# Gradient funkcji n zmiennych

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym.

Definicja 38: Gradientem funkcji $f : A \to \mathbb{R}$ w punkcie $p \in A$ nazywamy wektor

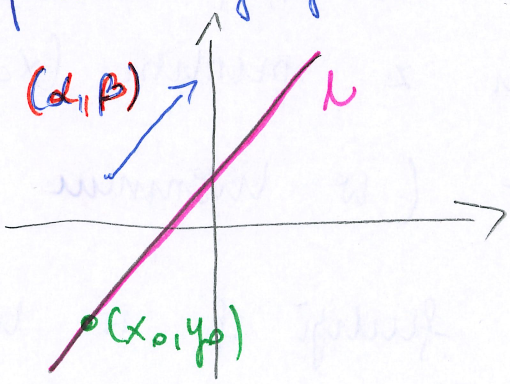
$$\underbrace{\operatorname{grad} f(p)}_{\text{inaczej: } \nabla f(p)} = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

nabla

# Pochodna kierunkowa

Niech $l$ będzie prostą na płaszczyźnie XOY określoną równaniem parametrycznym:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$




gdzie $\alpha^2 + \beta^2 = 1$

(czyli wektor $(\alpha, \beta)$ ma długość 1), zaś $t \in \mathbb{R}$.

Wektor $(\alpha, \beta)$ nazywa wektorem kierunkowym prostej $l$.

Niech $f$ będzie funkcją określoną w zbiorze otwartym $A \subset \mathbb{R}^2$ i niech $l$ będzie prostą na płaszczyźnie $xOy$ o wektorze kierunkowym $(\alpha, \beta)$

Definicja 39: Pochodną kierunkową funkcji $f$ w punkcie $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ w kierunku prostej $l$ (lub w kierunku wektora $(\alpha, \beta)$) nazywamy granicę (o ile istnieje i jest właściwa):

$$\frac{\partial f}{\partial l}(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\parallel$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$$

Licznik powyższego ułamka jest równy przyrostowi wartości funkcji $f$, gdy jej argument ulega przesunięciu z punktu $(x_0, y_0)$ w kierunku wektora $v$ (w kierunku prostej $l$), zatem

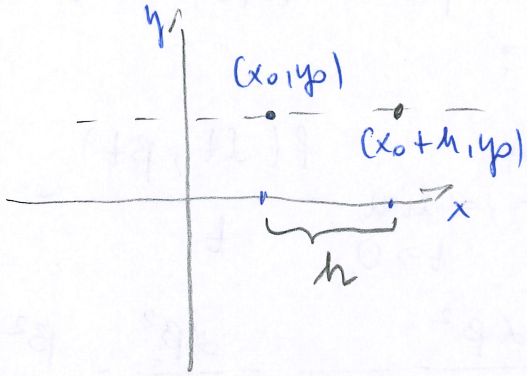
pochodna funkcji $f$ w kierunku prostej $l$ określa szybkość wzrostu tej funkcji w kierunku $l$.

Jeśli $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, czyli $l \parallel Ox$, to $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

pochodna cząstkowa po $x$

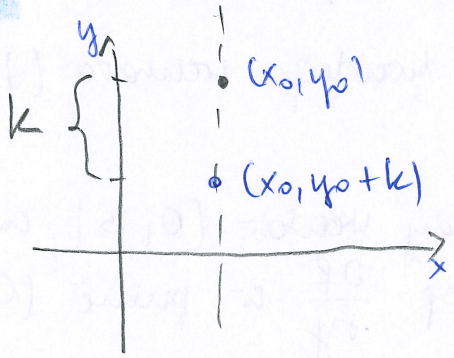
Jeśli $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, czyli $l \parallel Oy$, to $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

