MACIERZE - zadania przykładowe

Zad.1 Obliczyć

A)

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} - 3\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}^T + 2\cdot\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$$

B)

$$-2\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\left(2\cdot\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\right)$$

C)

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} - 2\cdot\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\right)^T\cdot\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$$

D)

$$\left(\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 3\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T\right)\cdot\begin{bmatrix} 9 \\ -9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \end{bmatrix}^T$$

Zad.2 Obliczyć wyznacznik macierzy A (stosując rozwinięcie Laplace'a):

A)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

B)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

C)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Zad.3 Rozwiązać równania macierzowe

A)

$$X\cdot\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} - 3I + 2X.$$

B)

$$X\cdot\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 2I = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}^T.$$

C)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}^T + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot X$$

Zad.4 Rozwiązać układ Cramera (wykorzystując wzory Cramera):

A)

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ 2x + 3z = 4 \\ 2y + 2z = 4 \end{cases}$$

B)

$$\begin{cases} y + 2z = 4 \\ -x + 3z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

Zad.5 Dla jakiej wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ podany układ jest układem Cramera?

$$\begin{cases} x + 3y + 3z = px \\ 3x + y + 3z = py \\ 3x + 3y + z = pz \end{cases}$$

Wskazówka: $detA \neq 0$.

Zad.6 Wyznaczyć rząd macierzy:

A)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

B)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & -5 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 7 & -3 \end{bmatrix}$$

C)

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

D)

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \\ -1 & 6 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 2 & 6 \\ 0 & 10 & 5 & 15 \end{bmatrix}$$

Zad.7 Rozwiązać układ równań (wykorzystując rzędy macierzy):

A)

$$\begin{cases} 2x + 4y = 2 \\ -x + 2z = 1 \\ 2x + 3y - z = 1 \\ x + 3y + z = 0 \\ -x + 2y + 2z = 2 \end{cases}$$

Odp.: Układ sprzeczny.

B)

$$\begin{cases} x + 2y + z + t = 7 \\ 2x - y - z + 4t = 2 \\ 5x + 5y + 2z + 7t = 1 \end{cases}$$

Odp.: Układ sprzeczny.

C)

$$\begin{cases} 2x + y - 2z = 0 \\ x + y + z = 2 \\ -x - y - 3z = -4 \\ 2x + y - 4z = -2 \\ x - 5z = -4 \end{cases}$$

Odp.: Układ oznaczony $(x = 1, y - 0, z = 1)$

D)

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

Odp.: Układ oznaczony $(x = 1, y = -\frac{1}{2}, z = -\frac{1}{2})$

E)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$$

Odp.: Układ nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów)

F)

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3t = 0 \\ 2x + 4y - 4z + 10t - 2u = 0 \\ 3x + 2y - 6z + 7u + u = 0 \\ -x - 3y + 2z - 7t + 2u = 0 \end{cases}$$

Odp.: Układ nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 3 parametrów)

G)

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - t = -1 \\ 3x + 6y + 7z + t = 5 \\ 2x + 4y + 7z - 4t = -6 \end{cases}$$

Odp.: Układ nieoznaczony (nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów)

Zad.8 Ocenić w zależności od parametru $p \in \mathbb{R}$ ilość rozwiązań układu równań:

$$\begin{cases} x + y + z = p \\ x + y + pz = p \\ x + py + pz = p \end{cases}$$

Odp.: Dla $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (rzA=rzU=3=n), dla $p = 1$ układ ma nieskończenie wiele rozwiązań zależnych od 2 parametrów (rzU=rzA=1 $<$ n=3).