Informatyka
WYKŁAD 7

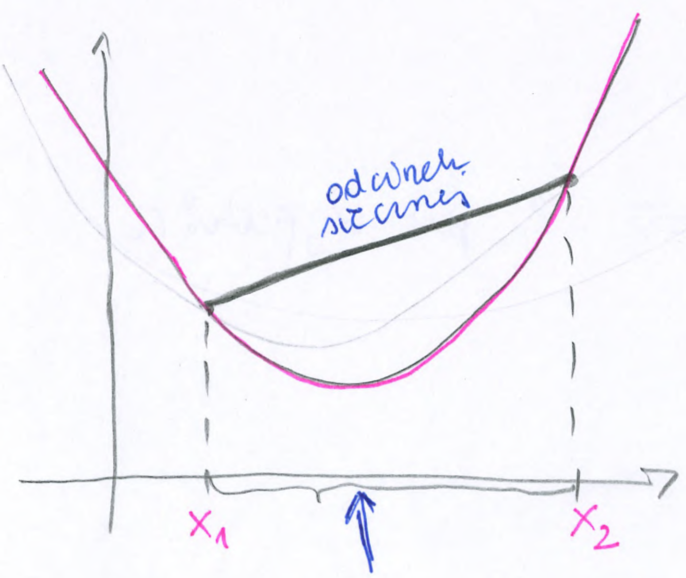
Badanie funkcji — wypukłość, wklęsłość, punkty przegięcia. Całka nieoznaczona, całkowanie przez części.

Definicja

Funkcja f jest wypukła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \le a < b < \infty$, jeśli:

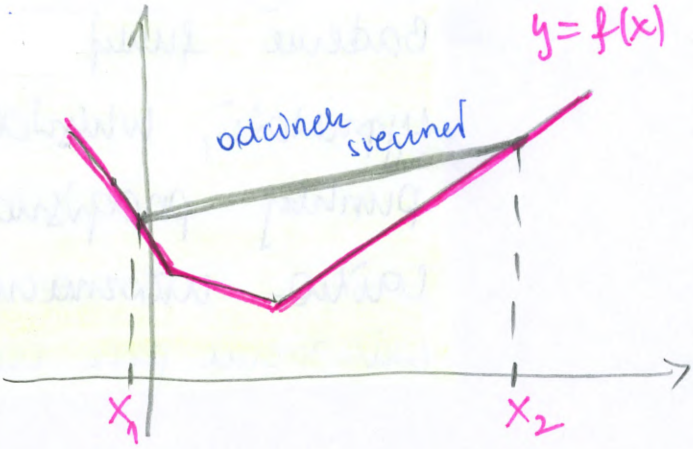
$$\underset{\substack{x_1, x_2 \in (a,b) \\ x_1 < x_2}}{\forall} \quad \underset{\lambda \in (0,1)}{\forall} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \le \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Geometrycznie warunek ten oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży powyżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu leżącym między punktami, przez które przechodzi sieczna. Czasem mówimy, że funkcja jest wypukła w dół.



tu leżą punkty o pierwszej współrzędnej $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$

f jest wypukła i jest ściśle wypukła



f jest wypukła ale nie jest ściśle wypukła

Definicja

Funkcja jest ściśle wypukła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jeśli

$$\underset{\substack{x_1, x_2 \in (a,b) \\ x_1 < x_2}}{\forall} \quad \underset{\lambda \in (0,1)}{\forall} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Geometrycznie warunek ten oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży powyżej fragmentu wykresu położonego między punktami, przez które przechodzi sieczna.

f jest ściśle wypukła $\Rightarrow$ f jest wypukła

(gdyż : $> \Rightarrow \geq$)

Definicja

Funkcja jest wklęsła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jeśli

$$\underset{\substack{x_1,x_2\in(a,b)\\ x_1<x_2}}{\forall} \ \underset{\lambda\in(0,1)}{\forall} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2).$$