pochodna cząstkowa po $y$



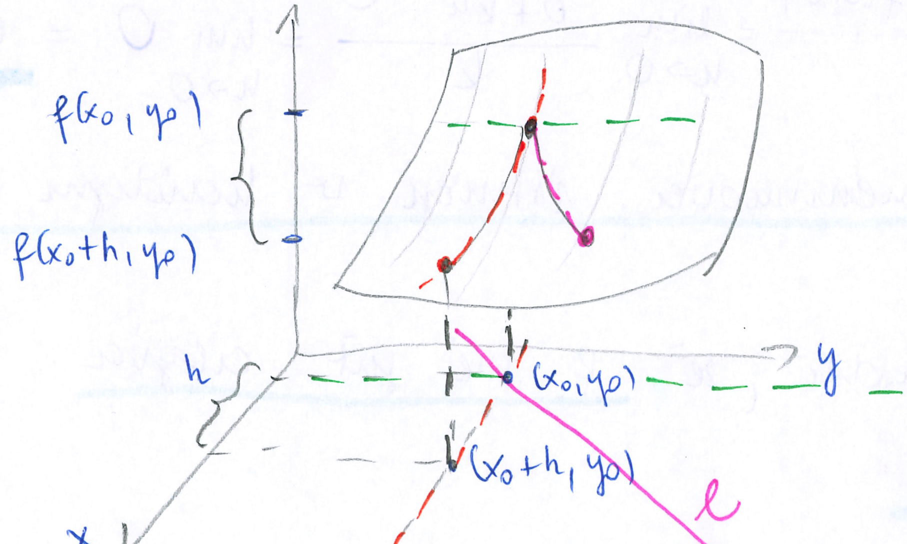

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

pochodna kierunkowa w kierunku osi $Ox$
= pochodna cząstkowa po $x$




$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

pochodna kierunkowa w kierunku osi $Oy$
= pochodna cząstkowa po $y$




pochodna kierunkowa w kierunku prostej $l$

UWAGA Funkcja może mieć w punkcie $p_0$ pochodne kierunkowe w każdym kierunku i nie być ciągła w $p_0$.

Przykład: Rozważmy funkcję $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^4 = 0 \end{cases}$

Obliczmy pochodną kierunkową funkcji $f$ w punkcie $(0,0)$ w ustalonym kierunku prostej $l \parallel (\alpha, \beta)$:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+\alpha t, 0+\beta t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{f(\alpha t, \beta t)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t \beta^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2}\alpha\beta^2}{\cancel{t^2}(\alpha^2+\beta^4 t^2)} = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

Zatem pochodna kierunkowa istnieje dla każdego wektora $(\alpha, \beta)$ gdzie $\alpha^2+\beta^2>0$, o ile tylko $\alpha \neq 0$.

Sprawdźmy istnienie dla $\alpha = 0$, mamy wtedy wektor $(0, \beta)$, czyli sprawdźmy istnienie pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{\frac{0\cdot k^2}{0+k^4} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

Zatem pochodna kierunkowa istnieje w każdym kierunku.

Można jednak sprawdzić, że $f$ nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

W tym celu obliczymy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Najpierw weźmy ciąg $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$, mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2+y_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{0\cdot\frac{1}{n^2}}{0+\frac{1}{n^4}} = 0$$

Dalej, weźmy ciąg $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, wtedy mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2+y_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^4}{2} = \frac{1}{2}$$

Zatem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ nie istnieje. W takim razie funkcja $f$ nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

## Twierdzenie 40:

Niech $A \subset \mathbb{R}^2$. Załóżmy, że funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ ma w otoczeniu $O(p_0, r) \subset A$ ciągłe pochodne cząstkowe I rzędu. Wówczas pochodna kierunkowa w punkcie $p_0$ istnieje w każdym kierunku $l \parallel (\alpha, \beta)$ i jest określona wzorem:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(p_0) = \alpha \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(p_0) + \beta \frac{\partial f}{\partial y}(p_0).$$

Zatem:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial l}(p_0) = (\alpha, \beta) \circ \operatorname{grad} f(p_0)}$$

**Przykład**: Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x,y) = xy$ w punkcie $p_0 = (1,2)$ w kierunku prostej o wektorze kierunkowym $(\alpha, \beta) = (2,1)$

Spr. założenia Tw. 40: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy$,

$\frac{\partial f}{\partial x} = y$, $\frac{\partial f}{\partial y} = x$ – są ciągłe w każdym otoczeniu punktu $p_0 = (1,2)$, zatem pochodna kierunkowa w punkcie $p_0$ istnieje w każdym kierunku

$\frac{\partial f}{\partial x}(p_0) = 2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 1$

Wektor $(2,1)$ nie ma długości 1, gdyż $|(2,1)| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

Unormujemy go, tzn. utworzymy wektor $u \parallel v$ o tym samym zwrocie, ale długości 1: $u = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \circ (2,1) = \frac{4}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

# Pochodna kierunkowa – cd

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym, niech $f : A \to \mathbb{R}$.

