Informatyka
Wykład 10

Całka oznaczona. Zastosowania całki oznaczonej.

Niech $[a,b]$ będzie odcinkiem na $\mathbb{R}$.

Przyjmujemy oznaczenia:

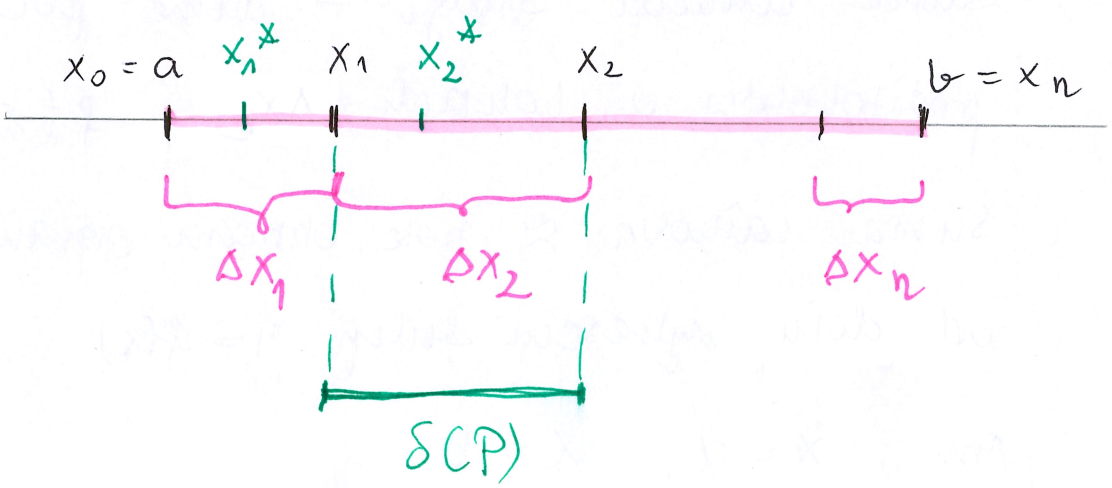
$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ – podział odcinka $[a,b]$ na n części, $(n \in \mathbb{N})$, przy czym

$$a = x_0 < x_1 < x_2 \dots < x_n = b$$

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ – długość k-tego odcinka podziału P, gdzie $1 \le k \le n$

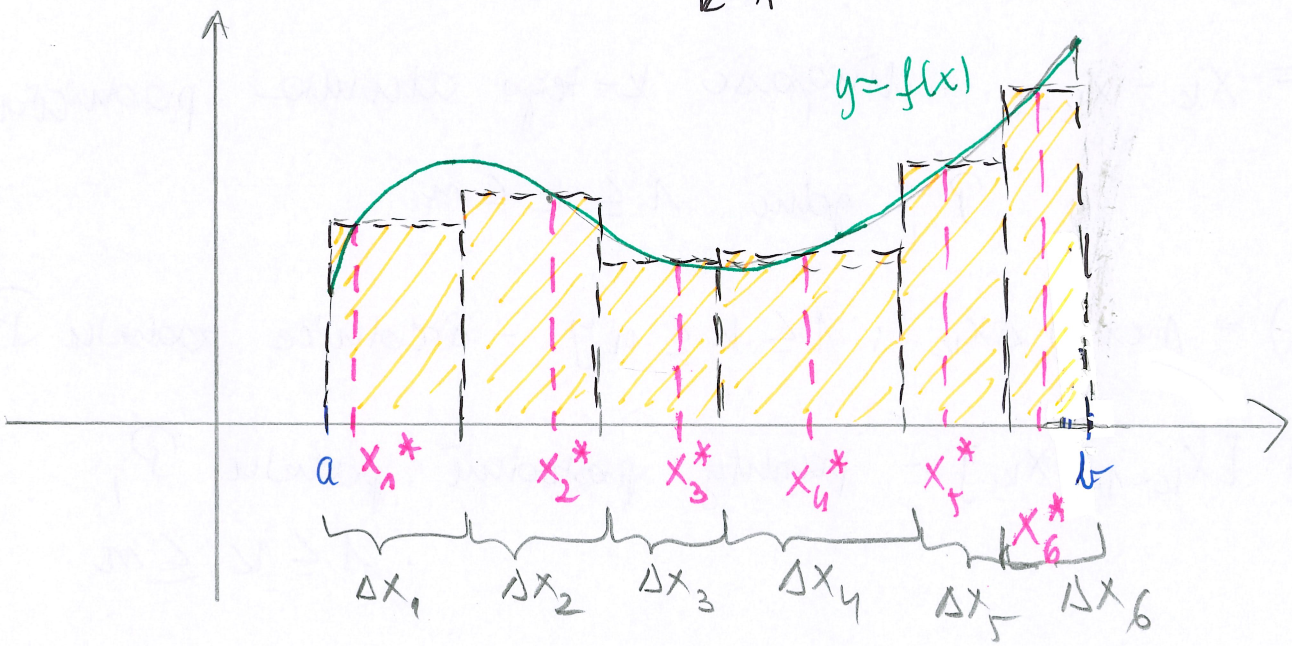
$\delta(P) = \max\{\Delta x_k : 1 \le k \le n\}$ – średnica podziału P

