POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski

Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:

Budynek B pokój 301

Mail: spawlo@prz.edu.pl

Tel.: 17 865 1305

POLA HARMONICZNE

Definicja

Polem harmonicznym nazywamy pole sinusoidalnie zmienne w czasie, tzn. każda z jego składowych ma postać funkcji:

$$f(\vec{r},t) = f_m(\vec{r})\sin\left(\overbrace{\omega t + \varphi(\vec{r})}^{\text{faza}}\right)$$

wektor wodzący punktu

amplituda

pulsacja
$\omega = 2\pi f = \mathrm{const}$

faza początkowa

$$\vec{r} = \left[x, \quad y, \quad z\right]$$

Pola harmoniczne w elektrodynamice

$$\rho(\vec{r},t) = \rho_m(\vec{r})\sin\big(\omega t + \varphi(\vec{r})\big)$$ - gęstość ładunku

$$\vec{J}(\vec{r},t) = \vec{J}_\mathrm{m}(\vec{r})\sin\big(\omega t + \varphi(\vec{r})\big)$$ - gęstość natężenia prądu

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_\mathrm{m}(\vec{r})\sin\big(\omega t + \varphi(\vec{r})\big)$$ - natężenie pola elektrycznego

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_\mathrm{m}(\vec{r})\sin\big(\omega t + \varphi(\vec{r})\big)$$ - natężenie pola magnetycznego

$$\vec{D}(\vec{r},t) = \vec{D}_\mathrm{m}(\vec{r})\sin\big(\omega t + \varphi(\vec{r})\big)$$ - indukcja elektryczna

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_\mathrm{m}(\vec{r})\sin\big(\omega t + \varphi(\vec{r})\big)$$ - indukcja magnetyczna

Pola zespolone

Każdej składowej pola harmonicznego przyporządkowujemy funkcję zespoloną:

$$\underline{f}(\vec{r},t) = \underline{f_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

gdzie: $$\underline{f_{\mathrm{m}}}(\vec{r}) = f_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\vec{r})}$$

amplituda zespolona

czyli: $$f_{\mathrm{m}}(\vec{r}) = \left|\underline{f_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\right|, \qquad \varphi(\vec{r}) = \arg\left(\underline{f_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\right)$$

Związek $\underline{f}(\vec{r},t)$ z $f(\vec{r},t)$

$$\underline{f}_{\mathrm{m}}(\vec{r},t)=f_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\vec{r})}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega \mathrm{t}}=f_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\left(\omega \mathrm{t}+\varphi(\vec{r})\right)}=$$

$$=f_{\mathrm{m}}(\vec{r})\left(\cos\left(\omega \mathrm{t}+\varphi(\vec{r})\right)+\mathrm{j}\sin\left(\omega \mathrm{t}+\varphi(\vec{r})\right)\right)=$$

$$=f_{\mathrm{m}}(\vec{r})\cos\left(\omega \mathrm{t}+\varphi(\vec{r})\right)+\mathrm{j}f_{\mathrm{m}}(\vec{r})\sin\left(\omega \mathrm{t}+\varphi(\vec{r})\right)$$

<u>Wnioski:</u>

1. $$f(\vec{r},t)=\mathrm{Im}\left(\underline{f}(\vec{r},t)\right)$$
2. Do pełnego określenia rzeczywistej funkcji pola $f(\vec{r},t)$ wystarcza znajomość samej amplitudy zespolonej $\underline{f}_{\mathrm{m}}(\vec{r})$

Pola zespolone w elektrodynamice

$$\underline{\rho}(\vec{r},t) = \underline{\rho_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$ - gęstość ładunku

$$\underline{\vec{J}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{J}_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$ - gęstość natężenia prądu

$$\underline{\vec{E}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{E}_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$ - natężenie pola elektrycznego

$$\underline{\vec{H}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{H}_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$ - natężenie pola magnetycznego

$$\underline{\vec{D}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{D}_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$ - indukcja elektryczna

$$\underline{\vec{B}}(\vec{r},t) = \underline{\vec{B}_{\mathrm{m}}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$ - indukcja magnetyczna

Równania Maxwella w postaci zespolonej

Wyprowadzenie

Prawo Ampère'a – Maxwella w postaci rzeczywistej: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{H} = \vec{J} + \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Postulujemy aby: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{H}} = \underline{\vec{J}} + \dfrac{\partial \underline{\vec{D}}}{\partial t}$

Zatem: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{H}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \underline{\vec{J}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\underline{\vec{D}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\right)$

Stąd: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\underline{\vec{H}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})\right)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{\vec{J}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} + \mathrm{j}\omega\underline{\vec{D}}_{\mathrm{m}}(\vec{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$

i ostatecznie: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\underline{\vec{H}}_{\mathrm{m}} = \underline{\vec{J}}_{\mathrm{m}} + \mathrm{j}\omega\underline{\vec{D}}_{\mathrm{m}}$

Analogicznie dla pozostałych równań Maxwella.

Równania Maxwella w postaci zespolonej

Prawo	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Ampère'a - Maxwella	$\oint_{L} \vec{H}_{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \underline{I}_{m} + \mathrm{j}\omega \iint_{S} \underline{\vec{D}}_{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{H}}_{m} = \underline{\vec{J}}_{m} + \mathrm{j}\omega \underline{\vec{D}}_{m}$
Faradaya	$\oint_{L} \underline{\vec{E}}_{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\mathrm{j}\omega \iint_{S} \underline{\vec{B}}_{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\, \underline{\vec{E}}_{m} = -\mathrm{j}\omega \underline{\vec{B}}_{m}$
Gaussa dla pola magnetycznego	$\oiint_{S} \vec{B}_{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$	$\mathrm{div}\, \underline{\vec{B}}_{m} = 0$
Gaussa dla pola elektrycznego	$\oiint_{S} \underline{\vec{D}}_{m} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \underline{Q}_{m}$	$\mathrm{div}\, \underline{\vec{D}}_{m} = \underline{\rho}_{m}$

Równania konstytutywne
(materiałowe)

$$\underline{\vec{D}}_m = \underline{\hat{\varepsilon}}\,\underline{\vec{E}}_m \qquad \underline{\vec{B}}_m = \underline{\hat{\mu}}\,\underline{\vec{H}}_m \qquad \underline{\vec{J}}_m = \underline{\hat{\gamma}}\,\underline{\vec{E}}_m$$

Na ogół (w ośrodkach anizotropowych):

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \underline{\varepsilon}_{11} & \underline{\varepsilon}_{12} & \underline{\varepsilon}_{13} \\ \underline{\varepsilon}_{21} & \underline{\varepsilon}_{22} & \underline{\varepsilon}_{23} \\ \underline{\varepsilon}_{31} & \underline{\varepsilon}_{32} & \underline{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \quad \underline{\hat{\mu}} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_{11} & \underline{\mu}_{12} & \underline{\mu}_{13} \\ \underline{\mu}_{21} & \underline{\mu}_{22} & \underline{\mu}_{23} \\ \underline{\mu}_{31} & \underline{\mu}_{32} & \underline{\mu}_{33} \end{bmatrix} \quad \underline{\hat{\gamma}} = \begin{bmatrix} \underline{\gamma}_{11} & \underline{\gamma}_{12} & \underline{\gamma}_{13} \\ \underline{\gamma}_{21} & \underline{\gamma}_{22} & \underline{\gamma}_{23} \\ \underline{\gamma}_{31} & \underline{\gamma}_{32} & \underline{\mu}_{33} \end{bmatrix}$$

W ośrodkach jednorodnych, izotropowych i liniowych parametry materiałowe są wielkościami stałymi.

