbb{R}} \subset \mathbb{C}$, więc

$$\boxed{\mathbb{R} \subset \mathbb{C}}$$

(pamiętając o utożsamieniu liczby $(x,0)$ zespolonej z liczbą rzeczywistą x).

Postać algebraiczna liczby zespolonej

Definicja Liczbę zespoloną $(0,1)$ nazywamy jednostką urojoną i oznaczamy symbolem i: $i = (0,1)$.

Mamy: $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (0-1,\ 0\cdot 1 + 0\cdot 1) = (-1,0) = -1$.

Każdą liczbę zespoloną można zapisać w postaci

$$z = x + iy, \quad \text{gdzie } x, y \in \mathbb{R},$$

przy czym zapis ten jest jednoznaczny. Ponadto: jeśli $z = (x,y)$, to mamy również $z = x+iy$ oraz na odwrót: jeśli $z = x+iy$, to $z = (x,y)$. Powyższe przedstawienie nazywamy postacią algebraiczną liczby zespolonej. Jeśli:

$$z = \underbrace{x}_{=\,\mathrm{Re}\, z} + i\underbrace{y}_{=\,\mathrm{Im}\, z}$$

$\mathrm{Re}\, z$ – część rzeczywista liczby z

$\mathrm{Im}\, z$ – część urojona liczby z

Liczbę postaci $z = iy$, gdzie $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ nazywamy czysto urojoną.

Uwaga - nie każde przedstawienie liczby zespolonej w postaci $x + iy$ jest jej postacią algebraiczną - trzeba pamiętać o warunku $x, y \in \mathbb{R}$!

Np. przedstawienie $z = 1 + i(-2i)$ nie jest postacią algebraiczną liczby $z = 3$.

Dodawanie, odejmowanie i mnożenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej wykonujemy tak, jak działania na wielomianach zmiennej i, przy warunku $i^2 = -1$.

Dzielenie liczb zespolonych w postaci algebraicznej - przy dzieleniu przez liczbę $x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$, mnożymy licznik i mianownik przez liczbę $x - iy$, wtedy w mianowniku mamy liczbę rzeczywistą.

Przykład:

a) $(1-\sqrt{3}i) + (1+\sqrt{2}i) = 2 + (\sqrt{2}-\sqrt{3})i$

b) $(3i-2) - (1-2i) = -3 + 5i$

c) $(1+2i)(-3+4i) = -3 + 4i - 6i + \overbrace{8i^2}^{-8} = -11 - 2i$

d) $\frac{4+5i}{2-i} = \frac{(4+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{8+4i+10i+\overbrace{5i^2}^{-5}}{4-i^2} = \frac{3+14i}{5} = \frac{3}{5} + \frac{14}{5}i$

Proste własności:

$$Re(z_1+z_2) = Re\, z_1 + Re\, z_2$$

$$Im(z_1+z_2) = Im\, z_1 + Im\, z_2$$

$$Re(iz) = -Im\, z$$

$$Im(iz) = Re\, z$$

Równość liczb zespolonych w postaci algebraicznej:

$$x_1 + iy_1 = x_2 + iy_2 \iff \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases}$$

Inaczej:

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} Re\, z_1 = Re\, z_2 \\ Im\, z_1 = Im\, z_2 \end{cases}$$

Przykład Rozwiąż równanie:

$$z^2 + 4i = 0 \qquad z^2 = -4i \qquad z = x+iy,\ x,y \in \mathbb{R}$$

$$(x+iy)^2 = -4i$$

$$x^2 + i^2y^2 + 2xyi = -4i$$

$$\underbrace{x^2-y^2} + i\,\underbrace{2xy} = \underbrace{-4i}$$

$$\begin{cases} x^2-y^2=0 \\ 2xy=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2=y^2 \\ xy=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ xy=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-y \\ xy=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x \\ x^2=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} y=-x \\ -x^2=-2 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ x=\sqrt{2} \vee x=-\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=-\sqrt{2} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=\sqrt{2} \end{cases}$$

sprzeczne w $\mathbb{R}$

odp: $z_1 = \sqrt{2} - \sqrt{2}i$, $z_2 = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i$

Definicja: Sprzężeniem liczby zespolonej $z = x + iy$, gdzie $x, y \in \mathbb{R}$ nazywamy liczbę zespoloną $\bar{z}$ określoną wzorem:

$$\bar{z} = x - iy.$$

Własności sprzężenia: Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wtedy:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

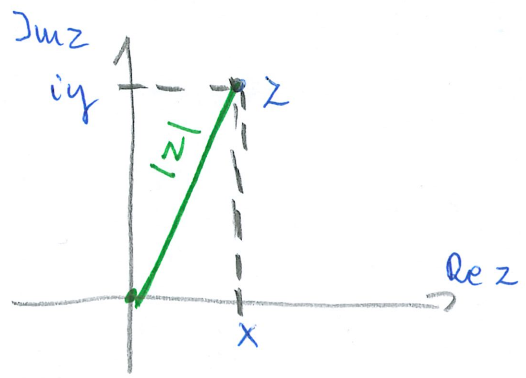
$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \quad z_2 \neq 0$$

Postać trygonometryczna liczby zespolonej

Definicja: Moduł liczby zespolonej $z = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}$, to liczba nieujemna $|z|$ określona wzorem

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



$|z|$ wyraża odległość liczby z od liczby 0

Własności modułu:

$$|\bar{z}| = |z| = |-z|$$

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{oraz} \quad |z^n| = |z|^n$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0$$

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

Przykład Narysować zbiór liczb zespolonych spełniających warunek: $|z+i| = 3$.