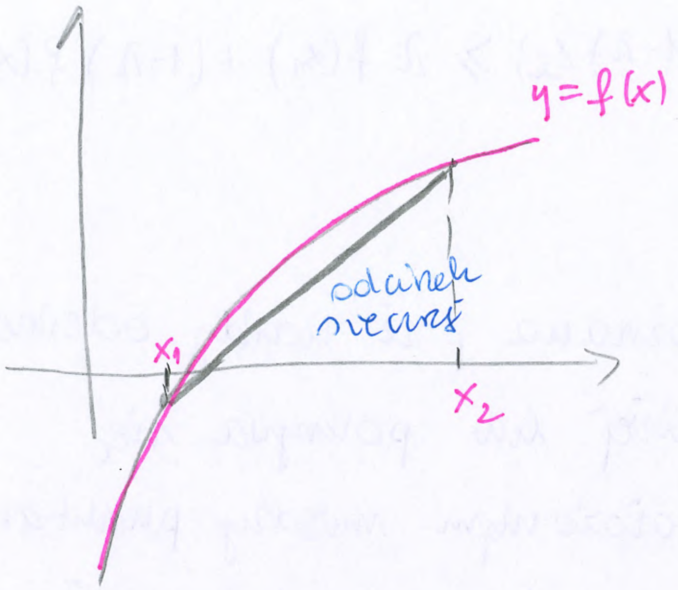
Geometrycznie warunek ten oznacza, że każdy odcinek siecznej wykresu leży poniżej lub pokrywa się z fragmentem wykresu położonym między punktami, przez które przechodzi sieczna. Czasem mówimy, że funkcja jest wypukła w górę.

Definicja

Funkcja jest ściśle wklęsła na przedziale (a,b), gdzie $-\infty \leq a < b \leq \infty$, jeśli

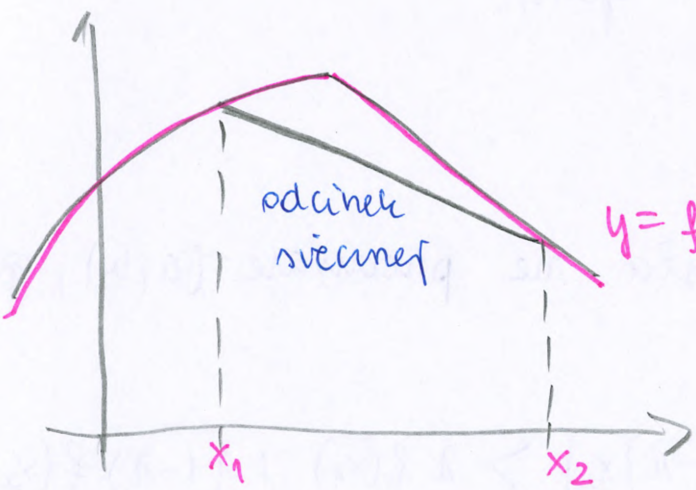
$$\underset{\substack{x_1,x_2\in(a,b)\\ x_1<x_2}}{\forall} \ \underset{\lambda\in(0,1)}{\forall} \quad f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

Geometrycznie oznacza to, że każdy odcinek siecznej wykresu leży poniżej fragmentu wykresu położonego między punktami, przez które przechodzi sieczna.



f jest wklęsła

i jest ściśle wklęsła



f jest wklęsła,

ale nie jest

ściśle wklęsła

Twierdzenie (warunek wystarczający wypukłości)

Jeżeli $f''(x) > 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to f jest ściśle wypukła na (a,b)

UWAGA Jeśli $f''(x) \geq 0$ w przedziale (a,b), przy czym równość $f''(x) = 0$ zachodzi tylko dla skończonej liczby punktów z (a,b), to f jest ściśle wypukła.

Twierdzenie (warunek wystarczający wklęsłości)

Jeżeli $f''(x) < 0$ dla każdego $x \in (a,b)$, to f jest ściśle wklęsła na (a,b).