<u>Uwaga:</u> Zespolone wartości parametrów materiałowych pozwalają uwzględnić ewentualne przesunięcia fazowe między wektorami pola elektromagnetycznego

Potencjały zespolone

Potencjały elektrodynamiczne **A**, *V*

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot}\mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad}V$$

Potencjały zespolone

$$\underline{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) = \underline{\mathbf{A}}_m(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \underline{V}(\mathbf{r}, t) = \underline{V}_m(\mathbf{r})\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Zatem:

$$\underline{\mathbf{B}}_m = \mathbf{rot}\underline{\mathbf{A}}_m \qquad \underline{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mathbf{A} - \mathbf{grad}\underline{V}_m$$

Równania dla potencjałów zespolonych

Założenie: $\varepsilon, \mu, \gamma = \text{const}$

Z prawa Ampèra – Maxwella $\mathbf{rot}\underline{\mathbf{H}}_m = \underline{\mathbf{J}}_m + \mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{D}}_m$ mamy:

$$\mathbf{rot}\underline{\mathbf{B}}_m = \underline{\mu\mathbf{J}}_m + \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\underline{\mathbf{E}}_m$$

$$\mathbf{rot}\left(\mathbf{rot}\underline{\mathbf{A}}_m\right) = \mu\underline{\mathbf{J}}_m + \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\left(-\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{A}}_m - \mathbf{grad}\underline{V}_m\right)$$

$$\mathbf{grad}\left(\mathrm{div}\underline{\mathbf{A}}_m\right) - \Delta\underline{\mathbf{A}}_m = \mu\underline{\mathbf{J}}_m + \omega^2\mu\varepsilon\underline{\mathbf{A}}_m - \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\,\mathbf{grad}\underline{V}_m$$

Korzystając ze swobody cechowania zakładamy:

$$\mathrm{div}\underline{\mathbf{A}}_m = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\underline{V}_m$$

(warunek Lorenza dla pól zespolonych)

i stąd ostatecznie:

$$\Delta\underline{\mathbf{A}}_m + \omega^2\mu\varepsilon\underline{\mathbf{A}}_m = -\mu\underline{\mathbf{J}}_m \quad \Leftarrow$$

równanie falowe dla zespolonego potencjału wektorowego

Równania dla potencjałów zespolonych

Założenie: $\varepsilon, \mu, \gamma = \text{const}$

Z prawa Gaussa $\operatorname{div} \underline{\mathbf{D}} = \underline{\rho}$ mamy:

$$\operatorname{div} \underline{\mathbf{E}} = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho} \qquad \operatorname{div}\left(-j\omega \underline{\mathbf{A}}_m - \mathbf{grad}\, \underline{V}_m\right) = \frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho}$$

Korzystając z tożsamości $\operatorname{div} \mathbf{grad}\, \underline{V}_m = \Delta \underline{V}_m$

oraz cechowania Lorenza $\operatorname{div} \underline{\mathbf{A}}_m = -\mathrm{j}\omega\mu\varepsilon \underline{V}_m$

otrzymujemy ostatecznie $\boxed{\Delta \underline{V}_m + \omega^2 \mu\varepsilon \underline{V}_m = -\frac{1}{\varepsilon} \underline{\rho}_m}$

Uwaga: po rozwiązaniu równania dla $\mathbf{A}$ (poprzedni slajd) potencjał V można obliczyć bezpośrednio z warunku cechowania Lorentza

Pola quasi-stacjonarne
(wolnozmienne)

Definicja

- Harmoniczne pole elektromagnetyczne w danym obszarze nazywamy quasi-stacjonarnym (wolnozmiennym) gdy najmniejszy rozmiar tego obszaru l jest znacznie mniejszy od długości λ fali elektromagnetycznej charakterystycznej dla częstotliwości f pola.

Ponieważ $\lambda = c/f$, warunek ten oznacza, że $l << c/f$ ($c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s).

Uwagi

- Dla pól quasi-stacjonarnych prądy przesunięcia Maxwella i efekty falowe w obszarach dielektrycznych są zaniedbywalne.
- W dobrych przewodnikach (metalach) prądy przesunięcia Maxwella są zawsze znikomo małe w porównaniu do prądów omowych

Wniosek

- Dla pól o częstotliwości 50 Hz długość fali w powietrzu wynosi ok. 6000 km. Oznacza to, że pola układów elektromaszynowych można praktycznie zawsze traktować jako quasi-stacjonarne i w ich analizie pomijać prądy przesunięcia.

Równania Maxwella dla pól quasi-stacjonarnych

Prawo	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Ampère'a - Maxwella	$\oint_L \underline{\mathbf{H}}_m \cdot \mathbf{dl} = \underline{I}_m$	$\mathbf{rot}\underline{\mathbf{H}}_m = \underline{\mathbf{J}}_m$
Faradaya	$\oint_L \underline{\mathbf{E}}_m \cdot \mathbf{dl} = -j\omega \iint_S \underline{\mathbf{B}}_m \cdot \mathbf{ds}$	$\mathbf{rot}\underline{\mathbf{E}}_m = -j\omega \underline{\mathbf{B}}_m$
Gaussa dla pola magnetycznego	$\oiint_S \underline{\mathbf{B}}_m \cdot \mathbf{ds} = 0$	$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}}_m = 0$
Gaussa dla pola elektrycznego	$\oiint_S \underline{\mathbf{D}}_m \cdot \mathbf{ds} = \underline{Q}_m$	$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{D}}_m = \underline{\rho}_m$

Równania dla potencjałów w polach quasi-stacjonarnych

Założenia: $\varepsilon, \mu, \gamma = \mathrm{const}$, oraz dodatkowo $\rho = 0$