Niech $z = x+iy$, $x,y \in \mathbb{R}$

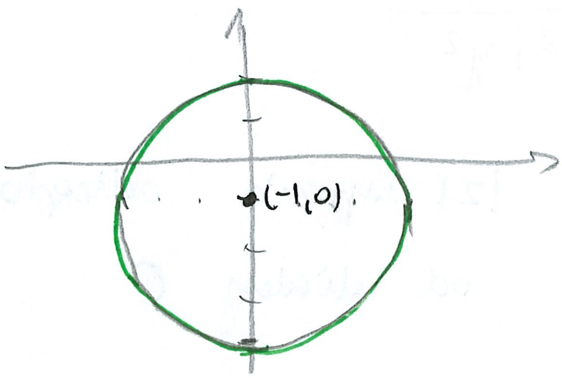
$$|x+iy+i| = 3$$

$$|x+i(y+1)| = 3$$

$$\sqrt{x^2+(y+1)^2} = 3$$

$$x^2+(y+1)^2 = 3^2$$

równanie okręgu o $S(0,-1)$ i promieniu $r=3$



Definicja

Argument liczby zespolonej $z = x+iy \neq 0$, $x, y \in \mathbb{R}$ to każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$ spełniająca układ równań

$$\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{x}{|z|} \\ \sin\varphi = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

Argumentem liczby zespolonej $z = 0$ jest każda liczba $\varphi \in \mathbb{R}$.

Argument główny liczby zespolonej $z \neq 0$ to argument tej liczby spełniający nierówności: $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Argumentem głównym liczby zespolonej $z = 0$ jest liczba 0.

argument główny liczby zespolonej z oznaczamy:

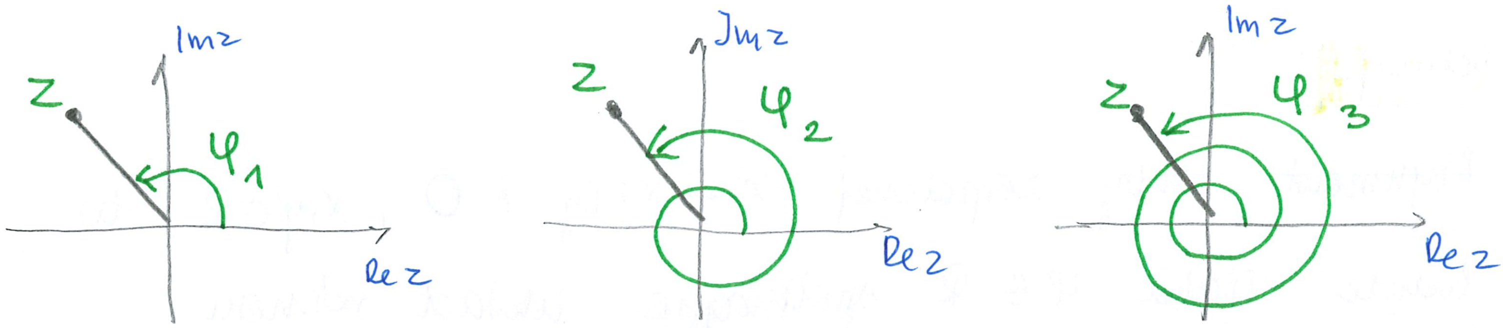
$\operatorname{Arg} z$.

dowolny argument liczby zespolonej z oznaczamy

$\arg z$.

Zachodzi:

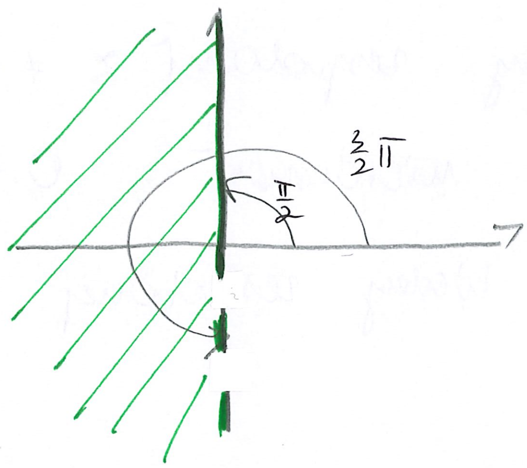
$$\arg z = \operatorname{Arg} z + 2k\pi, \quad \text{gdzie } k \in \mathbb{Z}.$$



argument główny

$\varphi_1 = \operatorname{Arg} z$

Przykład Narysować zbiór $A = \{ z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{2} \le \operatorname{Arg} z \le \frac{3\pi}{2} \}$



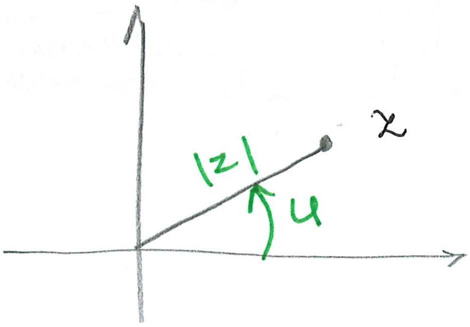
UWAGA !!