UWAGA Jeśli $f''(x) \leq 0$ w przedziale (a,b), przy czym równość $f''(x) = 0$ zachodzi tylko dla skończonej liczby punktów z (a,b), to f jest ściśle wklęsła.

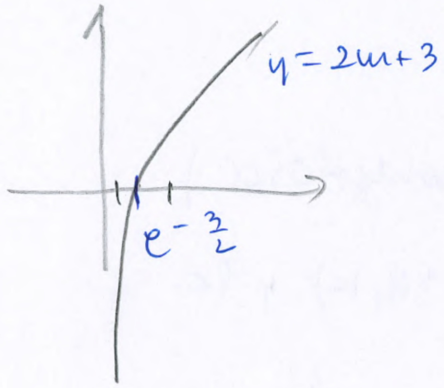
Przykład Wyznaczyć przedziały wypukłości i wklęsłości funkcji $f(x) = x^2 \ln x$.

$D_f = (0, \infty)$

$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x$

$f''(x) = 2 \ln x + 2x \cdot \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 2 + 1 = 2 \ln x + 3$

$f''(x) > 0 \iff 2\ln x + 3 > 0 \iff 2 \ln x > -3 \iff \ln x > -\frac{3}{2}$
$\iff x \in (e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$



$2 \ln x = -3$

$\ln x = -\frac{3}{2}$

$x = e^{-\frac{3}{2}}$

$f''(x) < 0 \iff x \in (0, e^{3/2})$

f jest wypukła w przedziale $(e^{-\frac{3}{2}}, \infty)$

f jest wklęsła w przedziale $(0, e^{-\frac{3}{2}})$

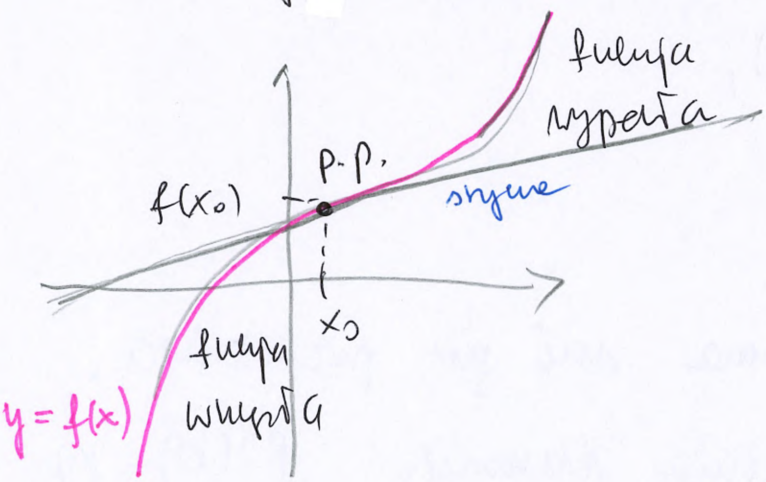
Punkty przegięcia wykresu funkcji

Definicja

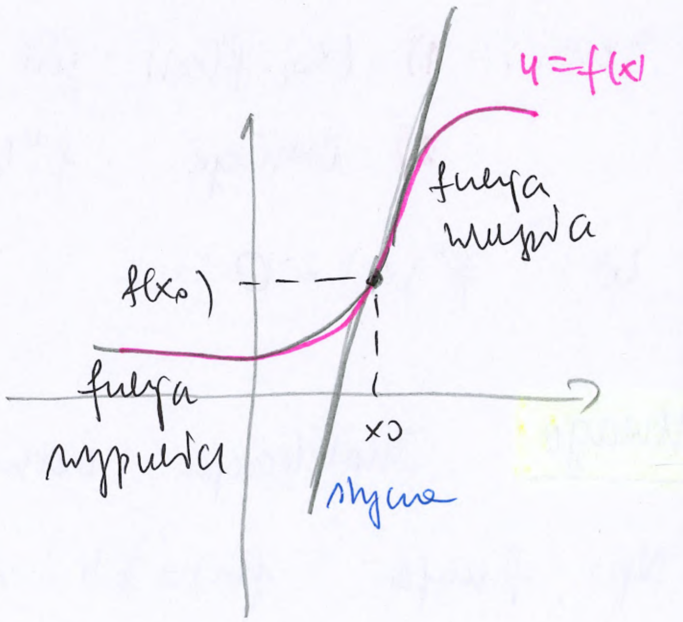
Niech f będzie określona przynajmniej na $O(x_0)$. Ponadto, niech $f'(x_0)$ istnieje (właściwa lub niewłaściwa). Punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\delta > 0$ taka, że:

- f jest ściśle wypukła na $S(x_0^-)$
- f jest ściśle wklęsła na $S(x_0^-)$

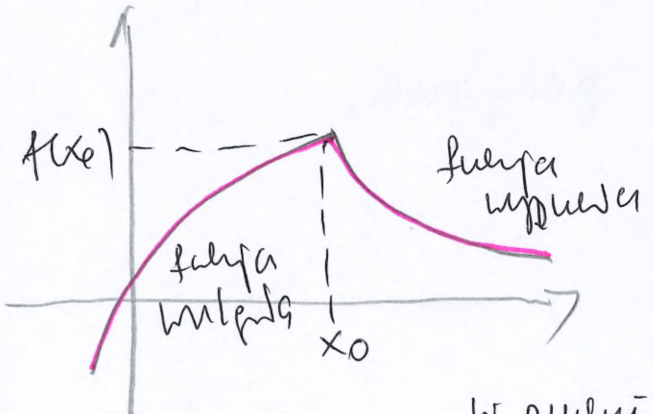
albo jest odwrotnie.



y = f(x) ma p.p.



y = f(x) ma p.p.



y = f(x) nie ma p.p. — w punkcie x_0 nie istnieje pochodna

Czyli: punkt $(x_0, f(x_0))$ należący do wykresu funkcji jest punktem przegięcia, gdy funkcja zmienia w nim rodzaj wypukłości i ma w tym punkcie styczną. Wtedy wykres funkcji przechodzi z jednej strony stycznej na drugą. Czasem, zamiast mówić, że punkt $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji, mówimy krótko, że x_0 jest punktem przegięcia funkcji f.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia p.p.)

Jeżeli: 1) $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia funkcji f

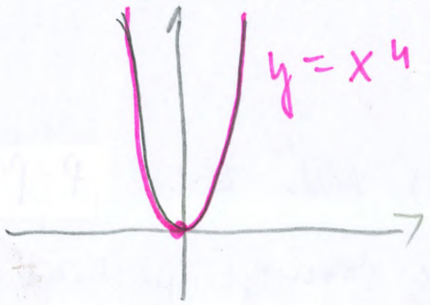
2) istnieje $f''(x_0)$,

to $f''(x_0) = 0$.

Uwaga Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa.

Np. funkcja $f(x) = x^4$ spełnia warunek: $f''(0) = 0$

bo mamy: $f'(x) = 4x^3$, $f''(x) = 12x^2$, $f''(0) = 0$, ale $(0,0)$ nie jest jej punktem przegięcia.



Twierdzenie (o lokalizacji p.p.)

Funkcja MOŻE MIEĆ punkty przegięcia JEDYNIE w punktach zerowania się jej drugiej pochodnej albo w punktach, w których druga pochodna nie istnieje.

Twierdzenie (I warunek wystarczający istnienia p.p.)