Z prawa Ampère'a $\mathbf{rot}\underline{\mathbf{H}}_m = \underline{\mathbf{J}}_m$ mamy: $\mathbf{rotrot}\underline{\mathbf{A}}_m = \mu\underline{\mathbf{J}}_m$ i stąd:

$$\mathbf{grad}\left(\mathrm{div}\underline{\mathbf{A}}_m\right) - \Delta\underline{\mathbf{A}}_m = \mu\underline{\mathbf{J}}_m$$

Korzystając ze swobody cechowania przyjmujemy $\mathrm{div}\underline{\mathbf{A}}_m = 0$ (warunek Coulomba), oraz $V = 0$, zatem:

$$\Delta\underline{\mathbf{A}}_m = -\mu\underline{\mathbf{J}}_m$$

W obszarach przewodzących $\underline{\mathbf{J}}_m = \gamma\underline{\mathbf{E}}_m$, a ponieważ $\underline{\mathbf{E}}_m = -j\omega\mathbf{A}$, otrzymujemy ostatecznie:

$$\Delta\underline{\mathbf{A}}_m = \alpha^2\underline{\mathbf{A}}_m$$ - równanie Helmholtza

gdzie: $\alpha^2 = \mathrm{j}\omega\gamma\mu$ - stała propagacji przewodnika

W obszarach dielektrycznych: $\Delta\underline{\mathbf{A}}_m = 0$ (równanie Laplace'a)

Harmoniczne pole elektromagnetyczne w ośrodkach dielektrycznych

- Założenia
- Równania pola
- Rozwiązanie
- Interpretacja
- Uogólnienie
- Wnioski

Założenia

1. Ośrodek dielektryczny jednorodny, izotropowy i liniowy:

$$\gamma = 0, \quad \varepsilon, \mu = \text{const}$$

2. Brak źródeł:

$$\rho = 0, \quad \mathbf{J} = 0$$

3. Pole harmoniczne o pulsacji ω

4. Pole zależne tylko od jednej zmiennej kartezjańskiej z

$$\underline{\mathbf{E}}_m(x, y, z) = \underline{\mathbf{E}}_m(z)$$

$$\underline{\mathbf{B}}_m(x, y, z) = \underline{\mathbf{B}}_m(z)$$

Równania pola

Zespolone równania Maxwella

$$\mathbf{rot}\underline{\mathbf{H}}_m = \mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{D}}_m \qquad \mathbf{rot}\underline{\mathbf{E}}_m = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{B}}_m$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}}_m = 0 \qquad \mathrm{div}\,\underline{\mathbf{D}}_m = 0$$

Uwzględniając równania materiałowe

$$\underline{\mathbf{B}}_m = \mu\underline{\mathbf{H}}_m \qquad \underline{\mathbf{D}}_m = \varepsilon\underline{\mathbf{E}}_m$$

mamy:

$$\mathbf{rot}\underline{\mathbf{B}}_m = \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\underline{\mathbf{E}}_m \qquad \mathbf{rot}\underline{\mathbf{E}}_m = -\mathrm{j}\omega\underline{\mathbf{B}}_m$$

$$\mathrm{div}\,\underline{\mathbf{B}}_m = 0 \qquad \mathrm{div}\,\underline{\mathbf{E}}_m = 0$$

Rozwiązanie

<u>Uwaga</u>

Dla uproszczenia zapisów, w symbolach amplitud zespolonych będziemy dalej opuszczać podkreślenie oraz indeks „*m*"

(np.: $\mathbf{E} \equiv \underline{\mathbf{E}}_m$ itp.).

Z prawa Gaussa dla pola elektrycznego mamy:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \Rightarrow \quad E_z = \text{const}$$

Przyjmujemy $E_z = 0$, oraz dodatkowo $E_y = 0$, czyli:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x(z), & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Z prawa Faradaya: $\mathbf{rotE} = -\mathrm{j}\omega\mathbf{B} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{B} = \frac{\mathrm{j}}{\omega}\mathbf{rotE}$

$$\mathbf{rotE} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left[0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad 0 \right]$$

Zatem: $\mathbf{B} = [0, \quad B_y(z) \quad 0]$

gdzie: $B_y(z) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z}$

Zauważmy, że $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$

Rozwiązanie

Z prawa Ampera-Maxwella: $\mathbf{rotB} = \mathrm{j}\omega\mu\varepsilon\,\mathbf{E}$

$$\mathbf{rotB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & B_y(z) & 0 \end{vmatrix} = \left[-\frac{\partial B_y}{\partial z},\quad 0,\quad 0 \right]$$

Zatem: $-\frac{\partial B_y}{\partial z} = j\omega\mu\varepsilon\, E_x$, a ponieważ $B_y(z) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z}$, więc

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -k^2 E_x,$$ gdzie $k = \omega / c$ (liczba falowa), $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$

Stąd: $E_x = E_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} + E_m^- e^{\mathrm{j}kz}$

Rozwiązanie

$$B_y(z) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{k}{\omega}\left(E_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} - E_m^- e^{\mathrm{j}kz}\right) = \frac{1}{c}\left(E_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} - E_m^- e^{\mathrm{j}kz}\right)$$

czyli: $B_y = B_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} + B_m^- e^{\mathrm{j}kz}$, gdzie $B_m^+ = \frac{1}{c} E_m^+$, $B_m^- = -\frac{1}{c} E_m^-$

Zatem: $\frac{E_m^+}{B_m^+} = -\frac{E_m^-}{B_m^-} = c$

Impedancja falowa dielektryka:

$$Z = \frac{E_m^+}{H_m^+} = -\frac{E_m^-}{H_m^-} = \mu c = \mu\sqrt{\frac{1}{\mu\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

Dla próżni (powietrza): $Z_0 = 377\Omega$

Rozwiązanie

Rozwiązanie dla amplitud zespolonych

Pole elektryczne

$$\mathbf{E} = \left[E_x(z), \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$E_x = E_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} + E_m^- e^{\mathrm{j}kz}$$

