Przypomnienie: **Definicja 43**:

Niech A będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, niech $p \in A$. Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie p, gdy istnieje odwzorowanie liniowe $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takie, że:

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - T(h)}{|h|} = 0 \qquad (*)}$$

długość wektora h, $|h| = \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$
gdy $h = (h_1, \ldots, h_n)$

Odwzorowanie T nazywamy pochodną zupełną lub pochodną funkcji f w punkcie p i często ozn. $f'(p)$.

Zauważmy, że dla $n=1$ definicja 43 pokrywa się z definicją pochodnej funkcji jednej zmiennej.

Zapiszemy definicję 43 w dwóch szczególnych przypadkach – gdy $n=2$ oraz gdy $n=3$.

UWAGA – w dalszym ciągu cały czas zakładamy, że $A \subset \mathbb{R}^n$ jest zbiorem OTWARTYM.

Definicja RR dla funkcji dwóch zmiennych:

Niech A będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^2$ oraz niech $(x_0, y_0) \in A$. Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0), gdy istnieją pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad i \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

oraz

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0) - \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k\right]}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Definicja RR dla funkcji trzech zmiennych:

Niech A będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^3$ oraz niech $(x_0, y_0, z_0) \in A$. Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdy istnieją pochodne cząstkowe

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)$$

oraz

$$\lim_{(h,k,m)\to(0,0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k, z_0+m) - f(x_0, y_0, z_0)}{\sqrt{h^2+k^2+m^2}} -$$

$$- \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) k + \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) m\right]}{\sqrt{h^2+k^2+m^2}} = 0$$

Twierdzenie

Załóżmy, że dla funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ w pewnym otoczeniu punktu p istnieją pochodne cząstkowe I rzędu i są one ciągłe w punkcie p. Wtedy funkcja f jest różniczkowalna w punkcie p.

Dowód: Zrobimy dla funkcji $f(x,y)$ dwóch zmiennych:

$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k =$$

$$= \underbrace{f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h}_{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1 h, y_0)\cdot h} + \underbrace{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h,y_0)}_{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\Theta_2 k)\cdot k} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k$$

$$= \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0+\Theta_1 h, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right]}_{\text{ozn. } A}\cdot h + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+\Theta_2 k) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right]}_{\text{ozn. } B} k$$

Więc otrzymujemy:

$$|Ah + Bk| \leq |A|\cdot|h| + |B|\cdot|k| \leq$$

$$\leq |A|\sqrt{h^2+k^2} + |B|\sqrt{h^2+k^2} = (|A|+|B|)\sqrt{h^2+k^2}$$

mamy więc:

$$\frac{|f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)k|}{\sqrt{h^2+k^2}} \leq |A|+|B| \xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{} 0$$

Zatem otrzymujemy:

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0$$

co oznacza, że f jest różniczkowalne w punkcie (x_0,y_0).

$\Box$

Przykład Rozważmy funkcję $f(x,y) = \sin(xy)$ dla $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Mamy:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy) \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy).$$

Pochodne cząstkowe są ciągłe w każdym punkcie. Zatem $f(x,y)$ jest różniczkowalna w każdym punkcie. Zauważmy ponadto, że w punkcie $(0,0)$ zachodzi:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0,$$

więc otrzymujemy:

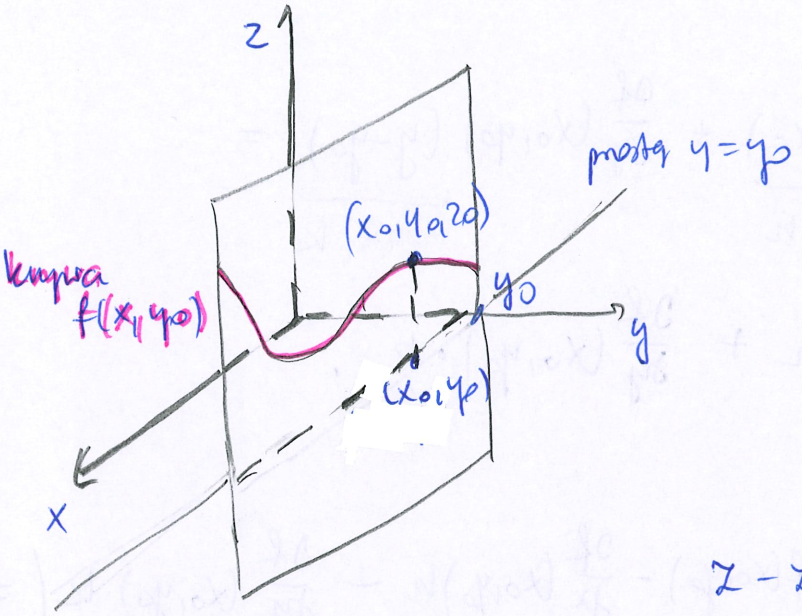
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sin(hk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Z różniczkowalności wynika zatem, że

