Informatyka
WYKŁAD 9

Całkowanie funkcji trygonometrycznych. Całkowanie funkcji z niewymiernościami

Całkowanie funkcji postaci $\sin^n x \cos^m x$

n, m – parzyste, korzystamy z tożsamości:

$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$

$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x)$

choć jedna z liczb n, m jest nieparzysta

n – nieparzyste

$n = 2l+1$

zapiszemy:

$\sin^n x \cos^m x =$

$= \sin^{2l} x \sin x \cos^m x =$

$= (\sin^2 x)^l \sin x \cos^m x =$

$= (1-\cos^2 x)^l \sin x \cos^m x$

$\left\{ \begin{array}{r} \text{podst. } \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right\}$

$= (1-t^2)^t$

m – nieparzyste

$m = 2k+1$

zapiszemy:

$\sin^n x \cos^m x =$

$= \sin^n x \cos^{2k} x \cos x$

$= \sin^n x (\cos^2 x)^k \cos x$

$= \sin^n x (1-\sin^2 x)^k \cos x$

$\left\{ \begin{array}{r} \text{podst. } \sin x = t \\ \cos x\, dx = dt \end{array} \right\}$

Przykład

$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\int 1\, dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \end{array} \right\} \int \frac{1}{2}\cos t\, dt = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}(\sin t) \cancel{dx} + C$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C =$$

$$= \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

Przykład

$$\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x \cos^2 x\, dx = \int (1-\cos^2 x)\sin x \cos^2 x\, dx$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \cos x = t \\ -\sin x\, dx = dt \end{array} \right\} = -\int (1-t^2)t^2\, dt = -\int (t^2 - t^4)\, dt =$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + C = -\frac{1}{3}\cos^3 x + \frac{1}{5}\cos^5 x + C$$

Definicja Funkcja wymierna dwóch zmiennych to funkcja, którą można zapisać w postaci ilorazu wielomianów dwóch zmiennych.

np $\dfrac{u^2 - v^2}{2uv}$, $\dfrac{1}{u+v}$, $uv^2 + u^3$

Niech $R(u,v)$ będzie funkcją wymierną dwóch zmiennych u, v. Możemy wtedy rozważać funkcje $R(\sin x, \cos x)$, na przykład mamy:

$$R(u,v) = \frac{u}{v}, \quad \text{wtedy} \quad R(\sin x, \cos x) = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$R(u,v) = \frac{1}{1+9u^2}, \quad \text{wtedy} \quad R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{1+9\sin^2 x}$$

Całkowanie funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$

Opiszemy kilka przypadków:

1. gdy R spełnia warunek $R(-u,v) = -R(u,v)$

to stosujemy podstawienie: $\cos x = t$,

wtedy dostajemy: $\sin x = \sqrt{1-t^2}$

oraz $x = \arccos t$

zatem $dx = \dfrac{-1\, dt}{\sqrt{1-t^2}}$

2. gdy R spełnia warunek $R(u,-v) = -R(u,v)$

to stosujemy podstawienie: $\sin x = t$

zatem: $\cos t = \sqrt{1-t^2}$

stąd: $x = \arcsin t$

więc: $dx = \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$

3. gdy R spełnia warunek: $R(-u,-v) = R(u,v)$

to stosujemy podstawienie: $tg\,x = t$

stąd: $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$

dalej: $x = arc\,tg\,t$

stąd: $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

4. gdy R jest dowolną funkcją, to możemy próbować stosować podstawienie uniwersalne:

$tg\,\frac{x}{2} = t$

wtedy: $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

oraz: $\frac{x}{2} = arc\,tg\,t$

$x = 2\,arc\,tg\,t$

$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

Przykład Obliczyć całkę $\int \frac{dx}{\sin x+\cos x}$

spr: $R(-\sin x, -\cos x) = \frac{1}{-\sin x-\cos x} = -\frac{1}{\sin x+\cos x} = -R(\sin x, \cos x)$

