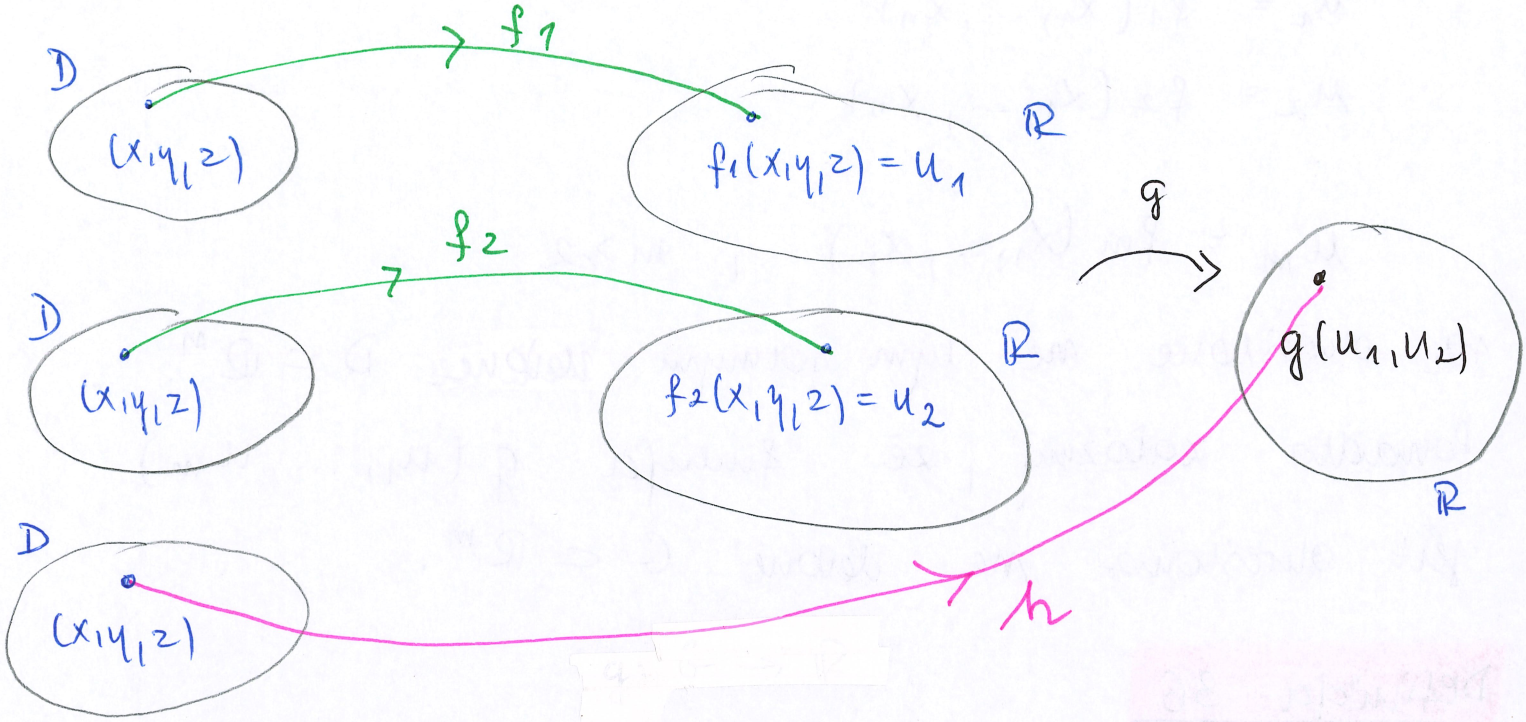
Jak wygląda składanie funkcji wielu zmiennych?

np. $D \subset \mathbb{R}^3$, $f_1, f_2 : D \to \mathbb{R}$, $g : G \to \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$



G jest taki, że dla każdego $(x,y,z) \in D$ zachodzi $(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z)) = (u_1, u_2) \in G$

$h : D \to \mathbb{R}$

$h = g(u_1, u_2) = g(f_1(x,y,z), f_2(x,y,z))$

funkcja złożona trzech zmiennych x, y, z w obszarze D

Ogólny przypadek:

założymy, że funkcje:

$$u_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$u_2 = f_2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$u_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \quad , \quad m \geq 2$$

są określone na tym samym zbiorze $D \subset \mathbb{R}^n$.