**Definicja 41**: Pochodną kierunkową funkcji $f$ w kierunku wektora $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$!

czyli $v$ – wektor jednostkowy

w punkcie $p_0 = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ nazywamy granicę (o ile istnieje i jest właściwa):

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(p_1 + t\alpha_1, p_2 + t\alpha_2, \dots, p_n + t\alpha_n) - f(p_1, \dots, p_n)}{t}$$

w skrócie : $\lim_{t \to 0} \frac{f(p + tv) - f(p)}{t}$

**Twierdzenie 42**

Jeśli funkcja $f$ ma w otoczeniu $O(p_0, r) \subset A$ ciągłe pochodne cząstkowe I rzędu, to pochodna kierunkowa w punkcie $p_0$ istnieje w każdym kierunku $v = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ i jest określona wzorem

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = \alpha_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(p_0) + \alpha_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(p_0) + \dots + \alpha_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(p_0)$$

czyli

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(p_0) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \circ \operatorname{grad} f(p_0) = v \circ \operatorname{grad} f(p_0)}$$

<u>Uwaga</u> Jeśli $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ jest bazą kanoniczną przestrzeni $\mathbb{R}^n$, to pochodna kierunkowa funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ w kierunku wektora $v = e_i$ jest pochodną cząstkową względem zmiennej $x_i$, czyli

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial e_i}(p_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(p_0)}$$

**Przykład**: Niech $f(x,y,z) = x^2 - 2yz$, niech $p_0 = (1,0,-1)$ oraz niech $l$ będzie prostą o wektorze kierunkowym $v = \left(\frac{1}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{5}}{3}\right)$. Obliczymy pochodną kierunkową funkcji $f$ w punkcie $p_0$ w kierunku prostej $l$:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(p_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1+\frac{1}{3}t,\ 0-\frac{\sqrt{3}}{3}t,\ -1+\frac{\sqrt{5}}{3}t\right) - f(1,0,-1)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\left(1+\frac{1}{3}t\right)^2 - 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}t\right)\left(-1+\frac{\sqrt{5}}{3}t\right) - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{1 + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}t^2 - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{3}t - \frac{\sqrt{15}}{9}t^2\right) - 1}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1} + \frac{2}{3}t + \frac{1}{9}t^2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}\,t + \frac{2}{9}\sqrt{15}\,t^2 \cancel{-1}}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{9}t - \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{2}{9}\sqrt{15}\,t\right) = \frac{2}{3}\left(1-\sqrt{3}\right)$$

(zrobić po Definicji 4.1)

# Różniczkowalność funkcji $n$ zmiennych

Przypomnijmy, że funkcja $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $x\in(a,b)$, gdy istnieje liczba rzeczywista $f'(x)$ taka, że:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x). \qquad \text{(A)}$$

Mamy:

$$\text{(A)} \iff \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)=0$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-f'(x)\right]=0$$

$$\iff \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-f'(x)\cdot h}{h}=0$$

$\iff$ istnieje funkcja liniowa $T:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $T(h)=f'(x)\cdot h$ (stała: $f'(x)$) taka, że:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)-T(h)}{h}=0$$

Ta uwaga pozwoli nam uogólnić pojęcie różniczkowalności na przypadek funkcji $f:A\to\mathbb{R}$, $A\subset\mathbb{R}^n$.

**Def 43** Niech $A$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^n$, niech $p\in A$. Funkcja $f:A\to\mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $p$, gdy istnieje odwzorowanie liniowe $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ takie, że:

$$\boxed{\lim_{h\to 0}\frac{f(p+h)-f(p)-T(h)}{|h|}=0} \qquad (*)$$

Uwaga: $|h|$ – ozn. długość wektora $h$ (tak jak było we algebrze liniowej), czyli: $h=(h_1, h_2, \dots, h_n)$, to

$$|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_n^2}.$$

Definicję 67 można uogólnić dla funkcji $f: A \to \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^m$ – wrócimy do tego, gdy wystarczy czasu.