Pole magnetyczne

$$\mathbf{B} = \left[0, \quad B_y(z) \quad 0 \right]$$

$$B_y = B_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} + B_m^- e^{\mathrm{j}kz}$$

gdzie

$$k = \omega / c \qquad c = 1 \Big/ \sqrt{\mu\varepsilon}$$

$$\frac{E_m^+}{B_m^+} = -\frac{E_m^-}{B_m^-} = c$$

Rozwiązanie

Sprowadzenie do postaci rzeczywistej

$$E_x(x,t) = \mathrm{Im}\left(\left(E_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} + E_m^- e^{\mathrm{j}kz}\right)e^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(E_m^+ e^{\mathrm{j}(\omega t - kz)} + E_m^- e^{\mathrm{j}(\omega t + kz)}\right) =$$

$$= \mathrm{Im}\left(E_m^+\left(\cos(\omega t - kz) + \mathrm{j}\sin(\omega t - kz)\right) + E_m^-\left(\cos(\omega t + kz) + \mathrm{j}\sin(\omega t + kz)\right)\right)$$

$$= E_m^+ \sin(\omega t - kz) + E_m^- \sin(\omega t + kz)$$

Analogicznie

$$B_y(z,t) = B_m^+ \sin(\omega t - kz) + B_m^- \sin(\omega t + kz)$$

Interpretacja

Płaska fala monochromatyczna liniowo spolaryzowana

$$E_x(x,t) = E_m^+ \sin(\omega t - kz) + E_m^- \sin(\omega t + kz)$$

fala biegnąca w kierunku osi OZ

fala biegnąca przeciwnie do osi OZ

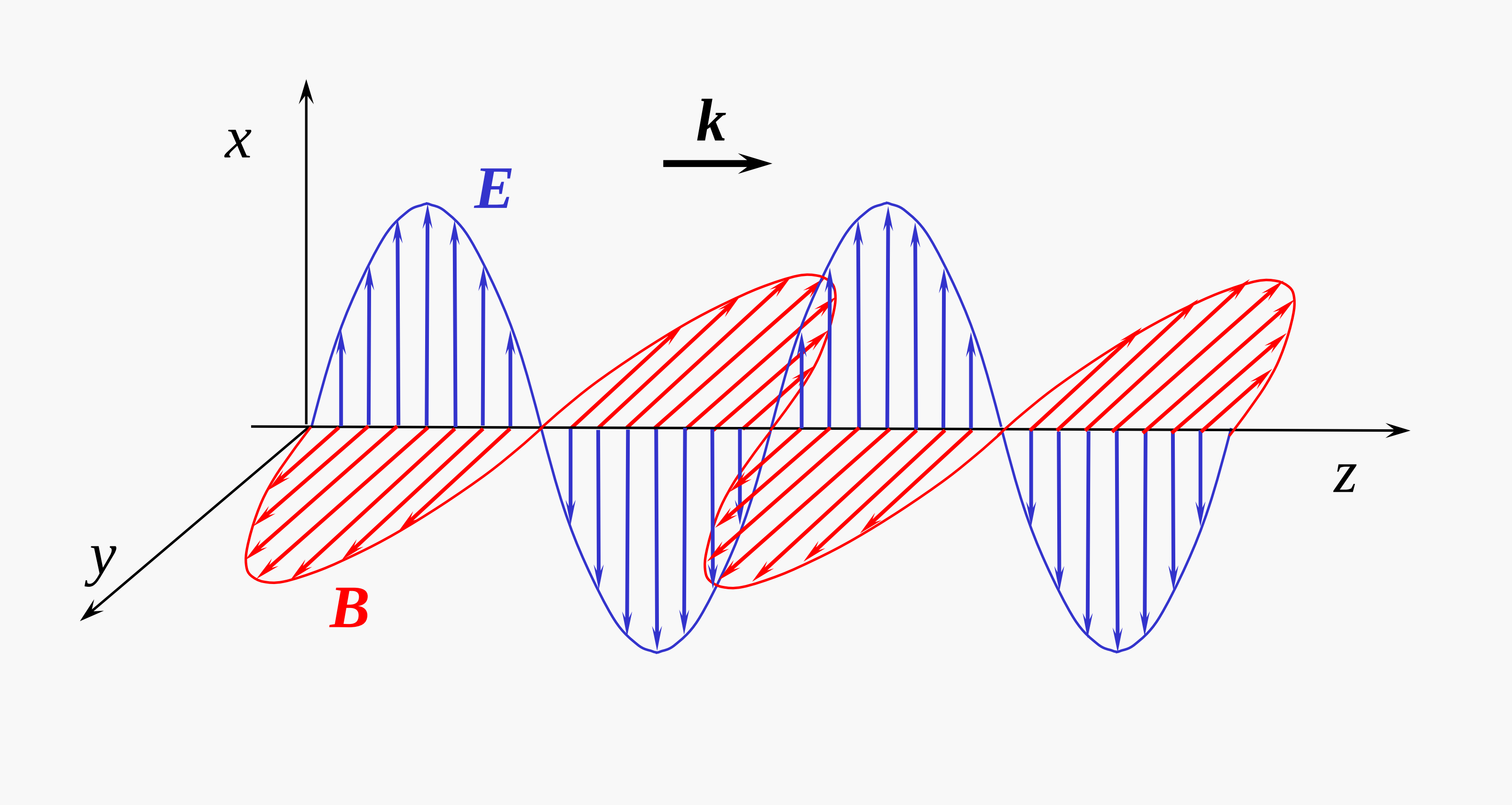
$$B_y(z,t) = B_m^+ \sin(\omega t - kz) + B_m^- \sin(\omega t + kz)$$

Długość fali $\lambda = \frac{2\pi}{k}$

Prędkość fali $v = \frac{\lambda}{T} = \frac{2\pi}{k}\frac{\omega}{2\pi} = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$

Interpretacja

Płaska fala monochromatyczna liniowo spolaryzowana



Uogólnienie

Płaska fala monochromatyczna liniowo spolaryzowana biegnąca w kierunku wektora **k**

$$\mathbf{E}(x,t) = \mathbf{E}_m \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \qquad \mathbf{B}(x,t) = \mathbf{B}_m \sin(\omega t - \mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$$

$$\mathbf{E} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{B} \perp \mathbf{k}, \quad \mathbf{E} \perp \mathbf{B}$$

k – wektor falowy, $|\mathbf{k}| = 2\pi/\lambda$, , **r** =[$x$, y, z]

$$\mathbf{E}_m = \left[E_{mx}, \quad E_{my}, \quad E_{mz}\right] \qquad \mathbf{B}_m = \left[B_{mx}, \quad B_{my}, \quad B_{mz}\right]$$

$$\frac{E_m}{B_m} = c$$

Wnioski

- Wektory **E** i **B** są prostopadłe do kierunku rozchodzenia się fali (fala elektromagnetyczna jest falą poprzeczną)
- Wektory **E** i **B** są wzajemnie prostopadłe i mają tę samą fazę
- Prędkość fali elektromagnetycznej w dielektryku zależy tylko od jego przenikalności elektrycznej i magnetycznej: $c = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$
- Stosunek amplitud wektorów **E** i **B** w polu płaskiej fali elektromagnetycznej równy jest jej prędkości

Harmoniczne pole elektromagnetyczne w ośrodkach przewodzących

- Założenia
- Równania pola
- Rozwiązanie
- Interpretacja (zjawisko naskórkowości)
- Padanie fali płaskiej na półprzestrzeń przewodzącą

