Informatyka
W8

Całkowanie przez podstawienie. Całkowanie funkcji wymiernych.

Twierdzenie (o całkowaniu przez podstawienie)

Jeżeli: 1) funkcja $f: I \to \mathbb{R}$ jest ciągła

2) funkcja $g: J \to I$ ma ciągłą pochodną na przedziale J

to

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt = F(g(x)),$$

gdzie F jest dowolną funkcją pierwotną f.

Przykłady:

a) $\int (2x-5)^7\,dx = \left\{\begin{array}{l} \overbrace{2x-5}^{g} = t \\ \underbrace{2}_{g'}\,dx = dt \\ dx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right\} = \int t^7 \frac{1}{2}\,dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}t^8 + C$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-3}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{2x-3} = t \\ 2x-3 = t^2 \\ \cancel{2}\,dx = \cancel{2}t\,dt \end{array}\right\} = \int \frac{\cancel{t}\,dt}{\cancel{t}} = \int 1\,dt =$

$= t + C = \sqrt{2x-3} + C$

c) $\int x e^{x^2}\,dx = \left\{\begin{array}{l} x^2 = t \\ 2x\,dx = dt \\ x\,dx = \frac{1}{2}dt \end{array}\right\} = \int \frac{1}{2} e^t\,dt = \frac{1}{2}\int e^t\,dt =$

$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

d) $\int \frac{x^7\,dx}{\sqrt{1-x^{16}}} = \left\{ \begin{array}{l} x^8 = t \\ 8x^7\,dx = dt \\ x^7\,dx = \frac{1}{8}\,dt \end{array} \right\} = \int \frac{\frac{1}{8}\,dt}{\sqrt{1-t^2}} =$

$= \frac{1}{8} \arcsin t + C = \frac{1}{8} \arcsin(x^8) + C$

CAŁKOWANIE FUNKCJI WYMIERNYCH

Definicja

Funkcja wymierna to iloraz dwóch wielomianów:

$$W(x) = \frac{L(x)}{M(x)}.$$

Mogą się zdarzyć dwie sytuacje:

$$W(x) = \frac{L(x)}{M(x)}$$

st. $L(x) \geq$ st. $M(x)$

wtedy $W(x)$ nazywamy funkcją wymierną niewłaściwą — możemy dzielić wielomian $L(x)$ przez wielomian $M(x)$ i zapisać $W(x)$ jako sumę wielomianu i funkcji wymiernej właściwej

st. $L(x) <$ st. $M(x)$

wtedy $W(x)$ nazywamy funkcją wymierną właściwą

Przykład Funkcję wymierną $W(x) = \dfrac{x^3+2}{x+1}$ zapisać w postaci sumy wielomianu i funkcji wymiernej właściwej.

$$\begin{array}{l} \quad x^2 - x + 1 \\ \hline x^3 + 2 : (x+1) \\ -(x^3 + x^2) \\ \hline \quad -x^2 + 2 \\ \quad -(-x^2 - x) \\ \hline \qquad x + 2 \\ \qquad -(x+1) \\ \hline \qquad\quad 1 \end{array}$$

1 reszta z dzielenia wielomianów

$$\frac{x^3+2}{x+1} = \underbrace{x^2 - x + 1}_{\text{wielomian}} + \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{\text{funkcja wymierna właściwa}}$$

Ułamki proste

1. $\dfrac{A}{(x+a)^n}$ ułamek prosty pierwszego rodzaju

A, a – stałe rzeczywiste, $n \in \mathbb{N}$

2. $\dfrac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}$ ułamek prosty drugiego rodzaju

P, Q, p, q – stałe rzeczywiste, $n \in \mathbb{N}$

$\Delta = p^2 - 4q < 0$!