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Interpretacja geometryczna różniczkowalności

Wykres funkcji $z = f(x,y)$ jest podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Rozważmy obraz prostej $y = y_0$ poprzez funkcję $f(x,y)$, czyli krzywą $(x, y_0) \to f(x, y_0)$. Ta krzywa znajduje się (leży) w płaszczyźnie pionowej $y = y_0$.



Szukamy stycznej do tej krzywej. Gdyby funkcja f zależała tylko od zmiennej x, to styczna miałaby równanie:

$$z - z_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ale rozważamy $(x, y_0) \to f(x, y_0)$, zatem równanie stycznej ma postać:

$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) \\ y = y_0 \end{cases}$$

równanie stycznej do krzywej $f(x, y)$ w punkcie (x_0, y_0, z_0)

Podobnie teraz rozważamy obraz prostej $x = x_0$ przez funkcję $f(x,y)$, czyli krzywą $(x_0, y) \to f(x_0, y)$. W tej sytuacji równanie stycznej ma postać:

$$\begin{cases} z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ x = x_0 \end{cases}$$

równanie stycznej do krzywej w punkcie (x_0, y_0, z_0)

Te dwie styczne rozpinają płaszczyznę o równaniu

$$\boxed{z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).} \quad (\pi)$$

Niech (x, y, z) będzie punktem na płaszczyźnie odpowiadającym punktowi $(x, y) \in D_f$, leżącym blisko punktu (x_0, y_0). Wtedy

$$z = z_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\underbrace{(x - x_0)}_{\text{ozn. } h} + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\underbrace{(y - y_0)}_{\text{ozn. } k} =$$

$$= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k.$$

Mamy więc:

$$|f(x, y) - z| = \left| f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot k \right| =$$

$$= \left| f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) k \right|.$$

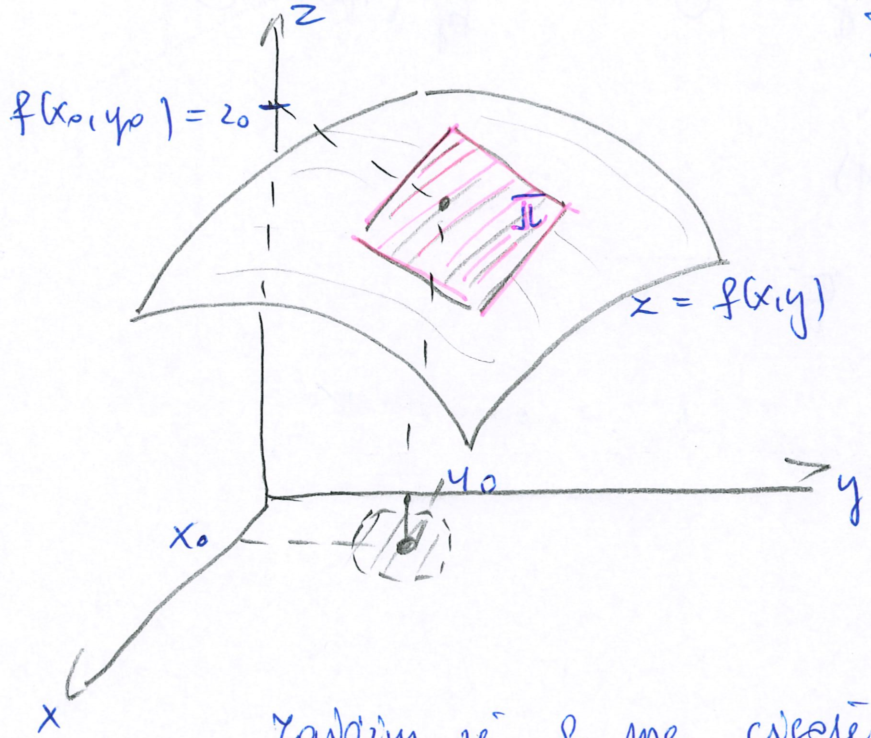
ZATEM - różniczkowalność oznacza, że iloraz odległości punktu wykresu $(x, y, f(x, y))$ i punktu (x, y, z) leżącego na płaszczyźnie (π), przez odległość między punktami (x_0, y_0), (x, y), jest MAŁY, gdy $(x, y) \to (x_0, y_0)$.