Założenia

1. Ośrodek przewodzący jednorodny, izotropowy i liniowy:
   $\gamma, \varepsilon, \mu = \text{const}$

2. Brak niezrównoważonych ładunków: $\rho = 0$

3. Pole harmoniczne o pulsacji ω

4. Pole zależne tylko od jednej zmiennej kartezjańskiej z

$$\underline{\mathbf{E}}_m(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{E}}_m(z)$$
$$\underline{\mathbf{B}}_m(\mathbf{r}) = \underline{\mathbf{B}}_m(z)$$

Równania pola

Zespolone równania Maxwella

$$\mathbf{rotH} = \mathbf{J} \qquad \mathbf{rotE} = -\mathrm{j}\omega\mathbf{B}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = 0$$

Uwzględniając równania materiałowe

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \qquad \mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} \qquad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

mamy:

$$\mathbf{rotH} = \gamma\,\mathbf{E} \qquad \mathbf{rotE} = -\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{H} = 0 \qquad \mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$$

Rozwiązanie

Z prawa Gaussa dla pola elektrycznego mamy:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \; \Rightarrow \quad E_z = \mathrm{const}$$

Przyjmujemy $E_z = 0$, oraz dodatkowo $E_y = 0$, czyli:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x(z), & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie

Z prawa Faradaya: $\mathbf{rotE} = -\mathrm{j}\omega\mu\mathbf{H} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\mathbf{rotE}$

$$\mathbf{rotE} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x(z) & 0 & 0 \end{vmatrix} = \left[0, \quad \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad 0\right]$$

Zatem: $\mathbf{H} = [0, \quad H_y(z) \quad 0]$

gdzie: $H_y(z) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial z}$

Zauważmy, że $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$

Rozwiązanie

Z prawa Ampera: $\mathbf{rotH} = \gamma\ \mathbf{E}$

$$\mathbf{rotH} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & H_y(z) & 0 \end{vmatrix} = \left[-\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad 0, \quad 0 \right]$$

Zatem: $-\dfrac{\partial H_y}{\partial z} = \gamma E_x$, a ponieważ $H_y(z) = -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\dfrac{\partial E_x}{\partial z}$, więc

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} = -\mathrm{j}\omega\gamma\mu E_x$$

Stąd: $E_x = E_m^+ e^{-\alpha z} + E_m^- e^{\alpha z}$, gdzie $\alpha = \sqrt{\mathrm{j}\omega\gamma\mu}$

Rozwiązanie

oraz: $$H_y(z) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\mu}\frac{\partial E_x}{\partial \mathrm{z}} = \frac{\alpha}{\mathrm{j}\omega\mu}\left(E_m^+ e^{-\alpha z} - E_m^- e^{\alpha z}\right) =$$

$$\frac{\sqrt{\mathrm{j}\omega\gamma\mu}}{\mathrm{j}\omega\mu}\left(E_m^+ e^{-\alpha z} - E_m^- e^{\alpha z}\right) = \sqrt{\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\mu}}\left(E_m^+ e^{-\alpha z} - E_m^- e^{\alpha z}\right)$$

zatem: $$H_y(z) = H_m^+ e^{-\alpha z} - H_m^- e^{\alpha z}$$

gdzie: $$H_m^+ = \sqrt{\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\mu}} E_m^+ \qquad H_m^- = \sqrt{\frac{\gamma}{\mathrm{j}\omega\mu}} E_m^-$$

Impedancja falowa przewodnika: $$Z = \frac{E_m^+}{H_m^+} = \frac{E_m^-}{H_m^-} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma}}$$

Rozwiązanie

Rozwiązanie dla amplitud zespolonych

Pole elektryczne

$$\mathbf{E} = \left[E_x(z), \quad 0 \quad 0 \right]$$

$$E_x = E_m^+ e^{-\alpha z} + E_m^- e^{\alpha z}$$

Pole magnetyczne

$$\mathbf{H} = \left[0, \quad H_y(z), \quad 0 \right]$$

$$H_y = H_m^+ e^{-\alpha z} + H_m^- e^{\alpha z}$$

gdzie

$$\alpha = \sqrt{\mathrm{j}\omega\gamma\mu} = (1 + \mathrm{j})k$$

$$k = \sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}$$

$$\frac{E_m^+}{H_m^+} = \frac{E_m^-}{H_m^-} = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu}{\gamma}} \equiv Z$$

Rozwiązanie

Sprowadzenie do postaci rzeczywistej

$$E_x^+(x,t) = \mathrm{Im}\left(E_m^+ e^{-\alpha z} e^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(E_m^+ e^{-(1+\mathrm{j})kz} e^{\mathrm{j}\omega t}\right) = \mathrm{Im}\left(E_m^+ e^{-kz} e^{\mathrm{j}(\omega t - kz)}\right)$$
$$= \mathrm{Im}\left(E_m^+ e^{-kz}\left(\cos(\omega t - kz) + \mathrm{j}\sin(\omega t - kz)\right)\right) =$$
$$= E_m^+ e^{-kz}\sin(\omega t - kz)$$

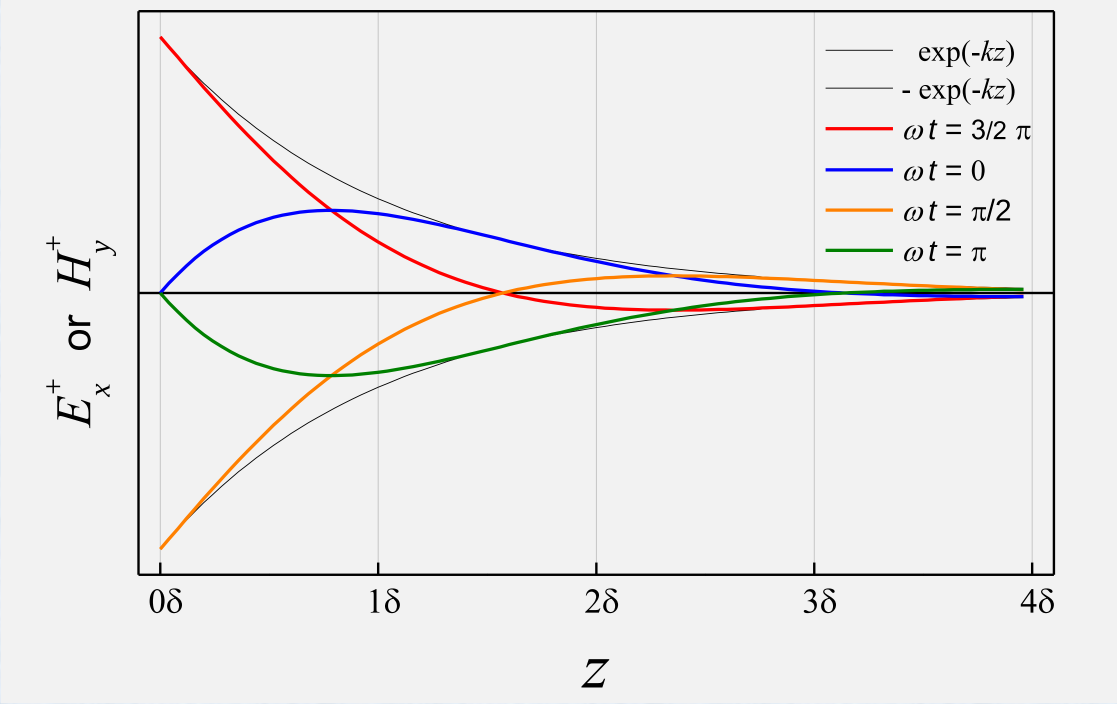
Analogicznie: $E_x^-(z,t) = E_m^- e^{kz}\sin(\omega t + kz)$