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \left\{ tg\, x = t \right\} = \int \frac{dt}{\frac{t+1}{\sqrt{t^2+1}}(1+t^2)} =$$

$$= \int \frac{\sqrt{t^2+1}\, dt}{(t+1)(t^2+1)} =$$ raczej trudna całka ☹

spróbujemy inaczej:

$$\int \frac{dx}{\sin x+\cos x} = \left\{ tg\, \frac{x}{2} = t \right\} = \int \frac{2\, dt}{\frac{2t+1-t^2}{\cancel{1+t^2}}\cancel{(1+t^2)}} =$$

$$= \int \frac{2\, dt}{-t^2+2t+1}$$

$\Delta = 4-4\cdot(-1) = 8$

$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{2}$

$t_1 = \frac{-2-2\sqrt{2}}{-2} = 1+\sqrt{2}$ $\quad t_2 = \frac{-2+2\sqrt{2}}{-2} = +1-\sqrt{2}$

rozkład na ułamki proste:

$$\frac{-1}{+(t-(1+\sqrt{2}))(t-(1-\sqrt{2}))} = \frac{A}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{B}{t-(1-\sqrt{2})}$$

$$-1 = A(t-(1-\sqrt{2})) + B(t-(1+\sqrt{2}))$$

dla $t = 1+\sqrt{2}$: $-1 = A(\cancel{1}+\sqrt{2}\cancel{-1}+\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}A \Rightarrow A = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$

dla $t = 1-\sqrt{2}$: $-1 = B(1-\sqrt{2}-1-\sqrt{2}) = B(-2\sqrt{2}) \Rightarrow B = \frac{+1}{+2\sqrt{2}}$

$$y = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t-(1+\sqrt{2})} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\int \frac{dt}{t-(1-\sqrt{2})} =$$

$$= -\frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left(t-(1+\sqrt{2})\right) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|t-(1-\sqrt{2})\right| + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{t-(1-\sqrt{2})}{t-(1+\sqrt{2})}\right| = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{tg\frac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right| + C$$

Przykład Oblicz całkę $\int tgx\,dx$.

$$\int tgx\,dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx = -\ln|\cos x| + C$$

Całkowanie funkcji postaci: $\sin ax \cos bx$,

$\sin ax \sin bx$,

$\cos ax \cos bx$

Do obliczenia całek takiej postaci stosujemy tożsamości trygonometryczne:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right]$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b)x - \cos(a+b)x\right]$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)x + \cos(a-b)x\right]$$

Przykład: Obliczyć całkę $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$

$$\int \sin 2x \cos 4x \, dx = \frac{1}{2}\int \left[\sin 6x + \sin(-2x)\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin 6x \, dx - \frac{1}{2}\int \sin 2x \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} 6x = t \\ 6dx = dt \\ dx = \frac{1}{6}dt \end{array} \right| \int \sin t \cdot \frac{1}{6} \, dt - \frac{1}{2} \left| \begin{array}{l} 2x = t \\ 2dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| \int \sin t \cdot \frac{1}{2} dt$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6}(-\cos t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}(-\cos t) + C =$$

$$= -\frac{1}{12}\cos 6x + \frac{1}{4}\cos 2x + C$$

Całkowanie funkcji z niewymiernościami

1. $\int R(\text{potęgi } x \text{ o wykładnikach } \frac{m}{n},\ NWD(m,n)=1)\,dx$

podstawiamy $x = t^N$, gdzie N jest wspólnym mianownikiem ułamków postaci $\frac{m}{n}$

Przykład: Oblicz całkę $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$. Załóż, że $x>0$

Mamy $\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = R(x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}})$, zatem dobieramy $N=6$ i podstawiamy:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \left\{ \begin{array}{l} x = t^6,\ t\geq 0 \\ dx = 6t^5\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{6t^5\,dt}{t^3+t^2} =$$

$$= 6\int \frac{t^5\,dt}{t^2(t+1)} = 6\int \frac{t^3\,dt}{t+1} =$$ funkcja wymierna niewłaściwa

$$\begin{array}{l} \quad t^2 - t + 1 \\ \hline t^3 : (t+1) \\ -(t^3+t^2) \\ \hline \quad -t^2 \\ \quad -(-t^2-t) \\ \hline \qquad t \\ \qquad -(t+1) \\ \hline \qquad\quad -1 \end{array}$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 6\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{2}t^2 + t - \ln|t+1|\right] + C$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln|\sqrt[6]{x}+1| + C$$