$x_k^* \in [x_{k-1}, x_k]$ – punkty pośrednie podziału P, $1 \le k \le n$



Definicja Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$ oraz niech $\mathcal{P}$ będzie podziałem tego przedziału. Sumą całkową funkcji f odpowiadającą podziałowi $\mathcal{P}$ oraz punktom pośrednim x_k^*, gdzie $1 \le k \le n$ tego podziału nazywamy liczbę

$$S(f,\mathcal{P}) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*) \cdot \Delta x_k .$$



suma całkowa funkcji – suma pól prostokątów o bokach dł. Δx_k, $f(x_k^*)$.

Suma całkowa $\approx$ pole obszaru ograniczonego osią OX, wykresem funkcji $y=f(x)$ i prostymi: $x=a$, $x=b$.

Definicja Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a,b]$. Całkę oznaczoną Riemanna funkcji f na przedziale $[a,b]$ definiujemy wzorem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta(P)\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} f(x_k^*)\,\Delta x_k,$$

o ile granica powyższa jest właściwa ani nie zależy od sposobu podziałów P przedziału $[a,b]$ ani od wyboru punktów pośrednich x_k^*.

Ponadto przyjmujemy:

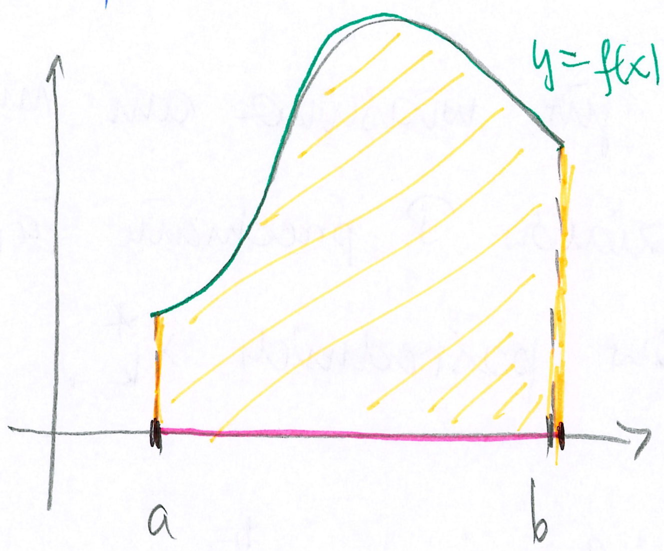
$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{oraz} \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx,$$

gdy $a < b$.

Funkcję f, dla której istnieje całka oznaczona Riemanna na $[a,b]$, nazywamy funkcją całkowalną na $[a,b]$.

Interpretacja geometryczna całki oznaczonej

Niech f będzie ograniczona i ciągła na $[a,b]$, ponadto niech f będzie nieujemna na $[a,b]$. Oznaczmy przez D trapez krzywoliniowy ograniczony wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x=a$, $x=b$:



trapez krzywoliniowy

pole trapezu krzywoliniowego:

$$|D| = \int_a^b f(x)\,dx$$

Podstawowe twierdzenia

Twierdzenie:

Funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ jest na nim całkowalna.

Twierdzenie (Newtona - Leibniza, I główne twierdzenie rachunku całkowego)

Jeżeli funkcja f jest ciągła na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną funkcji f na tym przedziale.

Zamiast pisać $F(b) - F(a)$, piszemy $F(x)\Big|_a^b$ lub $\Big[F(x)\Big]_a^b$.