Ponadto założymy, że funkcja $g(u_1, \dots, u_m)$ jest określona na zbiorze $G \subset \mathbb{R}^m$.

Definicja 36

Jeżeli dla każdego $(x_1, \dots, x_n) \in D$ zachodzi

$$\left(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\right) \in G,$$

to funkcję postaci

$$h = g\left(f_1(x_1, \dots, x_n), f_2(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)\right) =$$

$$= h(x_1, \dots, x_n)$$

nazywamy funkcją złożoną n zmiennych $x_1, \dots, x_n$ w obszarze D.

Twierdzenie 37 (o pochodnych cząstkowych funkcji złożonej)

Jeżeli funkcja $g(u_1, \ldots, u_m)$, $m \geq 2$ jest klasy C^1 w obszarze $G \subset \mathbb{R}^m$ (tzn. g ma ciągłe pochodne cząstkowe $\frac{\partial g}{\partial u_i}$), zaś funkcje $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ dla $i = 1, 2, \ldots, m$ mają pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w obszarze $D \subset \mathbb{R}^n$, to funkcja złożona

$$h = g(f_1(x_1, \ldots, x_n), f_2(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n))$$

ma pochodne cząstkowe rzędu pierwszego w każdym punkcie obszaru D oraz zachodzą równości:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, m.}$$

Przykład: Mamy funkcję $g(u_1, u_2)$ klasy C^1 w obszarze $G \subset \mathbb{R}^2$ oraz funkcje $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ które mają w obszarze $D \subset \mathbb{R}^2$ pochodne cząstkowe rzędu pierwszego.

Wtedy funkcja złożona

$$h = g(u_1, u_2) = g(f_1(x,y), f_2(x,y))$$

ma w obszarze D pochodne cząstkowe $\frac{\partial h}{\partial x}$, $\frac{\partial h}{\partial y}$ dane wzorami:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y}$$

Przykład

$$h = g(u_1, u_2) = u_1 \ln u_2$$

$$f_1(x,y) = 3x - y = u_1$$

$$f_2(x,y) = x^2 + y^2 = u_2$$

Mamy wtedy:

$$h(x,y) = g(3x-y, x^2+y^2) = (3x-y)\ln(x^2+y^2)$$

funkcja złożona

Obliczymy pochodne cząstkowe na podstawie Tw. 37:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} =$$

$$= \ln u_2 \cdot 3 + \frac{u_1}{u_2} \cdot 2x =$$

$$= \underbrace{3\ln(x^2+y^2) + \frac{3x-y}{x^2+y^2} \cdot 2x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} =$$

$$= \ln u_2 \cdot (-1) + \frac{u_1}{u_2} \cdot 2y =$$

$$= \underbrace{-\ln(x^2+y^2) + \frac{3x-y}{x^2+y^2} \cdot 2y}$$

zatem możemy liczyć "od razu" krótko:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left((3x-y)\cdot\ln(x^2+y^2)\right) = \underbrace{3\ln(x^2+y^2) + \frac{3x-y}{x^2+y^2} \cdot 2x}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left((3x-y)\cdot\ln(x^2+y^2)\right) = \underbrace{-\ln(x^2+y^2) + (3x-y)\frac{2y}{x^2+y^2}}$$

Przykład: Oblicz dwoma sposobami pochodne cząstkowe rzędu pierwszego funkcji złożonej

$$h = g(u_1, u_2) = \sin u_1 \cos u_2 \quad , \quad f(x,y) = x - 2y = u_1$$
$$f(x,y) = x + 2y = u_2$$