Jeżeli:

1) f ma w punkcie x_0 pochodną właściwą lub niewłaściwą

2) $$\underset{r>0}{\exists} \begin{cases} f''(x) < 0 & \text{dla każdego } x \in S(x_0^-, r) \\ f''(x) > 0 & \text{dla każdego } x \in S(x_0^+, r) \end{cases}$$

lub

2') $$\underset{r>0}{\exists} \begin{cases} f''(x) > 0 & \text{dla każdego } x \in S(x_0^-, r) \\ f''(x) < 0 & \text{dla każdego } x \in S(x_0^+, r) \end{cases}$$

f'' zmienia znak przy przejściu przez x_0

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

Przykład Znaleźć punkty przegięcia funkcji $f(x)=4x^2+\frac{1}{x}$

$D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$f'(x)=8x-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=8-\frac{-1\cdot 2x}{x^4}=8+\frac{2x}{x^4}=8+\frac{2}{x^3}=\frac{8x^3+2}{x^3}$

$D_{f''}=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

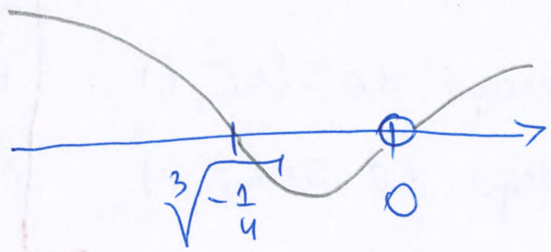
$\frac{8x^3+2}{x^3}=0 \iff 8x^3+2=0 \iff 8x^3=-2 \iff x^3=-\frac{1}{4} \iff$

$x=\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$ punkt podejrzany o istnienie p.p.

Badamy znak f'':

$f''(x)>0 \iff \frac{8x^3+2}{x^3}>0 \iff (8x^3+2)x^3>0 \iff$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$ $\quad 0$



$x\in\left(-\infty,\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right)\cup(0,\infty)$

$f''(x)<0 \iff x\in\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{4}},0\right)$

x	$\left(-\infty,\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right)$	$\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$	$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{4}},0\right)$	$(0,\infty)$
$f''(x)$	+	0	−	+
$f(x)$	wyp.	p.p.	wkl.	wyp.

f ma punkt przegięcia w punkcie

$\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{4}},\ 4\left(\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}\right)^2+\frac{1}{\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}}\right)$

lub

f ma punkt przegięcia dla $x_0=\sqrt[3]{-\frac{1}{4}}$

Twierdzenie (II warunek wystarczający istnienia p.p.)

Jeżeli:

1) $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

2) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

3) n jest liczbą nieparzystą $(n \geqslant 3)$,

to $(x_0, f(x_0))$ jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

Twierdzenie

Jeżeli:

1) $f''(x_0) = f'''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$,

2) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$,

3) n jest liczbą parzystą,

to $(x_0, f(x_0))$ nie jest punktem przegięcia wykresu funkcji f.

TU KOŃCZY SIĘ MATERIAŁ OBOWIĄZUJĄCY NA PIERWSZE KOLOKWIUM

CAŁKA NIEOZNACZONA

Definicja Funkcja F jest funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I, jeżeli: $\forall_{x \in I} \; F'(x) = f(x)$.

Przykład:

Podać przykłady funkcji pierwotnych dla:

A) dla $f(x) = \sqrt{x}$ funkcja pierwotna to $F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2}$ dla $x \in [0, \infty)$

gdyż $\left(\frac{2}{3} x^{3/2} \right)' = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$

ale również $F_1(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + 7$, gdyż $\left(\frac{2}{3} x^{3/2} + 7 \right)' = \sqrt{x}$

ogólnie: $F(x) = \frac{2}{3} x^{3/2} + C$, $C \in \mathbb{R}$

B) dla $f(x) = \sin x$ funkcja pierwotna to każda funkcja postaci $F(x) = -\cos x + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$, na $I = \mathbb{R}$,

$F'(x) = (-\cos x + C)' = -(-\sin x) + 0 = \sin x$

Twierdzenie Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Wtedy:

1) funkcja $F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$ też jest funkcją pierwotną funkcji f na I

2) każda funkcja pierwotna funkcji f na I jest postaci $F(x) + C$, gdzie $C \in \mathbb{R}$.

Twierdzenie (warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej)

Jeżeli f jest ciągła na przedziale I, to ma funkcję pierwotną na I.