Przykład Oblicz całkę: $\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx$

Obliczamy całkę nieoznaczoną:

$\int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C$, bierzemy $F(x) = -e^{-x}$, mamy

$$\int_{-1}^{2} e^{-x}\,dx = \Big[-e^{-x}\Big]_{-1}^{2} = -e^{-2} + e^{+1} = e - \frac{1}{e^2} = \frac{e^3-1}{e^2}$$

Twierdzenie (o liniowości całki oznaczonej)

Jeśli funkcje f i g są całkowalne na $[a,b]$, to

1) $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

2) $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$

3) $\int_a^b c\cdot f(x)\,dx = c\cdot\int_a^b f(x)\,dx$, $c\in\mathbb{R}$.

Metody obliczania całek oznaczonych

Twierdzenie (o całkowaniu przez części)

Jeśli funkcje f i g mają ciągłe pochodne na $[a,b]$, to:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$

Przykład: Obl. całkę $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$

$$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx = \left\{\begin{matrix} f=x & f'=1 \\ g'=\sin x & g=-\cos x\end{matrix}\right\} = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} +$$

$$+\int_0^{\pi}\cos x\,dx = \left[-x\cos x\right]_0^{\pi} + \left[\sin x\right]_0^{\pi} = (-1)\cdot(-\pi) - 0 + \sin\pi - \sin 0 = \underline{\underline{\pi}}$$

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli:

1) funkcja $g : [\alpha, \beta] \xrightarrow{NA} [a,b]$ ma ciągłą pochodną na $[\alpha, \beta]$

2) $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$

3) funkcja f jest ciągła na $[a,b]$,

to:
$$\int_{\alpha}^{b} f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)\, dt$$

Przykład Oblicz całkę $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1}\, dx = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2 \\ e^x = t^2 + 1 \\ x = \ln(t^2+1) \\ dx = \frac{2t\, dt}{t^2+1} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = \ln 2 \Rightarrow t = 1 \end{array} \right| = \int_0^1 t \, \frac{2t}{t^2+1}\, dt =$$

$$= 2\int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = 2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\, dt = 2\int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+t^2}\right) dt =$$

$$= 2\left[t - \operatorname{arc\,tg} t\right]_0^1 = 2\left[1 - \operatorname{arc\,tg} 1 - 0\right] =$$

$$= 2\left[1 - \frac{\pi}{4}\right] = 2 - \frac{\pi}{2}$$

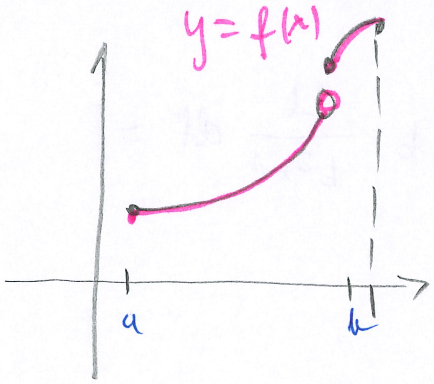
Własności całki oznaczonej

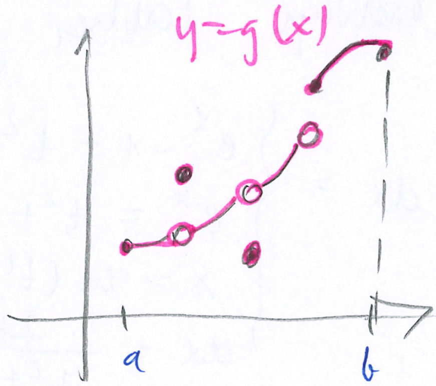
Twierdzenie

Niech funkcja f będzie całkowalna na $[a,b]$ oraz niech funkcja g różni się od f tylko w skończonej liczbie punktów tego przedziału. Wtedy g też jest całkowalna na $[a,b]$ oraz

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

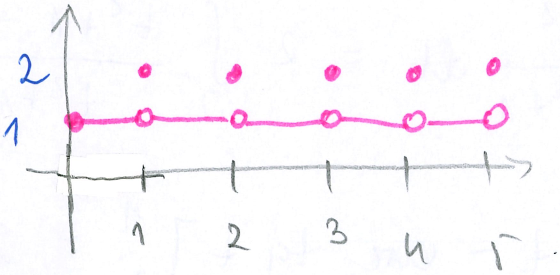
np





Przykład Oblicz całkę $\int_0^{100} g(x)\,dx$, gdzie

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{dla } x \notin \mathbb{N} \\ 2, & \text{dla } x \in \mathbb{N} \end{cases}$$



$$\int_0^{100} g(x)\,dx = \int_0^{100} 1\,dx = x\Big|_0^{100} = \underline{\underline{100}}$$