Zatem płaszczyzna (π) jest styczna do wykresu funkcji w punkcie (x_0, y_0, z_0), gdzie $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Interpretacja geometryczna funkcji różniczkowalnej w punkcie (dwóch zmiennych)

$f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^2$, otwarty, $p = (x_0, y_0) \in A$

Różniczkowalność funkcji f w punkcie (x_0, y_0) oznacza, że istnieje płaszczyzna styczna (niepionowa) do wykresu tej funkcji w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.



π – pł. styczna

Załóżmy, że f ma ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie (x_0, y_0).

Wtedy płaszczyzna styczna do powierzchni $f(x,y)$ w punkcie $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ma równanie:

$$\boxed{z - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)}$$

Przykład:

Napisać równanie płaszczyzny stycznej do funkcji

$$f(x,y) = \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+y^2} \quad \text{w punkcie } \left(1, 0, \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+y^2} \cdot \frac{1}{1+x^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\operatorname{arc\,tg} x}{(1+y^2)^2} \cdot 2y = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 0$$

$$z - \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}(x-1)$$

$$z = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

Twierdzenie 45

Jeżeli $f : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie p, to istnieje tylko jedno odwzorowanie liniowe $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dla którego zachodzi (*).

Dowód:

Przypuśćmy, że odwzorowanie liniowe $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ spełnia równość (*), to znaczy:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - S(h)}{h} = 0.$$

Oznaczmy $d(h) = f(p+h) - f(p)$. Wówczas mamy

$$T(h) - S(h) = T(h) - d(h) + d(h) - S(h),$$ zatem

$$\lim_{h \to 0} \frac{T(h) - S(h)}{|h|} = \lim_{h \to 0} \frac{T(h) - d(h)}{|h|} + \lim_{h \to 0} \frac{d(h) - S(h)}{|h|} =$$

$$= 0 + 0 = 0$$

Gdy $t \to 0$, to $tx \to 0$, więc mamy (dla $x \neq 0$)

$$0 = \lim_{t \to 0} \frac{T(tx) - S(tx)}{|tx|} = \frac{T(x) - S(x)}{|x|},$$

stąd $T(x) = S(x)$ dla każdego $x \in \mathbb{R}^n$.

[$T(0) = S(0) = 0$ dla każdego odwzorowania liniowego] $\square$

Lemat Jeśli $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jest odwzorowaniem liniowym, to istnieje stała $M > 0$ taka, że

$$\forall_{x \in \mathbb{R}^n} \quad |T(x)| \leq M|x| .$$

W szczególności, oznacza to, że T jest odwzorowaniem ciągłym.