Twierdzenie

Każda funkcja wymierna właściwa jest sumą ułamków prostych. Przedstawienie to jest jednoznaczne.
Funkcja wymierna właściwa

$$\frac{P(x)}{a_n(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\ldots(x-x_r)^{k_r}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdot(x^2+p_2x+q_2)^{l_2}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_sx+q_s)^{l_s}}$$

jest sumą $k_1+k_2+\ldots+k_r$ ułamków prostych pierwszego rodzaju oraz $l_1+l_2+\ldots+l_s$ ułamków prostych drugiego rodzaju, przy czym:

- czynnikowi $(x-x_i)^{k_i}$ odpowiada suma k_i ułamków prostych pierwszego rodzaju postaci:

$$\frac{A_{i1}}{x-x_i}+\frac{A_{i2}}{(x-x_i)^2}+\ldots+\frac{A_{ik_i}}{(x-x_i)^{k_i}},$$

gdzie $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik_i} \in \mathbb{R}$ dla $i=1,2,\ldots,r$,

- czynnikowi $(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}$ odpowiada suma l_j ułamków prostych drugiego rodzaju postaci:

$$\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\ldots+\frac{B_{jl_j}x+C_{jl_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{l_j}}$$

gdzie $B_{j1}, B_{j2}, \ldots, B_{jl_j}, C_{j1}, C_{j2}, \ldots, C_{jl_j} \in \mathbb{R}$ dla $j=1,2,\ldots,s$.

Przykład Podać rozkład na ułamki proste funkcji

a) $\frac{x+1}{x^2(x-3)^5}$ b) $\frac{x^3+1}{(x^2+2)^2(x-2)^3}$

a) $$\frac{x+1}{x^2(x-3)^5} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-3} + \frac{D}{(x-3)^2} + \frac{E}{(x-3)^3} + \frac{F}{(x-3)^4} + \frac{G}{(x-3)^5}$$

b) $$\frac{x^3+1}{(x^2+2)^2(x-2)^3} = \frac{Px+Q}{x^2+2} + \frac{Rx+S}{(x^2+2)^2} + \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{(x-2)^3}$$

Całkowanie ułamków prostych pierwszego rodzaju

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x)dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C =$$

$$= \ln|f(x)| + C$$

$$\int \frac{A\,dx}{x+a} dx = A \ln|x+a| + C$$

$$\int \frac{f'(x)}{(f(x))^n}dx = \left\{ \begin{array}{l} f(x) = t \\ f'(x)\,dx = dt \end{array} \right\} = \int \frac{dt}{t^n} = \int t^{-n} dt =$$

$$= \frac{t^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{-1}{(n-1)\,t^{n-1}} + C = \frac{-1}{(n-1)\,(f(x))^{n-1}} + C$$

$$\int \frac{A\,dx}{(x+a)^n} = \frac{-A}{(n-1)(x+a)^{n-1}} + C, \quad n \geq 2$$

Przykład

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$\frac{x}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3} \quad / \cdot \text{duży mianownik}$$

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

I metoda:

$$x = A(x^2+3x+2x+6) + B(x^2+3x+x+3) + C(x^2+2x+x+2)$$

$$x = Ax^2 + 5Ax + 6A + Bx^2 + 4Bx + 3B + Cx^2 + 3Cx + 2C$$

$$0 \cdot x^2 + 1 \cdot x + 0 = (A+B+C)x^2 + (5A+4B+3C)x + 6A+3B+2C$$

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+4B+3C=1 \\ 6A+3B+2C=0 \end{cases} \Rightarrow A=-B-C$$

$$\begin{cases} 5(-B-C)+4B+3C=1 \\ 6(-B-C)+3B+2C=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -5B-5C+4B+3C=1 \\ -6B-6C+3B+2C=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -B-2C=1 \\ -3B-4C=0 \end{cases} \Rightarrow B=-2C-1$$

$$-3(-2C-1)-4C=0$$

$$6C+3-4C=0$$

$$2C=-3 \qquad C=-\frac{3}{2}$$

$$B = +\cancel{2}\cdot\left(+\frac{3}{\cancel{2}}\right)-1=2$$

$$A=-2+\frac{3}{2}=-\frac{1}{2}$$

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)} = \int \frac{-\frac{1}{2}\,dx}{x+1} + \int \frac{2\,dx}{x+2} - \int \frac{\frac{3}{2}\,dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{x+1} + 2\int \frac{dx}{x+2} - \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x+3} =$$