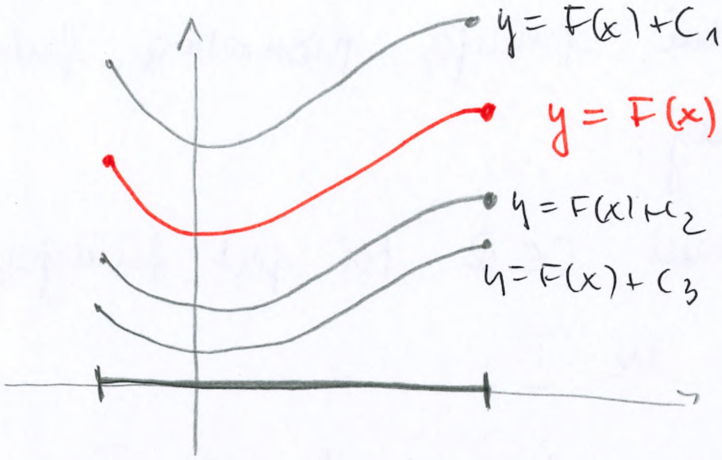
Definicja

Niech F będzie funkcją pierwotną funkcji f na przedziale I. Całką nieoznaczoną funkcji f na przedziale I nazywamy rodzinę funkcji

$$\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}.$$

Całkę nieoznaczoną funkcji f oznaczamy przez

$$\int f(x)\,dx \quad \text{lub krótko} \quad \int f.$$



całka nieoznaczona funkcji f

Umowa: będziemy pisać: $F(x) + C$ zamiast pisać $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$.

Twierdzenie Niech f ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy:

$$\underset{x \in I}{\forall} \quad \left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x).$$

Twierdzenie Niech funkcja f' ma funkcję pierwotną na przedziale I. Wtedy:

$$\underset{x \in I}{\forall} \quad \int f'(x)\,dx = f(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

Wzór	Zakres zmienności
$\int 0\,dx = C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$	$n \in \boldsymbol{N} \cup \{0\}$ oraz $x \in \boldsymbol{R}$
$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$p \in \{-2, -3, -4, \ldots\}$, $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\alpha \in \boldsymbol{R} \setminus \boldsymbol{Z}^*$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\lvert x\rvert + C$	$x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	$0 < a \neq 1$ oraz $x \in \boldsymbol{R}$
$\int e^x\,dx = e^x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \cos x\,dx = \sin x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\,x + C$	$x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\,x + C$	$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \boldsymbol{Z}$
$\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}\,x + C$	$x \in \boldsymbol{R}$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$	$\lvert x\rvert < 1$

Przykład Oblicz całki

a) $\int x^5 dx = \frac{1}{5+1} x^{5+1} + C = \frac{1}{6} x^6 + C$

b) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{1/3} dx = \frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} + C =$

$= \frac{1}{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4} x^{\frac{4}{3}} + C =$

$= \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4} + C$

c) $\int \frac{dx}{x^4} = \int x^{-4} dx = \frac{1}{-4+1} x^{-4+1} + C = -\frac{1}{3} x^{-3} + C$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{x^4}} = \int \frac{dx}{x^{\frac{4}{5}}} = \int x^{-\frac{4}{5}} dx = \frac{1}{-\frac{4}{5}+1} x^{-\frac{4}{5}+1} + C =$

$= \frac{1}{\frac{1}{5}} x^{\frac{1}{5}} + C = 5\sqrt[5]{x} + C$

e) $\int 4^x dx = \frac{1}{\ln 4} \cdot 4^x + C$

$(4^x)' = 4^x \cdot \ln 4$

f) $\int \frac{dx}{3^x} = \int 3^{-x} dx = \frac{-3^{-x}}{\ln 3} + C$

$\left(\frac{3^{-x}}{\ln 3}\right)' = \frac{-3^{-x}}{\ln 3}$

Twierdzenia o całkach nieoznaczonych

Twierdzenie (o liniowości całki nieoznaczonej)

Jeżeli f i g mają funkcje pierwotne, to

1) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2) $\int (f(x)-g(x))\,dx = \int f(x)\,dx - \int g(x)\,dx$

3) $\int (\alpha \cdot f(x))\,dx = \alpha \cdot \int f(x)\,dx$, $C \in \mathbb{R}$.