Dowód: Oznaczmy przez $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ i przez $\underline{1}$ bazy kanoniczne w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ i $\mathbb{R}$. (czyli $e_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$). Wówczas dowolny wektor $x \in \mathbb{R}^n$ można przedstawić w postaci

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad \text{gdzie } x_i \in \mathbb{R} \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n.$$

Ponadto $T(e_i) = \alpha_i \cdot \underline{1}$ dla pewnego $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Zatem

$$T(x) = T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot (\alpha_i \cdot \underline{1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \alpha_i . \qquad (**)$$

Nierówność Schwarza: w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)$$

Na mocy nierówności Schwarza z zależności (**) dostajemy:

$$(|Tx|)^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot d_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right) =$$

$$= |x|^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} d_i^2\right)}_{\text{stała } M^2} |x|^2$$

Stąd:

$$|T(x)| \leq M\,|x|,$$

gdzie $M = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2}$. $\square$

Twierdzenie 46:

Jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalne w punkcie $p \in A$, to jest w tym punkcie ciągła.

Dowód: Oznaczmy: $r(h) = f(p+h) - f(p) - T(h)$

Wtedy:

$$f(p+h) = f(p) + T(h) + r(h).$$

Ponieważ odwzorowanie T jest ciągłe oraz $\frac{|r(h)|}{|h|} \to 0$, gdy $h \to 0$, więc otrzymujemy:

$$\lim_{h\to 0} f(p+h) = f(p),$$

$\square$

Definicja Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na zbiorze A, gdy f jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru A.

Podstawowe twierdzenia o funkcjach różniczkowalnych

Twierdzenie (o różniczkowaniu funkcji złożonej) $\boxed{\mathrm{I}}$

Niech $f: A \to \mathbb{R}$ będzie różniczkowalna w punkcie $p \in A$. Załóżmy ponadto, że funkcja g odwzorowuje pewien zbiór otwarty zawierający $f(A)$ w przestrzeni $\mathbb{R}$ i jest różniczkowalna w punkcie $f(p)$. Wówczas funkcja złożona $g \circ f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie p i zachodzi równość

$$(g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \circ \overbrace{f'(p)}^{T}$$

Twierdzenie (o różniczkowaniu funkcji złożonej) (II)

Załóżmy, że funkcje $f_1, f_2, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \supset D \to \mathbb{R}$ mają ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie $p \in D$. Załóżmy też, że funkcja $g : \mathbb{R}^m \supset G \to \mathbb{R}$ jest określona na zbiorze G takim, że $\forall_{x \in D} \ (f_1(x), \ldots, f_m(x)) \in G$ oraz g ma ciągłe pochodne cząstkowe w punkcie $(f_1(p), \ldots, f_m(p))$.

Wtedy funkcja złożona $h : D \to \mathbb{R}$ określona wzorem

$$h(p) = g(f_1(p), f_2(p), \ldots, f_m(p))$$

jest różniczkowalna w punkcie p.

Twierdzenie (o wartości średniej)

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i niech $p, p+h$ będą takimi punktami zbioru A, że odcinek je łączący zawiera się w tym zbiorze. Jeżeli funkcja $f : A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna (na zbiorze A), to istnieje $\theta \in (0,1)$ takie, że

$$f(p+h) - f(p) = f'(p + \theta h) \cdot h$$

Dowód Rozważmy funkcję złożoną

$$F(t) = f(p+th), \quad \text{gdzie } t \in [0,1].$$

Wtedy, na podstawie założenia oraz twierdzenia o różniczkowaniu funkcji złożonej (I) otrzymujemy, że funkcja F spełnia założenia twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej:

Tw. Lagrange'a:

Jeśli funkcja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ jest

- ciągła w przedziale $[a,b]$
- różniczkowalna w przedziale (a,b)

to istnieje $c \in (a,b)$ taki, że:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Istnieje więc $\theta \in (0,1)$ taka, że

$$\frac{F(1)-F(0)}{1} = F'(\theta).$$

Zauważmy, że: $F(1) = f(p+h)$

$F(0) = f(p)$

oraz $F'(\theta) = f'(\theta+th)\cdot h$.

Zatem dla θ mamy:

$$f(p+h) - f(p) = f'(\theta+th)\cdot h.$$

$\square$

Przypomnijmy, że w prz. $\mathbb{R}^n$ zdefiniowaliśmy **OBSZAR** jako zbiór otwarty i spójny.

