Informatyka
WYKŁAD 11

Macierze, wyznacznik macierzy kwadratowej

MACIERZE

Definicja Macierz (rzeczywista) wymiaru $m \times n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}$ to prostokątna tablica wypełniona $m \cdot n$ liczbami rzeczywistymi ustawionymi w m wierszach i n kolumnach.

Macierze oznaczamy dużymi literami: A, B, C, X, itp.

$$A = \underbrace{\begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \\ j\text{-ta kolumna} \end{array}}_{n \text{ kolumny}} \begin{array}{l} \\ \\ \\ i\text{-ty wiersz} \\ \\ \\ \end{array} \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} m \text{ wierszy}$$

a_{ij} - element stojący w i-tym wierszu i j-tej kolumnie

$$[a_{ij}]^m_n = [a_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij}]$$

$A = B \iff A$ i B mają te same wymiary i

$$a_{ij} = b_{ij} \quad \forall_{1 \le i \le m} \ \forall_{1 \le j \le n}$$

Rodzaje macierzy

macierz zerowa: macierz wymiaru $m \times n$, której wszystkie elementy są równe 0, ozn. $\mathbb{0}$, $\mathbb{0}^m_n$, $\mathbb{0}_{m\times n}$

$$\mathbb{0}^m_n = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}}_{n \text{ kolumn}} \Big\} m \text{ wiersz}$$

macierz kwadratowa: macierz, w której liczba wierszy równa się ilości kolumn, czyli $m = n$. Wtedy liczbę n nazywamy stopniem macierzy kwadratowej.

$$A^n_n = A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

(główna) przekątna macierzy

macierz trójkątna górna: macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$ postaci

$$U = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

trójkąt złożony z zer

macierz trójkątna dolna: macierz kwadratowa stopnia $n \geq 2$ postaci:

$$L = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz diagonalna (przekątniowa): macierz kwadratowa stopnia n, w której wszystkie elementy nie stojące na głównej przekątnej są równe 0

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

macierz jednostkowa: macierz diagonalna, w której wszystkie elementy głównej przekątnej są równe 1

Działania na macierzach

Suma i różnica macierzy

$A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ – macierze wymiaru $m \times n$

Suma (różnica) macierzy A i B to macierz $C = [c_{ij}]$, gdzie

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n$$

Piszemy wtedy $C = A + B$, $C = A - B$.

np. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1+0 & -2+0 & 3+3 \\ 5+1 & 6+2 & 7+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 6 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy przez liczbę

$A = [a_{ij}]$ – macierz wymiaru $m \times n$, $\alpha \in \mathbb{R}$

Iloczyn macierzy A przez liczbę α to macierz $B = [b_{ij}]$, gdzie

$$b_{ij} = \alpha\, a_{ij}, \qquad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n.$$

Piszemy wtedy $B = \alpha \cdot A$.

np $\alpha = -3$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

$$\alpha \cdot A = (-3) \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 0 & 3 \\ -15 & -12 \end{bmatrix}$$

Iloczyn macierzy

$A = [a_{ij}]$ – macierz wymiaru $m \times n$

$B = [b_{ij}]$ – macierz wymiaru $n \times k$

Iloczyn macierzy A i B to macierz $C = [c_{ij}]$, gdzie

$$c_{ij} = [a_{i1} \dots a_{in}] \circ \begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{i1} \cdot b_{1j} + \dots + a_{in} b_{nj}, \quad \begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le k \end{matrix}$$

Piszemy wtedy $C = AB$.

np $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$ $\quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$

$$A^4_2 \cdot B^2_2 = C^4_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 0 & -1 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 3 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot (-5) \\ 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-5) \\ 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 & 0 \cdot 2 + (-1)(-5) \\ 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 3 & 4 \cdot 2 + (-3) \cdot (-5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 7 & -11 \\ -3 & 5 \\ -13 & -7 \end{bmatrix}$$