Każdą liczbę zespoloną z można przedstawić w postaci

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

gdzie $r \ge 0$ oraz $\varphi \in \mathbb{R}$. Liczba r jest wówczas modułem liczby zespolonej z, a φ jednym z jej argumentów. Powyższą postać nazywamy postacią trygonometryczną liczby zespolonej z.

Czyli: $\boxed{z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$.



Liczby zespolone $z_1 = |z_1| (\cos\varphi_1 + i \sin\varphi_1)$ oraz $z_2 = |z_2| (\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ są równe wtedy i tylko wtedy, gdy:

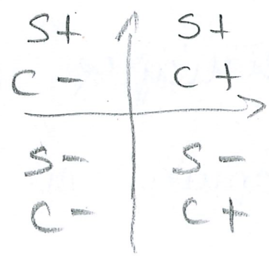
$(|z_1| = |z_2| = 0)$ albo $(|z_1| = |z_2| > 0$ i $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k\pi$ dla pewnego $k \in \mathbb{Z})$

Przykład:

Liczbę $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$ zapisać w postaci trygonometrycznej.

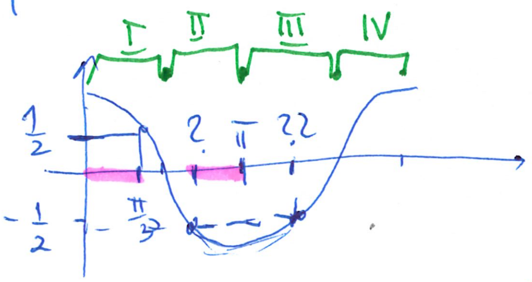
$z = |z| (\cos\varphi + i \sin\varphi)$

$|z| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$



$\begin{cases} \cos\varphi = -\frac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\varphi \in$ III ćw, czyli $\pi \le \varphi < \frac{3}{2}\pi$



$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$

$? = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

$?? = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4}{3}\pi$

$$z = 1\left(\cos\frac{4}{3}\pi + i \sin\frac{4}{3}\pi\right)$$

Mnożenie i dzielenie liczb w postaci trygonometrycznej

$z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$

$z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$, wtedy

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) , z_2 \neq 0$$

$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, wtedy

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$ wzór de Moivre'a

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Definicja Pierwiastkiem stopnia n $(n \in \mathbb{N})$ z liczby zespolonej z nazywamy każdą liczbę zespoloną w spełniającą równość $w^n = z$. Zbiór pierwiastków stopnia n z liczby z oznaczamy symbolem

$$\sqrt[n]{z}.$$

symbol $\sqrt[n]{}$ ma zupełnie inne znaczenie w liczbach zespolonych niż w liczbach rzeczywistych:

w $\mathbb{R}$: jest określony jednoznacznie
jest to funkcja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dla n nieparzystych
oraz funkcja: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ dla n parzystych

w $\mathbb{C}$: jest to zbiór rozwiązań równania $w^n = z$

DLA PORÓWNANIA:

w $\mathbb{R}$	w $\mathbb{C}$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{4} = \{-2, 2\}$
$\sqrt[4]{1} = 1$	$\sqrt[4]{1} = \{1, i, -1, -i\}$
$\sqrt{-1}$ nie ist.	$\sqrt{-1} = \{i, -i\}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x\rvert$	$\sqrt{z^2} = \{z, -z\}$

UWAGA

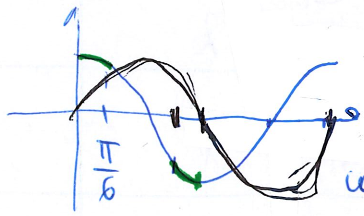
Każda liczba zespolona $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ma dokładnie n pierwiastków stopnia n. Zbiór tych pierwiastków ma postać

$$\sqrt[n]{z} = \{z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}\},$$

gdzie $z_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)$ dla

$k = 0, 1, \ldots, n-1.$

Przykład: Oblicz $\sqrt[3]{8i}$, $n = 3$



$\cos\frac{5}{6}\pi = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$z = 8i \qquad |z| = 8, \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$

$$8i = 8\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$z_0 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 0\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 0\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_1 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 1\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2\cdot 1\cdot\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right) =$$

$$= 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_2 = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2\cdot 2\cdot\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{6}_{2}}\pi + i\sin\frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{6}_{2}}\pi\right)$$

$$= 2(0 + i\cdot(-1)) = -2i$$

$$\boxed{\sqrt[3]{8i} = \{\sqrt{3}+i,\ -\sqrt{3}+i,\ -2i\}}$$