Natomiast zbiór $A \subset X$, X jest przestrzenią metryczną (w szczególności $X = \mathbb{R}^n$) nazywamy ŁUKOWO SPÓJNYM, gdy dla dowolnych punktów $p_1, p_2 \in A$ istnieje (ciągła) droga $\gamma : [0,1] \to A$ taka, że $\gamma(0) = p_1$ i $\gamma(1) = p_2$.

Twierdzenie Zbiór łukowo spójny jest spójny.

Przypomnienie: przestrzeń metryczna jest spójna, gdy nie jest sumą dwóch zbiorów niepustych, rozłącznych i otwartych.

Podzbiór przestrzeni metrycznej nazywamy zbiorem spójnym, gdy jest przestrzenią spójną w metryce indukowanej.

Uwaga 1) Dowolna kula w $\mathbb{R}^n$ jest zbiorem łukowo spójnym.

2) Twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe.

ALE: w przestrzeniach $\mathbb{R}^n$ dla zbiorów otwartych pojęcia spójności i łukowej spójności pokrywają się.

Twierdzenie W przestrzeni $\mathbb{R}^n$ obszar jest zbiorem łukowo spójnym.

Dowód:

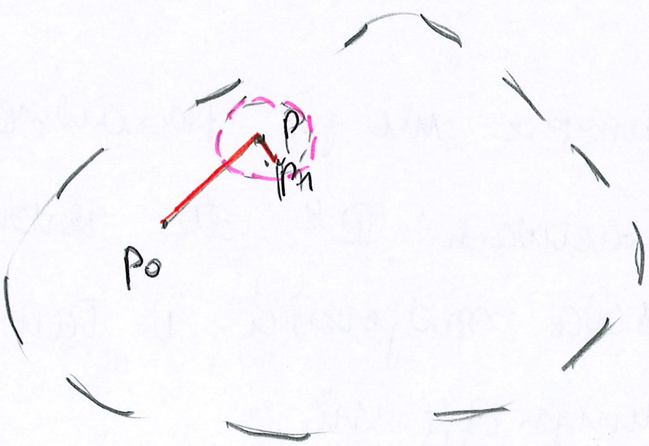
Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym i spójnym. Mamy pokazać, że dowolne dwa punkty leżące w obszarze A można połączyć drogą. Wybierzmy dowolny punkt $p_0 \in A$. Niech

$$B = \{ p \in A : \text{istnieje droga } \gamma : [0,1] \to A \text{ taka, że } \gamma(0) = p_0,\ \gamma(1) = p \}.$$

Zbiór B jest niepusty, gdyż $p_0 \in B$. Jest on też otwarty, gdyż jeśli $p \in A$ to istnieje kula $B_r(p) \subset A$ i jeśli $\gamma : [0,1] \to A$ jest drogą łączącą punkty p_0 i p, to dla dowolnego $p_1 \in B_r(p)$ droga

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \gamma(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}), \\ p + (2t-1)(p_1 - p), & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \qquad (*)$$

leży w A i łączy punkt p_0 z punktem p_1.



Czyli każdy punkt p_1 kuli $B_r(p)$ należy do zbioru B, zatem $B_r(p) \subset B$.

Wreszcie, zbiór $A \setminus B$ jest również zbiorem otwartym. Aby ten fakt wykazać, weźmy dowolny punkt $p \in A \setminus B$. Wtedy istnieje kula $B_r(p)$ taka, że $B_r(p) \subset A$ i $B_r(p) \cap B = \phi$ — GDYBY TAK NIE BYŁO, to istniałby punkt $p_1 \in B_r(p) \cap B$ i w podobny sposób, jak w (*) wskazalibyśmy drogę leżącą w A i łączącą punkty p_0 i p, co jest niemożliwe.

Zatem mamy rozkład zbioru $A = B \cup A \setminus B$ na sumę dwóch zbiorów otwartych i rozłącznych oraz wiemy, że $B \neq \phi$. Stąd musi być: $A \setminus B = \phi$ i w konsekwencji

$$A = B.$$

$\square$

Wniosek Niech $G \subset \mathbb{R}^n$ będzie obszarem. Jeśli funkcja $f : G \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna na zbiorze G i jej pochodna jest stale równa zero, to f jest funkcją stałą.