Własności działań na macierzach

A, B, C – dowolne macierze tego samego wymiaru
$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

1. $A+B = B+A$

2. $(A+B)+C = A+(B+C)$

3. $A+\mathbb{O} = \mathbb{O}+A = A$

4. $A+(-A) = \mathbb{O}$

5. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$

6. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$

7. $1 \cdot A = A$

8. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$

Dodatkowo zakładamy, że w poniższych własnościach działania są wykonalne:

9. $A(B+C) = AB+AC$

10. $(A+B)C = AC+BC$

11. $A(\alpha B) = (\alpha A)B = \alpha(AB)$

12. $(AB)C = A(BC)$

13. $AI_n = A, \quad I_m \cdot A = A$

Macierz transponowana

$A = [a_{ij}]$ – macierz wymiaru $m \times n$

Macierz transponowana do macierzy A to macierz B

$B = [b_{ij}]$ wymiaru $n \times m$, gdzie

$$b_{ij} = a_{ji}, \quad \begin{matrix} 1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m . \end{matrix}$$

Piszemy $B = A^T$.

np.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Definicja

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej nazywamy funkcję, która każdej macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ przypisuje liczbę rzeczywistą $\det A$ określoną wzorem indukcyjnym:

1°. stopień $A = 1$, to $\det A = a_{11}$

2°. stopień $A = n \geq 2$, to

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n} a_{1n} \det A_{1n}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz stopnia $n-1$ otrzymaną z macierzy A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Inne oznaczenia:

$$\det[a_{ij}], \quad |A|, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Można mówić zamiennie:

stopień wyznacznika ⟷ stopień macierzy
element wyznacznika ⟷ element macierzy
wiersz, kolumna wyznacznika ⟷ wiersz, kolumna macierzy

Przykłady

a) $\det\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = (-1)^{1+1}\cdot 5\cdot|6| + (-1)^{1+2}\cdot 3\cdot|1| =$

$= 30 - 3$

ogólnie:
$$\det\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

b) Reguła Sarrusa obliczania wyznaczników stopnia 3

$$\det\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix} = aei + bfg + cdh - ceg - afh - bdi$$

Reguła ta działa JEDYNIE dla wyznaczników stopnia 3

Definicja

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. Dopełnieniem algebraicznym elementu a_{ij} macierzy A nazywamy liczbę

$$D_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot \det A_{ij},$$

gdzie A_{ij} to macierz stopnia $n-1$ otrzymana z A przez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład: Obliczyć dopełnienia algebraiczne elementu

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & \boxed{2} & 1 \\ -5 & 4 & -1 \end{bmatrix} \qquad 2 = a_{22}$$

$$D_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \det A_{22} = (-1)^4 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -5 & -1 \end{bmatrix} = \underline{\underline{10}}$$

Twierdzenie – rozwinięcie Laplace'a wyznacznika

Niech $A = [a_{ij}]$ będzie macierzą kwadratową stopnia $n \geq 2$. Ustalmy liczby naturalne i oraz j, gdzie $1 \leq i, j \leq n$. Wtedy:

$$\det A = a_{i1} D_{i1} + a_{i2} D_{i2} + \dots + a_{in} D_{in},$$

rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza

$$\det A = a_{1j} D_{1j} + a_{2j} D_{2j} + \dots + a_{nj} D_{nj}.$$

rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny

Przykład :

$$\begin{vmatrix} -3 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

rozwiniemy wyznacznik = względem 3 kolumny

$$= 1 \cdot D_{13} + \underbrace{0 \cdot D_{23}}_{0} + (-2) \cdot D_{33} + \underbrace{0 \cdot D_{43}}_{0} =$$

$$= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 80 - 2 - \cancel{24} + \cancel{25} - 2(12 + 12 - 40 - 45) =$$

$$= 80 - 1 - 2(-61) = 79 + 122 = \underline{\underline{201}}$$

Własności wyznaczników:

1. Gdy w macierzy A mamy kolumnę złożoną z samych zer, to $\det A = 0$.
Gdy w macierzy mamy wiersz złożony z samych zer, to $\det A = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} & 0 & \\ & 0 & \cdots \\ & \vdots & \\ & 0 & \end{bmatrix} = 0 \quad , \quad \det \begin{bmatrix} & \vdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ & \vdots & & \end{bmatrix} = 0$$

2. Gdy w macierzy A przestawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze), to wyznacznik zmieni znak.

$$\det \begin{bmatrix} a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{ni} & & a_{nj} & \cdots \end{bmatrix} = -\det \begin{bmatrix} \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1i} & \cdots \\ & \vdots & & \vdots & \\ & a_{nj} & & a_{ni} & \cdots \end{bmatrix}$$

3. Gdy w macierzy A mamy dwie jednakowe kolumny (dwa wiersze), to $\det A = 0$.

$$\det \begin{bmatrix} a & \cdots & a & \cdots \\ b & & b & \\ \vdots & & \vdots & \\ x & & x & \end{bmatrix} = 0$$

4. Gdy wszystkie elementy pewnej kolumny [wiersza] mają wspólny czynnik c, to c można wyciągnąć przed wyznacznik:

$$\det \begin{bmatrix} \cdots & c\alpha & \cdots \\ & c\beta & \\ & \vdots & \\ & c\chi & \end{bmatrix} = c \cdot \det \begin{bmatrix} \cdots & \alpha & \cdots \\ & \beta & \\ & \vdots & \\ & \chi & \end{bmatrix}$$

5.

$$\det \begin{bmatrix} \cdots & \alpha + a & \cdots \\ & \beta + b & \cdots \\ & \vdots & \\ & \omega + x & \cdots \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cdots & \alpha & \cdots \\ & \beta & \\ & \vdots & \\ & \omega & \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \cdots & a & \cdots \\ \cdots & b & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & x & \cdots \end{bmatrix}$$

6. Wyznacznik nie zmieni się, gdy do elementów danej kolumny dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny: [analogiczna własność zachodzi dla wierszy]

$$\det \begin{bmatrix} \cdots & \alpha & \cdots & a & \cdots \\ & \beta & & b & \\ & \vdots & & \vdots & \\ & \omega & & x & \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \cdots & \alpha + ca & \cdots & a & \cdots \\ \vdots & \beta + ca & \cdots & b & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \cdots & \omega + c \cdot a & \cdots & x & \cdots \end{bmatrix}$$

7. $\det A = \det(A^T)$

Oznaczamy:

- $k_i \leftrightarrow k_j$, $w_i \leftrightarrow w_j$ - zamiana i-tej oraz j-tej kolumny (wiersza)
- $c \cdot k_j$, $c \cdot w_j$ - pomnożenie j-tej kolumny przez c
- $k_i + ck_j$, $w_i + cw_j$ - dodanie do i-tej kolumny kolumny j-tej pomnożonej przez c (analogicznie dla wiersza)

Wymienione operacje to tzw. operacje elementarne.

Przykład

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} \overset{(-1)k_1+k_2}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \underset{\text{2 kolumny}}{\overset{\text{rozw. L. wzgl.}}{=}}$$

$$1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 12 + 1 + 1 - 3 - 1 - 4 = \underline{\underline{6}}$$

Przykład

$$\begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 6 & 1 \end{vmatrix} \underset{(-1)w_1+w_4}{\overset{(-2)w_1+w_3}{=}} \begin{vmatrix} 5 & 0 & -3 & 1 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ -15 & 1 & 10 & 0 \\ -5 & 7 & 9 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -15 & 1 & 10 \\ -5 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+4} \cdot 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 1 & 10 \\ -1 & 7 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= (-5) \cdot (9 - 20 + 42 - 2 + 54 - 70) = -\underline{\underline{65}}$$