2. $\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,dx$

podstawiamy $ax+b = t^n$

wyliczamy $a\,dx = \ldots$

obliczamy $dx = \ldots$

Przykład: $\int \sqrt[4]{5x-6}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} 5x-6 = t^4,\ t \geq 0 \\ 5dx = 4t^3 dt \\ dx = \frac{4}{5}t^3 dt \end{array} \right\} =$

$z: x \geq \frac{6}{5}$

$= \int t\,\frac{4}{5}t^3\,dt = \frac{4}{5}\int t^4 dt = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{5}t^5 + C =$

$= \frac{4}{25}(5x-6)^{\frac{5}{4}} + C$

3. $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$

podstawiamy $\frac{ax+b}{cx+d} = t^n$

wyliczamy $x = \ldots$

oraz $dx = \ldots\ dt$

Przykład $\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{x+1} = \}$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x+1}{x-1} = t^3, \quad x+1 = t^3x - t^3, \quad 1+t^3 = t^3x - x \\ \qquad 1+t^3 = x(t^3-1) \\ dx = \frac{3t^2(t^3-1) - 3t^2(t^3+1)}{(t^3-1)^2}\,dt = \qquad x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}\,dt \end{array} \right.$$

$$y = \int t \, \frac{1}{\frac{t^3+1}{t^3-1}+1} \, \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \, dt =$$

$$= \int t \, \frac{1}{\frac{t^3+1+t^3-1}{t^3-1}} \cdot \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2} \, dt =$$

$$= \int \frac{\cancel{t}\,\cancel{(t^3-1)}}{2\cancel{t^3}} \, \frac{-6\cancel{t^2}}{(t^3-1)^{\cancel{2}}} \, dt = \int \frac{-6\,dt}{2(t^3-1)} =$$

$$= -3 \int \frac{dt}{t^3-1}$$ całka funkcji wymiernej właściwej, rozkładamy na ułamki proste

$$\frac{1}{t^3-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{Bt+C}{t^2+t+1}$$

$$1 = A(t^2+t+1) + (Bt+C)(t-1)$$

$$1 = \underline{At^2} + At + A + \underline{Bt^2} - Bt + Ct - C$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B+C=0 \\ A-C=1 \end{cases} \quad \begin{matrix} B=-A \\ A+A+A-1=0 \\ C=A-1 \end{matrix} \quad 3A=1 \quad \begin{matrix} B=-\frac{1}{3} \\ A=\frac{1}{3} \\ C=-\frac{2}{3} \end{matrix}$$

$$-3\int \frac{dt}{t^3-1} = -3\int \frac{\frac{1}{3}}{t-1} + 3\int \frac{+\frac{1}{3}t+\frac{2}{3}}{t^2+t+1} \, dt =$$

$$= \int \frac{t+2}{t^2+t+1} \, dt - \int \frac{dt}{t-1}$$

$$\int \frac{t+2}{t^2+t+1}\,dt = \int \frac{(2t+1)\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}}{t^2+t+1}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2t+1}{t^2+t+1}\,dt + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{t^2+t+1} =$$

$$\Delta = 1-4\cdot 1\cdot 1 = -3$$

$$\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \frac{3}{2}\int \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \left\{\begin{array}{l} t+\frac{1}{2} = \sqrt{\frac{3}{4}}\,t \\ dt = \sqrt{\frac{3}{4}}\,dt \end{array}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \frac{3}{2}\int \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}\,dt}{\frac{3}{4}(t^2+1)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \overbrace{\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{\sqrt{4}}}\cdot\frac{\cancel{4}}{\cancel{3}}}^{\sqrt{3}}\int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t^2+t+1| + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}+1\right| + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} + C = J_1$$

$$y = J_1 + J_2, \quad \text{gdzie} \quad J_2 = \ln\left|\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}-1\right| + C$$