Zapiszmy Definicję 67 w szczególnym przypadku – dla $m=2$:

**Def. 44**: Niech $A$ będzie otwartym podzbiorem przestrzeni $\mathbb{R}^2$ i niech $(x_0, y_0) \in A$. Funkcja $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $(x_0, y_0)$, gdy istnieją pochodne cząstkowe $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ oraz spełniony jest warunek:

$$\boxed{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot h - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.}$$

Analogicznie możemy zapisać warunek dla funkcji trzech zmiennych.

Znamy już pojęcie pochodnych cząstkowych oraz ogólnej, kierunkowych. Po co więc wprowadzamy definicję funkcji różniczkowalnej? Bo istnienie pochodnych cząstkowych funkcji $f$ w punkcie $P$ nie gwarantuje ciągłości funkcji $f$ w tym punkcie.

Wróćmy do definicji 43:

$f: A \to \mathbb{R}$, $p \in A$

$f$ jest różniczkowalna w $p$ $\iff$ ist. odwzorowanie liniowe $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ że:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p) - T(h)}{|h|} = 0$$

Odwzorowanie liniowe $T$ nazywa się pochodną zupełną lub różniczką funkcji $f$ w punkcie $p$. Odwzorowanie $T$ oznaczamy więc: $f'(x)$ lub $df(x)$. W dalszym ciągu zamiast mówić (i pisać) pochodna zupełna będziemy krótko mówić: $\boxed{\text{pochodna}}$.

Uwaga: jeśli w definicji 43 $h \in \mathbb{R}^n$ jest dostatecznie bliskie 0, to punkt $x+h \in A$, bo $A$ jest zbiorem otwartym. Zatem $f(x+h)$ ma sens oraz $f(x+h) \in \mathbb{R}$.

Z poniższego twierdzenia wynika, że pochodna odwzorowania jest wyznaczona jednoznacznie.

## Twierdzenie 45

Jeśli funkcja $f$ jest różniczkowalna w punkcie $p$, to istnieje tylko jedno odwzorowanie liniowe $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dla którego zachodzi (*).

**Twierdzenie 46:** !!

Jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $p$, to jest w tym punkcie ciągła.

Oczywiście twierdzenie odwrotne nie jest prawdziwe – funkcja ciągła w $p$ może nawet nie mieć pochodnych cząstkowych w punkcie $p$.

Dowód:

Załóżmy, że $f: A \to \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie $p$, co oznacza z definicji 43, że istnieje $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, takie, że:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overbrace{f(p+h) - f(p) - T(h)}^{\text{ozn. } r(h)}}{|h|} = 0$$

czyli $f(p+h) - f(p) - T(h) = r(h)$

$$f(p+h) = f(p) + T(h) + r(h)$$

ponieważ $T(h)$ jest przekształceniem z $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, więc jest przekształceniem ciągłym, ponadto z założenia mamy $\lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$, więc dostajemy:

$$\lim_{h \to 0} f(p+h) = f(p),$$

co oznacza ciągłość $f$ w punkcie $p$. $\square$

## Interpretacja gradientu:

Jeżeli $f: A \to \mathbb{R}$, $A \subset \mathbb{R}^n$ jest różniczkowalna w każdym punkcie zbioru $A$ oraz $0 \neq v = \text{grad } f(p)$ dla $p \in A$, to dla każdego wektora $w \in \mathbb{R}^n$ takiego, że $|w| = |v|$ zachodzi nierówność

$$\frac{\partial f}{\partial w}(p) \leq \frac{\partial f}{\partial v}(p).$$

Równość w powyższej nierówności zachodzi jedynie dla $w = v$.

Oznacza to, że gradient funkcji w punkcie $p$ wyznacza kierunek najszybszego wzrostu (spadku) funkcji w tym punkcie. Długość wektora gradientu odpowiada za tempo wzrostu w tym kierunku.