Twierdzenie

Jeżeli f jest całkowalna na $[a,b]$ oraz $c \in [a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Przykład

$$\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx = \int_{-1}^{2} |x-2|\,dx + \int_{2}^{3} |x-2|\,dx = \int_{-1}^{2} (2-x)\,dx$$

$$+ \int_{2}^{3} (x-2)\,dx =$$

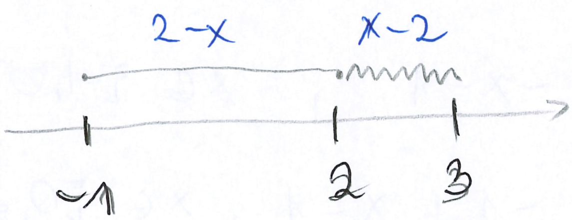
$$= \left[2x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{2} + \left[\tfrac{1}{2}x^2 - 2x\right]_{2}^{3} =$$

$$= 4 - 2 - \left(-2 - \tfrac{1}{2}\right) + \left[\tfrac{9}{2} - 6\right] - \left[2 - 4\right] =$$

$$= 2 + \tfrac{5}{2} + \tfrac{9}{2} - 6 + \left(-\tfrac{3}{2}\right) + 2 =$$

$$= \frac{9+5-3}{2} - 2 = \frac{7}{2}$$

$$|x-2| = \begin{cases} x-2, & x-2 \geq 0 \\ 2-x, & x-2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-2, & x \geq 2 \\ 2-x, & x < 2 \end{cases}$$



Definicja

Niech funkcja f będzie całkowalna na $[a,b]$. Funkcję

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt,$$

gdzie $x\in[a,b]$, nazywamy funkcją górnej granicy całkowania.

np

$$f(x)=\begin{cases}-1, & \text{dla } x\le 0\\ 1, & \text{dla } x>0\end{cases},\qquad [a,b]=[-1,2]$$

$$F(x)=\int_{-1}^x f(x)\,dx=\begin{cases}\int_{-1}^x(-1)\,dt, & x\in[-1,0]\\ \int_{-1}^0(-1)\,dx+\int_0^x 1\,dt, & x\in[0,2]\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}-t\Big|_{-1}^x, & x\in[-1,0]\\ -t\Big|_{-1}^0+t\Big|_1^x, & x\in[0,2]\end{cases}=$$

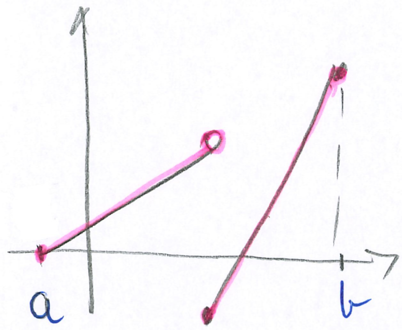
$$=\begin{cases}-x-1, & x\in[-1,0]\\ \underbrace{-1+x-1}_{x-2}, & x\in[0,2]\end{cases}$$

Twierdzenie

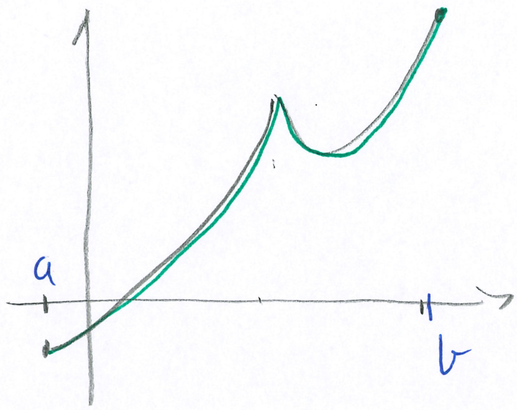
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

gdzie $x \in [a,b]$, jest ciągła na $[a,b]$.



funkcja całkowalna
$y = f(x)$



funkcja ciągła
$y = F(x)$

Operacja całkowania (ze zmienną granicą całkowania) przekształca funkcje całkowalne na $[a,b]$ w funkcje ciągłe na $[a,b]$.