I Na podstawie Tw. 37

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u_1}\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\frac{\partial f_2}{\partial x} =$$
$$= \cos u_1 \cos u_2 \cdot 1 + (-\sin u_1 \sin u_2) \cdot 1 =$$
$$= \cos u_1 \cos u_2 - \sin u_1 \sin u_2 =$$
$$= \cos(x-2y)\cos(x+2y) - \sin(x-2y)\sin(x+2y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_2}\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y} =$$
$$= \cos u_1 \cos u_2 \cdot (-2) + (-\sin u_1 \sin u_2)\cdot 2 =$$
$$= -2\cos u_1 \cos u_2 - 2\sin u_1 \sin u_2 =$$
$$= -2\cos(x-2y)\cos(x+2y) - 2\sin(x-2y)\sin(x+2y)$$

II Tworzymy złożenie i obliczamy

$$h(x,y) = g(x-2y, x+2y) = \sin(x-2y)\cos(x+2y)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\sin(x-2y)\cos(x+2y)\right) = \cos(x-2y)\cos(x+2y) +$$
$$+ \sin(x-2y)(-\sin(x+2y))$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin(x-2y)\cos(x+2y)\right) = \cos(x-2y)(-2)\cos(x+2y) +$$
$$+ \sin(x-2y)(-\sin(x+2y))\cdot 2 =$$
$$= -2\cos(x-2y)\cos(x+2y) - 2\sin(x-2y)\sin(x+2y)$$

Przykład:

Mamy: $h = g(u_1, u_2)$

$u_1 = f_1(x,y) = x\cos y$

$u_2 = f_2(x,y) = x\sin y$

Obliczyć pochodne cząstkowe funkcji złożonej

$$h = g(x_1, x_2) = g(u_1, u_2) = g(x\cos y, x\sin y)$$

Mamy:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \cos y + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \sin y$$

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial y} =$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u_1} \cdot (-\sin y) \cdot x + \frac{\partial g}{\partial u_2} \cdot x\cos y$$

Gradient funkcji n zmiennych

Niech $A \subset \mathbb{R}^n$ będzie zbiorem otwartym.

Definicja 38: Gradientem funkcji $f: A \to \mathbb{R}$ w punkcie $p \in A$ nazywamy wektor

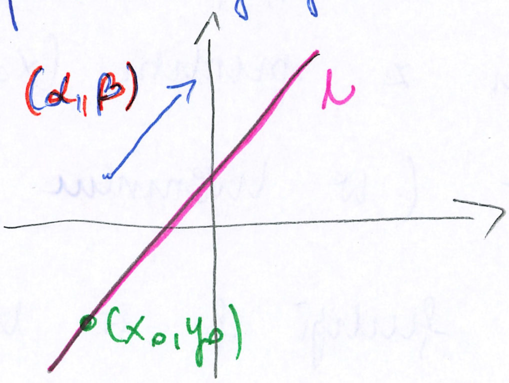
$$\underbrace{\text{grad } f(p)}_{} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) \right)$$

inaczej: $\nabla f(p)$
nabla

Pochodna kierunkowa

Niech l będzie prostą na płaszczyźnie XOY określoną równaniem parametrycznym:

$$l: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}$$



gdzie $\alpha^2 + \beta^2 = 1$
(czyli wektor (α, β) ma długość 1), zaś $t \in \mathbb{R}$.

Wektor (α, β) nazywamy wektorem kierunkowym prostej l.

Niech f będzie funkcją określoną w zbiorze otwartym $A \subset \mathbb{R}^2$ i niech l będzie prostą na płaszczyźnie xOy o wektorze kierunkowym (α, β)

Definicja 39: Pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $p_0 = (x_0, y_0) \in A$ w kierunku prostej l (lub w kierunku wektora (α, β)) nazywamy granicę (o ile istnieje i jest właściwa):

$$\frac{\partial f}{\partial l}(p_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t\alpha, y_0 + t\beta) - f(x_0, y_0)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p_0)$$

Licznik powyższego ułamka jest różnicą przyrostowi wartości funkcji f, gdy jej argument ulega przesunięciu z punktu (x_0, y_0) w kierunku wektora v (w kierunku prostej l). Zatem