4. $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})\,dx$

WZORY: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+k}} = \ln|x+\sqrt{x^2+k}|+C$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{|a|}+C$$

Całki postaci $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, gdzie $a>0$

Przykład: $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+15}} = \left\{ \begin{array}{l} x^2-6x+15 = (x-3)^2+6 \\ x-3 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} =$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+6}} = \ln|t+\sqrt{t^2+6}|+C =$

$= \ln|x-3+\sqrt{x^2-6x+15}|+C$

Całki postaci $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, gdzie $a<0$

Przykład $\int \frac{dx}{\sqrt{4-2x-x^2}} = \left\{ \begin{array}{l} -x^2-2x+4 = -(x+1)^2+5 \\ x+1 = t \\ dx = dt \end{array} \right\} =$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{5-t^2}} = \arcsin\frac{t}{\sqrt{5}}+C = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{5}}+C$

WZORY:

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int \sqrt{x^2+k}\,dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+k} + \frac{1}{2}k\ln|x+\sqrt{x^2+k}| + C$$

Całki postaci $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, gdzie $a>0$

Przykład

$$\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx = \left| \begin{array}{l} x^2-2x+5 = (x-1)^2+4 \\ x-1=t \\ dx=dt \end{array} \right| =$$

$$= \int \sqrt{(x-1)^2+4}\,dx = \int \sqrt{t^2+4}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{t^2+4} + \frac{1}{2}\cdot 4\ln|t+\sqrt{t^2+4}| + C =$$

$$= \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x+5} + 2\ln|x-1+\sqrt{x^2-2x+5}| + C$$

Całki postaci $\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$, gdzie $a<0$

Przykład

$$\int \sqrt{3-2x-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} 3-2x-x^2 = 4-(x+1)^2 \\ x+1=t \\ dx=dt \end{array} \right|$$

$$= \int \sqrt{4-(x+1)^2}\,dx =$$

$$= \int \sqrt{4-t^2}\,dt =$$

$$= \frac{4}{2}\arcsin\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\sqrt{4-t^2} + C =$$

$$= 2\arcsin\frac{x+1}{2} + \frac{x+1}{2}\sqrt{3-2x-x^2} + C$$

Całki funkcji cyklometrycznych

- $\int \arcsin x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} f = \arcsin x & f' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ g' = 1 & g = x \end{array} \right\} =$

$$= x \arcsin x - \int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = x \arcsin x - \left\{ \begin{array}{l} 1-x^2 = t \\ -2x\,dx = dt \\ x\,dx = -\frac{1}{2} dt \end{array} \right\},$$

$$\int \frac{-\frac{1}{2} dt}{\sqrt{t}} = x \arcsin + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t}} =$$

$$= x \arcsin + \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{t} + C = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

- $\int x \operatorname{arctg} x \, dx = \left\{ \begin{array}{ll} f = \operatorname{arctg} x & f' = \frac{1}{1+x^2} \\ g' = x & g = \frac{1}{2}x^2 \end{array} \right\} =$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(x - \operatorname{arctg} x\right) + C =$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \,(x^2+1) - \frac{1}{2}x + C$$

Całki typu $R(e^x)$

podstawiamy $e^x = t$, $t > 0$

wyliczamy $x = \ln t$

i obliczamy $dx = \frac{1}{t}\,dt$

Przykład

$$\int \frac{e^x+1}{e^x-1}\,dx = \left\{ \begin{array}{l} e^x = t \\ x = \ln t \\ dx = \frac{1}{t}\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{t+1}{t-1}\,\frac{1}{t}\,dt$$

rozkład na sumę ułamków prostych:

$$\frac{t+1}{(t-1)\,t} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t}$$

$$t+1 = At + B(t-1)$$

dla $t=0$: $1 = -B$, czyli $B = -1$

dla $t=1$: $2 = A$, czyli $A = 2$, zatem

$$\int \frac{t+1}{(t-1)\,t}\,dt = \int \frac{2}{t-1}\,dt - \int \frac{dt}{t} = 2\ln|t-1| - \ln|t| + C =$$

$$= 2\ln|e^x-1| - \ln e^x + C = 2\ln|e^x-1| - x + C$$