$$= -\frac{1}{2}\ln|x+1| + 2\ln|x+2| - \frac{3}{2}\ln|x+3| + C$$

II metoda:

$$x = A(x+2)(x+3) + B(x+1)(x+3) + C(x+1)(x+2)$$

$x=-1$: $-1 = A\cdot(1)\cdot(2)$

$-1 = 2A$

$A = -\frac{1}{2}$

$x=-2$: $-2 = B(-1)(1)$

$-2 = -B$

$B = 2$

$x=-3$: $-3 = C(+2)(+1)$

$-3 = 2C$

$C = -\frac{3}{2}$

dalej tak samo jak w I metodzie.

Całkowanie ułamków prostych drugiego rodzaju

Stosując metodę całkowania przez podstawienie, możemy wyprowadzić wzór:

$$(\bullet)\quad \int \frac{dx}{(a^2+x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)}\cdot\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{(a^2+x^2)^{n-1}},$$

$$a>0,\quad n\geq 2$$

$$\int \frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n} = \int \frac{(2x+p)\cdot\frac{P}{2} + \square}{(x^2+px+q)^n} =$$

$$(x^2+px+q)' = 2x+p$$

$$= \frac{P}{2}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \square\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}$$

$$\text{podst: } \left\{\begin{aligned} x^2+px+q &= t \\ (2x+p)\,dx &= dt \end{aligned}\right\}$$

trójmian sprowadzamy do postaci kanonicznej

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{\overbrace{-(p^2-4q)}^{-\Delta}}{4}$$

$$\underbrace{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}_{t^2} + \underbrace{\frac{4q-p^2}{4}}_{a^2}$$

i korzystamy ze wzoru $(\bullet)$

Przykład

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2x+2+\boxed{1}}{x^2+2x+2}\,dx = \underbrace{\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{dx}{x^2+2x+2}}_{J_2}$$

$$J_1 = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \left\{ \begin{aligned} x^2+2x+2 &= t \\ (2x+2)\,dx &= dt \end{aligned} \right\} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$= \ln|x^2+2x+2| + C$$

$$J_2 = \int \frac{1\,dx}{x^2+2x+2} =$$

$$x^2+2x+2 = \left(x+\frac{2}{2}\right)^2 + \frac{4}{4}$$

$$\Delta = 4 - 4\cdot 2 = -4$$

$$= \int \frac{1\,dx}{(x+1)^2+1} = \left\{ \begin{aligned} x+1 &= t \\ dx &= dt \end{aligned} \right\} = \int \frac{dt}{t^2+1} = \operatorname{arc\,tg} t + C =$$

$$= \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \ln|x^2+2x+2| + \operatorname{arc\,tg}(x+1) + C$$

Jak całkujemy funkcje wymierne – algorytm

mamy $W(x) = \dfrac{L(x)}{M(x)}$

1. Jeśli st. $L(x) \geq$ st. $M(x)$, to dzielimy $L(x)$ przez $M(x)$.
   Jeśli st. $L(x) <$ st. $M(x)$, to idziemy do 2.
   Tak czy inaczej mamy sytuację:

   $W(x) =$ wielomian + funkcja wymierna właściwa
   – być może zerowy

   $$\int W(x)\,dx = \underbrace{\int \text{wielomian}}_{\text{proste całki}} + \underbrace{\int \text{funkcja wymierna właściwa}}_{\text{jak liczyć – punkt 2.}}$$

2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe z ujemną deltą.

3. Zapisujemy rozkład (ze stałymi A, B, itd) funkcji wymiernej właściwej na ułamki proste.

4. Znajdujemy współczynniki rozkładu, czyli A, B, itd.

5. Obliczamy wszystkie całki – zarówno całkę z wielomianu z punktu 1, jak i całki otrzymane z rozkładu na ułamki proste.

6. Zapisujemy odpowiedź!

Przykład

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2} =$$

$$\begin{array}{l} \quad x+3 \\ \hline x^3 : (x^2-3x+2) \\ -(x^3-3x^2+2x) \\ \hline \quad 3x^2-2x \\ -(3x^2-9x+6) \\ \hline \qquad 7x-6 \end{array}$$

$$= \underbrace{\int (x+3)\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{7x-6}{x^2-3x+2}\,dx}_{J_2}$$