Twierdzenie (II główne twierdzenie rachunku całkowego)

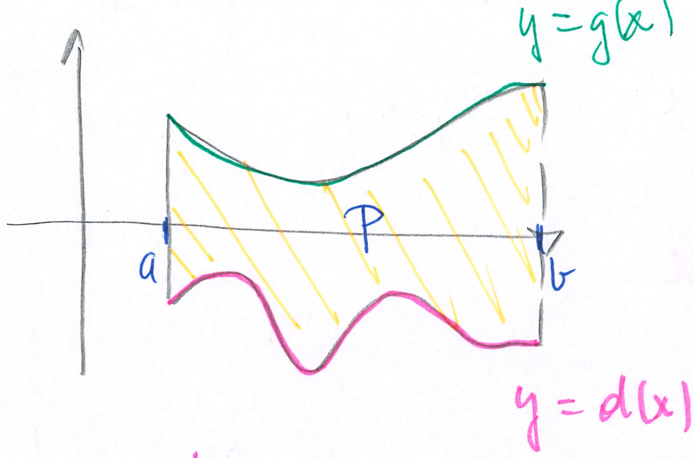
Jeżeli funkcja f jest całkowalna na $[a,b]$ oraz ciągła w punkcie $x_0 \in [a,b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

ma pochodną właściwą w x_0 oraz $F'(x_0) = f(x_0)$.

Zastosowania geometryczne całki oznaczonej

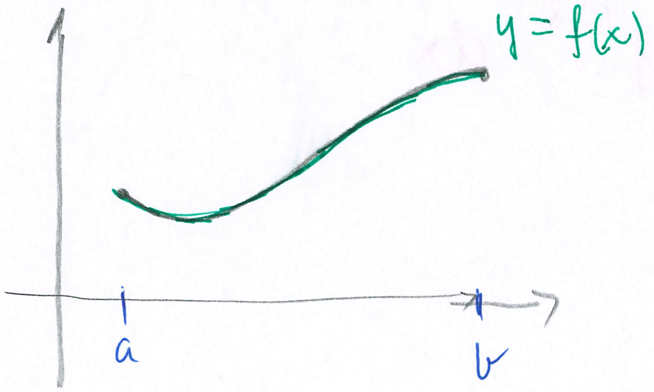
1. Pole obszaru zawartego między wykresami dwóch funkcji ciągłych



Zakładamy, że $g(x) \geq d(x)$ w przedziale $[a,b]$

$$P = \int_a^b [g(x) - d(x)]\,dx$$

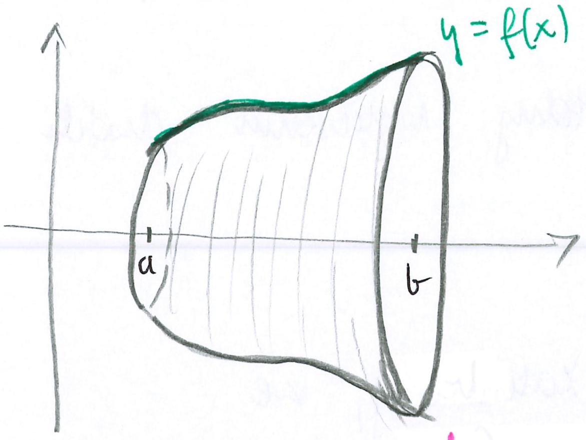
2. Długość łuku



Zakładamy, że f ma ciągłą pochodną w przedziale $[a,b]$

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$$

3. Objętość bryły obrotowej



Zakładamy, że $y=f(x)$ jest funkcją ciągłą i nieujemną w przedziale $[a,b]$.

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx$$

4. Pole powierzchni obrotowej

Zakładamy, że $y=f(x)$ jest ciągła i nieujemna na $[a,b]$. Ponadto f ma ciągłą pochodną w $[a,b]$.

$$S = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1+(y')^2} \, dx$$

Przykład Obliczyć pole obszaru ograniczonego krzywymi

$$4y = x^2, \quad y = \frac{8}{x^2+4}.$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{4}x^2 \\ y = \frac{8}{x^2+4} \end{cases} \qquad \frac{x^2}{4} = \frac{8}{x^2+4}$$

$$x^2(x^2+4) = 32$$

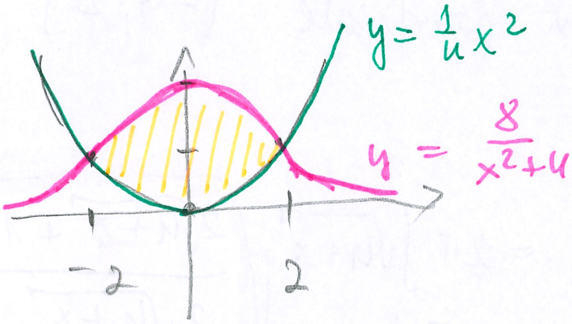
$$x^4 + 4x^2 - 32 = 0 \qquad x^2 = t, \quad t \geq 0$$