UWAGA

$$\int f(x)\cdot g(x)\,dx \neq \int f(x)\,dx \cdot \int g(x)\,dx \quad !$$

Przykład Oblicz całki

a) $\int (x-2e^x)\,dx = \int x\,dx - \int 2e^x\,dx = \int x\,dx - 2\int e^x\,dx =$

$= \frac{1}{2}x^2 - 2e^x + C$

b) $\int \frac{(\sqrt{x}-2\sqrt[3]{x})^2}{x}\,dx = \int \frac{x + 4(\sqrt[3]{x})^2 - 4\sqrt{x}\sqrt[3]{x}}{x}\,dx =$

$= \int 1\,dx + 4\int \frac{x^{2/3}}{x}\,dx - 4\int \frac{x^{\frac{5}{6}}}{x}\,dx =$

$= x + 4\int x^{-\frac{1}{3}}\,dx - 4\int x^{-\frac{1}{6}}\,dx =$

$= x + 4\cdot\frac{1}{\frac{2}{3}}x^{2/3} - 4\frac{1}{\frac{5}{6}}x^{\frac{5}{6}} + C = x + 6x^{2/3} - \frac{24}{5}x^{\frac{5}{6}} + C$

c) $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1}{1+x^2}dx - \int \frac{dx}{1+x^2}$

$= \int 1\,dx - \int \frac{dx}{1+x^2} = x - \operatorname{arc\,tg} x + C$

d) $\int |x-3|dx = \begin{cases} \int (x-3)\,dx, & x-3 \geq 0 \\ \int (-x+3)\,dx, & x-3 < 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \int x\,dx - 3\int dx, & x \geq 3 \\ -\int x\,dx + 3\int dx, & x < 3 \end{cases} =$

$= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - 3x + C_1, & x \geq 3 \\ -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C_2, & x < 3 \end{cases}$ – trzeba tak dobrać stałe C_1, C_2, aby otrzymać funkcję ciągłą, czyli aby:

$-\frac{1}{2}\cdot 9 + 9 + C_2 = \frac{1}{2}\cdot 9 - 9 + C_1$

$C_1 = -9 + 18 + C_2$

$C_1 = C_2 + 9$

$\int |x-3|dx = \begin{cases} -\frac{1}{2}x^2 + 3x + C, & x < 3 \\ \frac{1}{2}x^2 - 3x + C + 9, & x \geq 3 \end{cases}$

Twierdzenie (o całkowaniu przez części)

Jeżeli funkcje f i g mają ciągłe pochodne, to:

$$\boxed{\int f(x)\cdot g'(x)\,dx = f(x)\cdot g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.}$$

Przykłady:

a) $$\int x\cdot\sin x\,dx = \left\{\begin{array}{ll} f=x & f'=1 \\ g'=\sin x & g=\int g' = \\ & = -\cos x \end{array}\right\} =$$

$$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = \underline{-x\cos x + \sin x + C}$$

b) $$\int x^2 e^{-x}\,dx = \left\{\begin{array}{ll} f=x^2 & f'=2x \\ g'=e^{-x} & g=-e^{-x} \end{array}\right\} =$$

$$= -x^2e^{-x} + \int 2xe^{-x}\,dx = -x^2e^{-x} + 2\int xe^{-x}\,dx =$$

$$= \left\{\begin{array}{ll} f=x & f'=1 \\ g'=e^{-x} & g=-e^{-x} \end{array}\right\} = -x^2e^{-x} + 2\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right] =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2\cdot(-e^{-x}) + C =$$

$$= -x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + C =$$

$$= \underline{-e^{-x}(x^2+2x+2) + C}$$