oraz: $H_y^+(z,t) = H_m^+ e^{-kz}\sin(\omega t - kz)$

$$H_y^-(z,t) = H_m^- e^{kz}\sin(\omega t + kz)$$

Interpretacja

Fala tłumiona (zjawisko naskórkowości)



Długość fali:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\delta$$

Zastępcza głębokość wnikania pola:

$$\delta = \frac{1}{k} = \sqrt{\frac{2}{\omega\gamma\mu}}$$

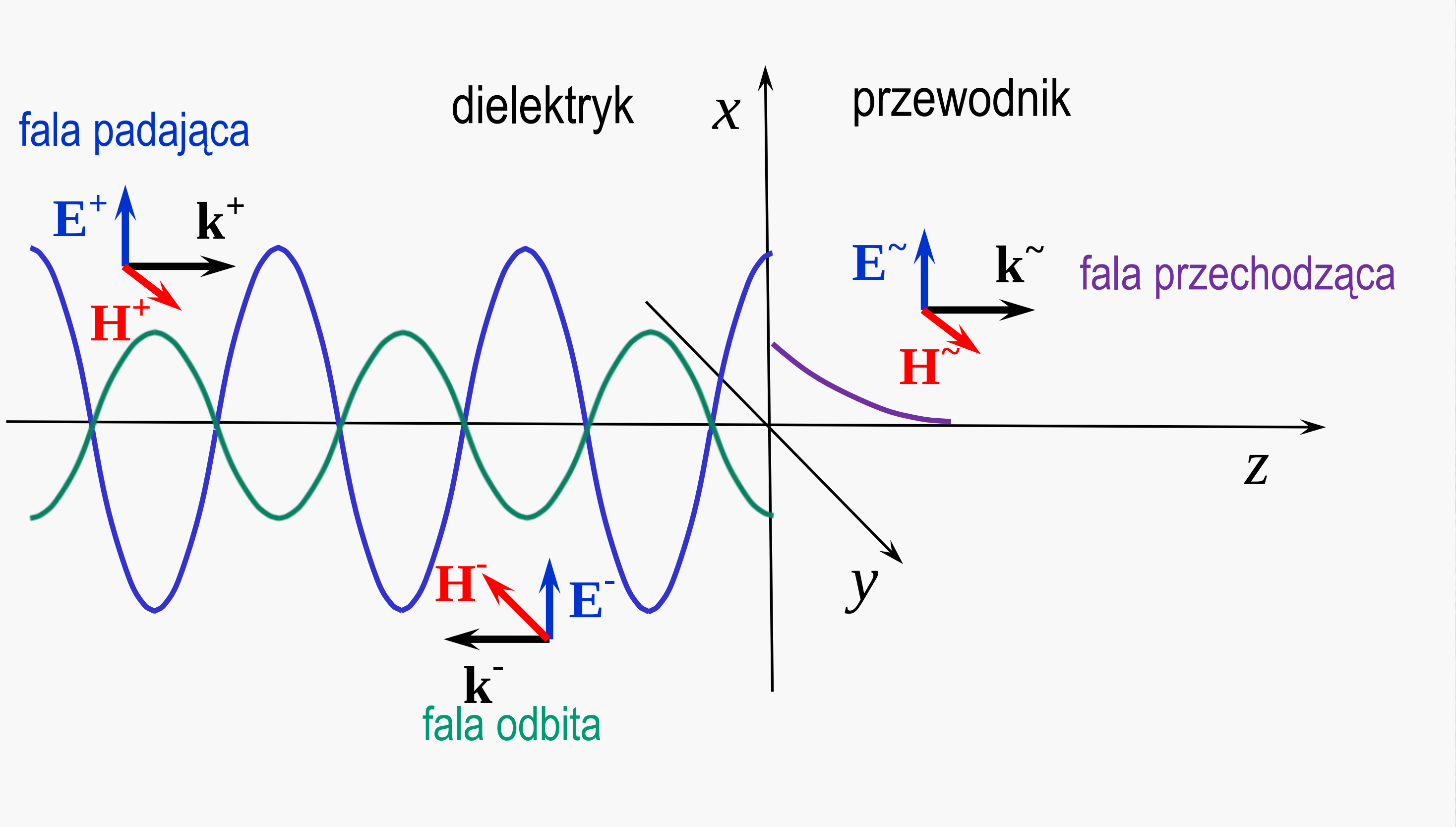
Prędkość fali:

$$v = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{2\omega}{\gamma\mu}}$$

Dla Cu przy częstotliwości 50 Hz:

λ = 59 mm, δ = 9,4 mm, v = 2,95 m/s

Padanie fali płaskiej na półprzestrzeń przewodzącą



Padanie fali płaskiej na półprzestrzeń przewodzącą

Rozwiązania ogólne

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x(z), & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0, & H_y(z) & 0 \end{bmatrix}$$

W dielektryku (z < 0)

$$E_x(z) = E_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} + E_m^- e^{\mathrm{j}kz}$$

$$H_x(z) = H_m^+ e^{-\mathrm{j}kz} + H_m^- e^{\mathrm{j}kz}$$

$$E_m^+ = Z_d H_m^+ \qquad E_m^- = -Z_d H_m^-$$

$$Z_d = \sqrt{\frac{\mu_d}{\varepsilon_d}}$$

W przewodniku (z > 0)

$$E_x^\sim(z) = E_m^\sim e^{-\alpha z}$$

$$H_y^\sim(z) = H_m^\sim e^{-\alpha z}$$

$$E_m^\sim = Z_c H_m^\sim$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mathrm{j}\omega\mu_c}{\gamma_c}}$$

Padanie fali płaskiej na półprzestrzeń przewodzącą

Warunki brzegowe (z = 0)

$$E_x(0) = E_x^{\sim}(0) \qquad\qquad H_x(0) = H_x^{\sim}(0)$$

$$E_m^{+} + E_m^{-} = E_m^{\sim} \qquad\qquad H_m^{+} + H_m^{-} = H_m^{\sim}$$

$$\begin{cases} H_m^{\sim} - H_m^{-} = H_m^{+} \\ Z_c H_m^{\sim} + Z_d H_m^{-} = Z_d H_m^{+} \end{cases}$$