$$t^2 + 4t - 32 = 0 \qquad \sqrt{\Delta} = \sqrt{16 + 4\cdot 32} = \sqrt{144} = 12$$

$$t_1 = \frac{-4-12}{2} = -8 < 0$$

$$t_2 = \frac{-4+12}{2} = 4, \quad x^2 = 4$$

$$x = 2 \lor x = -2$$



$$P = \int_{-2}^{2} \left(\frac{8}{x^2+4} - \frac{1}{4}x^2 \right) dx =$$

$$\int \frac{8}{x^2+4}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2t \\ dx = 2dt \end{array} \right| = 8\int \frac{2\,dt}{4(t^2+1)} = 4 \operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= 4 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} + C$$

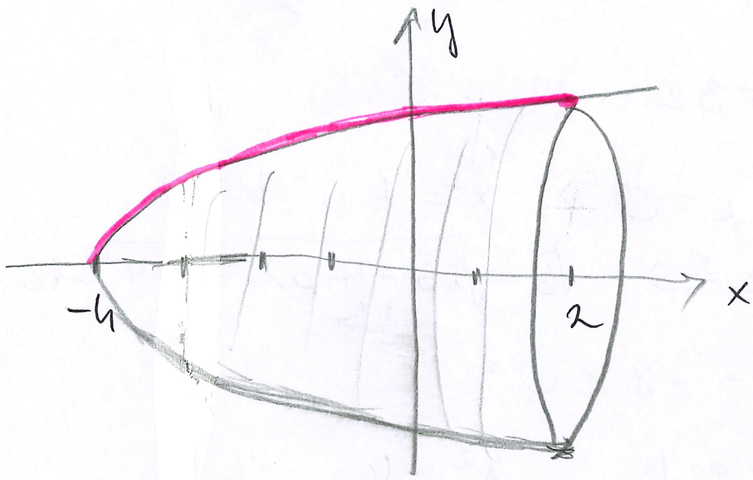
$$\int \frac{1}{4}x^2\,dx = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}x^3 + C = \frac{1}{12}x^3 + C$$

$$= \left[4 \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{2} \right]_{-2}^{2} - \left[\frac{1}{12}x^3 \right]_{-2}^{2} =$$

$$= 4 \operatorname{arc\,tg} 1 - 4 \operatorname{arc\,tg}(-1) - \left[\frac{1}{12}\cdot 8 - \frac{1}{12}(-8) \right] = 4\cdot\frac{\pi}{4} + 4\cdot\left(+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$- \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] = \underline{2\pi - \frac{4}{3}}$$

Przykład Oblicz pole powierzchni obrotowej powstałej z obrotu wykresu funkcji $f(x)=\sqrt{4+x}$ dookoła Ox w przedziale $[-4,2]$.



Spr. założenia:

$f(x)=\sqrt{4+x}$ jest ciągła i nieujemna na $[-4,2]$, ponadto:

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{4+x}}$ jest ciągła w przedziale $[-4,2]$.

$$S = 2\pi\int_{-4}^{2} y\sqrt{1+(y')^2}\,dx =$$

$$= 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{4+x}}\right)^2}\,dx = 2\pi\int_{-4}^{2}\sqrt{4+x}\sqrt{1+\frac{1}{4(4+x)}}$$

$$= 2\pi\int_{-4}^{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4+x}\sqrt{\frac{4(4+x)+1}{4(4+x)}}\,dx =$$

$$= 2\pi\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2}\int_{-4}^{2}\sqrt{16+4x+1}\,dx = \frac{\pi\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{6}\left(\sqrt{4x+17}\right)^3\Big|_{-4}^{2} =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{12}\left(\sqrt{25}^3-\sqrt{1}^3\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{12}(75-1) = \boxed{\frac{74\sqrt{2}\,\pi}{12}}$$

$$\int\sqrt{4x+17}\,dx = \left|\begin{array}{l} 4x+17=t^2 \\ 4\,dx = 2t\,dt \\ dx = \frac{1}{2}t\,dt \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int t^2\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{1}{3}t^3 + C =$$

$$= \frac{1}{6}\left(\sqrt{4x+17}\right)^3 + C$$