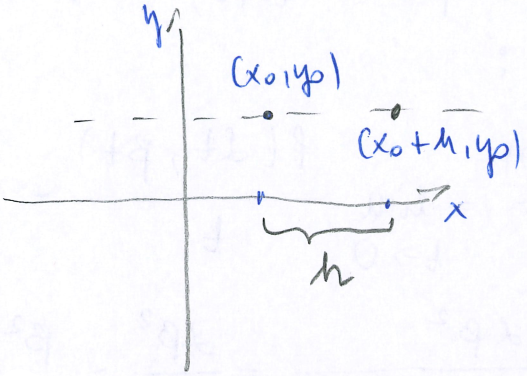
pochodna funkcji f w kierunku prostej l określa szybkość wzrostu tej funkcji w kierunku l.

Jeśli $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, czyli $l \parallel 0x$, to $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}$

pochodna cząstkowa po x

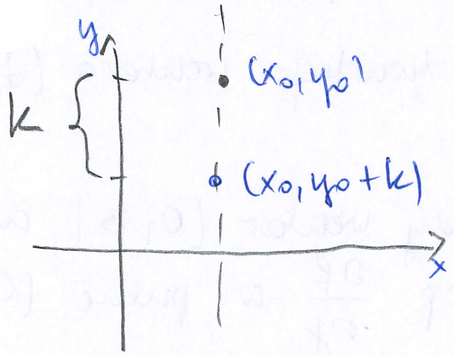
Jeśli $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, czyli $l \parallel 0y$, to $\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial y}$

pochodna cząstkowa po y



$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

pochodna kierunkowa w kierunku osi $0x$ = pochodna cząstkowa po x



$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(x_0, y_0+k) - f(x_0, y_0)}{k}$$

pochodna kierunkowa w kierunku osi $0y$ = pochodna cząstkowa po y

UWAGA Funkcja może mieć w punkcie p_0 pochodne kierunkowe w każdym kierunku i nie być ciągła w p_0.

Przykład: Rozważmy funkcję $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^4 \neq 0 \\ 0, & x^2+y^4 = 0 \end{cases}$

Obliczmy pochodną kierunkową funkcji f w punkcie $(0,0)$ w ustalonym kierunku prostej $l \parallel (\alpha, \beta)$:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0+\alpha t, 0+\beta t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha t, \beta t)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\alpha t \beta^2 t^2}{\alpha^2 t^2 + \beta^4 t^4} \cdot \frac{1}{\cancel{t}} = \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{t^2} \alpha \beta^2}{\cancel{t^2}(\alpha^2 + \beta^4 t^2)} = \frac{\alpha\beta^2}{\alpha^2} = \frac{\beta^2}{\alpha}$$

Zatem pochodna kierunkowa istnieje dla każdego wektora (α, β) gdzie $\alpha^2+\beta^2>0$, o ile tylko $\alpha \neq 0$.

Sprawdźmy istnienie dla $\alpha = 0$, mamy wtedy wektor $(0, \beta)$, czyli sprawdźmy istnienie pochodnej cząstkowej $\frac{\partial f}{\partial y}$ w punkcie $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{\frac{0\cdot k^2}{0+k^4} - 0}{k} = \lim_{k\to 0} 0 = 0$$

Zatem pochodna kierunkowa istnieje w każdym kierunku.

Można jednak sprawdzić, że f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.

W tym celu obliczymy $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$.

Najpierw weźmy ciąg $(x_n, y_n) = (0, \frac{1}{n})$, mamy:

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2+y_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{0\cdot\frac{1}{n^2}}{0+\frac{1}{n^4}} = 0$$

Dalej, weźmy ciąg $(x_n, y_n) = (\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n})$, wtedy mamy

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n,y_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n y_n^2}{x_n^2+y_n^4} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^4}+\frac{1}{n^4}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}\cdot\frac{n^4}{2} = \frac{1}{2}$$

Zatem $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^2+y^4}$ nie istnieje. W takim razie funkcja f nie jest ciągła w punkcie $(0,0)$.