Rozwiązanie

Współczynnik odbicia

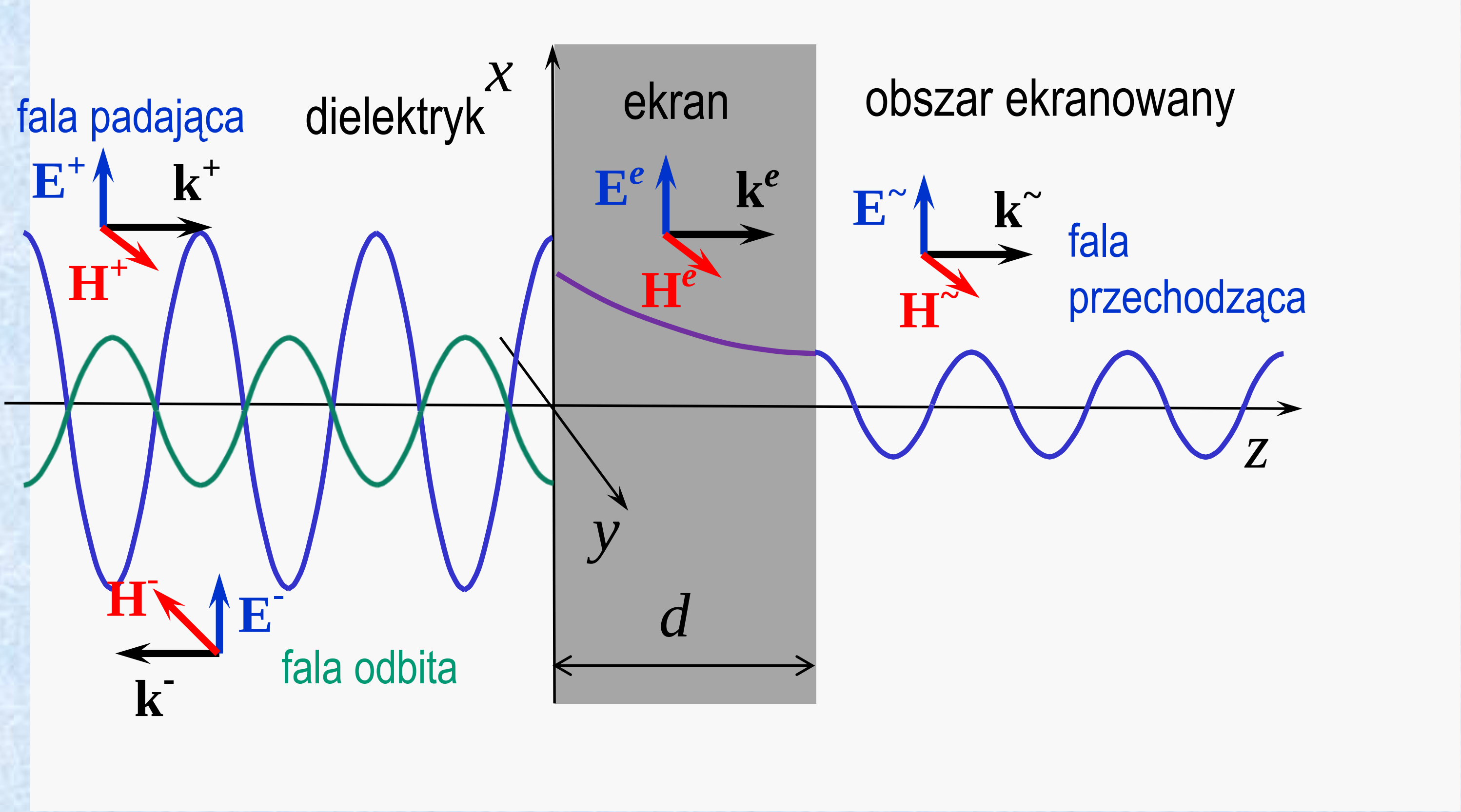
$$H_m^{-} = -RH_m^{+} \qquad E_m^{-} = RE_m^{+}$$

$$H_m^{\sim} = (1-R)H_m^{+} \qquad E_m^{\sim} = (1+R)E_m^{+}$$

$$R = \frac{Z_c - Z_d}{Z_c + Z_d}$$

5. Ekranowanie pola elektromagnetycznego

Ekran płaski



5. Ekranowanie pola elektromagnetycznego

Rozwiązania ogólne

dla $z < 0$

$$E_x^{\mathrm{I}}(z) = E_1^+ e^{-\Gamma_1 z} + E_1^- e^{\Gamma_1 z}$$

$$H_y^{\mathrm{I}}(z) = \frac{E_1^+}{Z_1} e^{-\Gamma_1 z} - \frac{E_1^-}{Z_1} e^{\Gamma_1 z}$$

dla $0 < z < d$ (ekran)

$$E_x^{\mathrm{II}}(z) = E_2^+ e^{-\Gamma_2 z} + E_2^- e^{\Gamma_2 z}$$

$$H_y^{\mathrm{II}}(z) = \frac{E_2^+}{Z_2} e^{-\Gamma_2 z} - \frac{E_2^-}{Z_2} e^{\Gamma_2 z}$$

dla $z > 0$

$$E_x^{\mathrm{III}}(z) = E_3^+ e^{-\Gamma_3 z}$$

$$H_y^{\mathrm{III}}(z) = \frac{E_3^+}{Z_3} e^{-\Gamma_3 z}$$

$$\mathbf{E} = \left[E_x(z), \quad 0 \quad 0\right] \qquad \mathbf{H} = \left[0, \quad H_y(z) \quad 0\right] \qquad \Gamma_k = \sqrt{\mathrm{j}\omega\mu_k\left(\gamma_k + \mathrm{j}\omega\varepsilon_k\right)}$$

5. Ekranowanie pola elektromagnetycznego

Warunki brzegowe

dla $z = 0$

$$E_1^+ + E_1^- = E_2^+ + E_2^-$$

$$E_2^+ - E_2^- = \frac{Z_2}{Z_1}\left(E_1^+ - E_1^-\right)$$

dla $z = d$

$$E_3^+ e^{-\Gamma_3 d} = E_2^+ e^{-\Gamma_2 d} + E_2^- e^{\Gamma_2 d}$$

$$E_3^+ e^{-\Gamma_3 d} = \frac{Z_3}{Z_2}\left(E_2^+ e^{-\Gamma_2 d} - E_3^+ e^{\Gamma_2 d}\right)$$