$\Delta = 9 - 4\cdot 2 = 1$ $\qquad x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$

$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1$

$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2$

$$\frac{7x-6}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}$$

$$7x-6 = A(x-2) + B(x-1)$$

dla $x=1$: $\quad 1 = A(1-2) \qquad \underline{\underline{A=-1}}$

$\qquad 1 = -A$

dla $x=2$: $\quad 8 = B\cdot(2-1) \qquad \underline{\underline{B=8}}$

$$\int \frac{(7x-6)\,dx}{(x-1)(x-2)} = \int \frac{-1\,dx}{x-1} + \int \frac{8\,dx}{x-2} = -\ln|x-1| + 8\ln|x-2| + C$$

$$\int (x+3) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + C$$

$$\int \frac{x^3\,dx}{x^2-3x+2} = \frac{1}{2}x^2 + 3x - \ln|x-1| + 8\ln|x-2| + C$$

Przykład

$$\int \frac{x^4+6x^3+10x^2+x}{x^2+6x+10}\,dx =: J$$

$$\begin{array}{l} \quad x^2 \\ \hline x^4+6x^3+10x^2+x \quad : (x^2+6x+10) \\ -(x^4+6x^3+10x^2) \\ \hline \qquad\qquad\qquad x \end{array}$$

$$J = \underbrace{\int x^2\,dx}_{J_1} + \underbrace{\int \frac{x\,dx}{x^2+6x+10}}_{J_2}$$

$$ax^2+bx+c = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]$$

$x^2+6x+10$

$\Delta = 36-40 = -4 < 0$

$$x^2+6x+10 = \left(x+\frac{6}{2}\right)^2+\frac{4}{4} =$$

$$= (x+3)^2+1$$

$$J_2 = \int \frac{x\,dx}{x^2+6x+10} = \int \frac{(2x+6)\frac{1}{2}-3}{x^2+6x+10}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{2x+6}{x^2+6x+10}\,dx - 3\int \frac{dx}{(x+3)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 3 \left\{ \begin{array}{l} x+3=t \\ dx=dt \end{array} \right\} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 3\,\mathrm{arc\,tg}\,t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 3\,\mathrm{arc\,tg}\,(x+3) + C$$

$$J = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}\ln|x^2+6x+10| - 3\,\mathrm{arc\,tg}\,(x+3) + C$$

Przykład $\int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}\,dx$

$$\frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{(x^2+1)^3} \quad / \cdot (x^2+1)^3$$

$$x^4+2x^2+4 = (Ax+B)(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x^2+1) + Ex+F$$

$$x^4+2x^2+4 = (Ax+B)(x^4+1+2x^2) + (Cx+D)(x^2+1) + Ex+F$$

$$x^4+2x^2+4 = Ax^5 + Ax + 2Ax^3 + Bx^4 + B + 2Bx^2 + Cx^3 + Cx + Dx^2 + D + Ex + F$$

$A=0$ $\quad$ $2A+C=0$ $\quad$ $A+C+E=0$

$B=1$ $\quad$ $C=0$ $\quad$ $E=0$

$C=0$ $\quad$ $2B+D=2$ $\quad$ $4=B+D+F$

$D=0$ $\quad$ $2+D=2$ $\quad$ $4=1+0+F$

$E=0$ $\quad$ $F=3$

$F=3$

$$\int \frac{x^4+2x^2+4}{(x^2+1)^3}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} + \int \frac{3\,dx}{(x^2+1)^3} =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} x + 3\left[\frac{x}{2\cdot 2(x^2+1)^2} + \frac{3}{4}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}\right] =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + \frac{9}{4}\left[\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+x^2}\right] =$$

$$= \operatorname{arc\,tg} x + \frac{3x}{4(x^2+1)^2} + \frac{9x}{8(1+x^2)} + \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x + C =$$

$$= \frac{17}{8}\operatorname{arc\,tg} x + \frac{3}{4}\frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{9}{8}\frac{x}{1+x^2} + C$$