5. Ekranowanie pola elektromagnetycznego

Warunki brzegowe

zapis macierzowy

$$\xi_k \equiv \frac{Z_{k+1}}{Z_k}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \xi_1 & -\xi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_3^+ \\ E_3^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} & e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d} \\ \xi_2 e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} & -\xi_2 e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\xi_1 & 1-\xi_1 \\ 1-\xi_1 & 1+\xi_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_3^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} & e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d} \\ (1-\xi_2) e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} & (1+\xi_2) e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_2^+ \\ E_2^- \end{bmatrix}$$

5. Ekranowanie pola elektromagnetycznego

Macierz przejścia

$$\begin{bmatrix} E_3^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} & e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d} \\ (1-\xi_2)e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} & (1+\xi_2)e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1+\xi_1 & 1-\xi_1 \\ 1-\xi_1 & 1+\xi_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix}$$

stąd:

$$\begin{bmatrix} E_3^+ \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_1^+ \\ E_1^- \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$$ Macierz przejścia

gdzie:

$$p_{11} = \frac{1}{2}\left[(1+\xi_1)e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} + (1-\xi_1)e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d}\right], \quad p_{12} = \frac{1}{2}\left[(1-\xi_1)e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} + (1+\xi_1)e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d}\right]$$

$$p_{21} = \frac{1}{2}\left[(1+\xi_1)(1-\xi_2)e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} - (1-\xi_1)(1+\xi_2)e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d}\right],$$

$$p_{22} = \frac{1}{2}\left[(1-\xi_1)(1-\xi_2)e^{-(\Gamma_2+\Gamma_3)d} - (1+\xi_1)(1+\xi_2)\xi_2 e^{(\Gamma_2+\Gamma_3)d}\right]$$

5. Ekranowanie pola elektromagnetycznego

Rozwiązanie

Amplituda fali odbitej

$$E_1^- = -\frac{p_{12}}{p_{22}} E_1^+$$

Amplituda fali przechodzącej

$$E_3^+ = \frac{\det \mathbf{P}}{p_{22}} E_1^+$$

Współczynnik odbicia

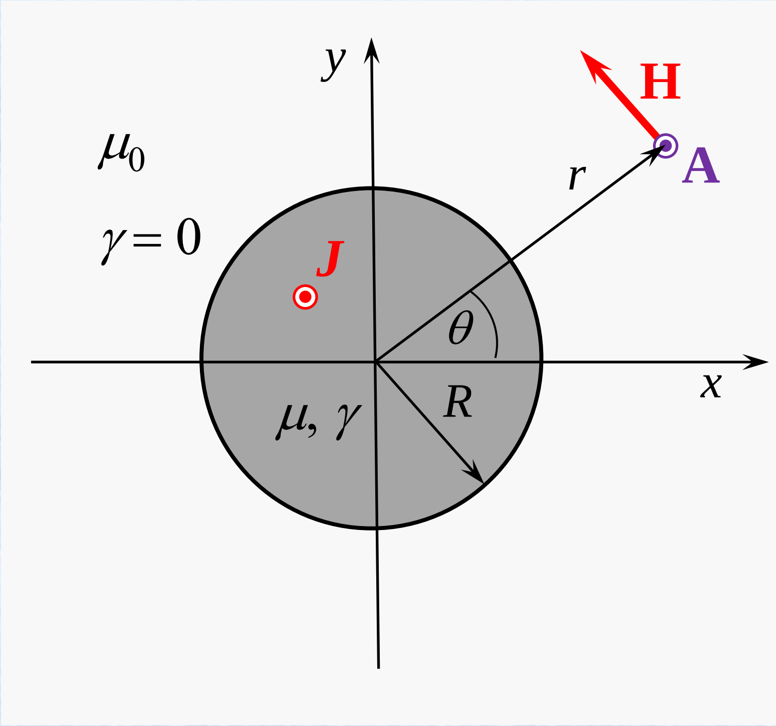
$$R = -\frac{p_{12}}{p_{22}}$$

Współczynnik transmisji

$$T = \frac{\det \mathbf{P}}{p_{22}}$$

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.1. Sformułowanie problemu



<u>Założenia</u>

$$\mu, \gamma = \text{const}$$

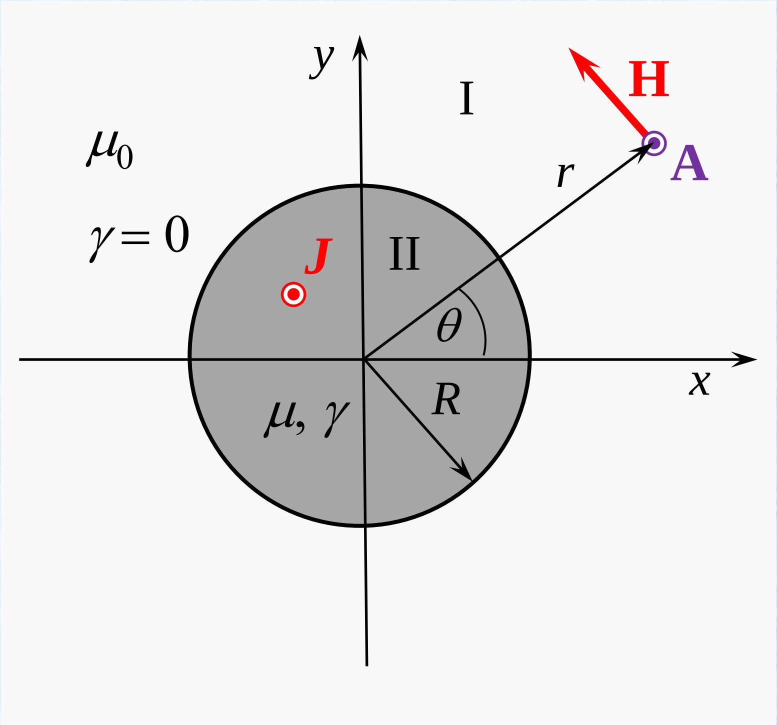
$$\underline{i} = I\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

$$\mathbf{J} = \left[0, \quad 0, \quad J(r)\right]$$

$$\mathbf{A} = \left[0, \quad 0, \quad A(r)\right]$$

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.1. Sformułowanie problemu



Równania:

$$\Delta \mathbf{A}^{\mathrm{I}} = 0, \qquad r > R$$

$$\Delta \mathbf{A}^{\mathrm{II}} = \alpha^2 \mathbf{A}^{\mathrm{II}}, \qquad r < R$$

Warunki brzegowe:

$$E_{\mathrm{s}}^{\mathrm{I}}(R) = E_{\mathrm{s}}^{\mathrm{II}}(R)$$

$$H_{\mathrm{s}}^{\mathrm{I}}(R) = H_{\mathrm{s}}^{\mathrm{II}}(R)$$

przy czym:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{j}\omega\mathbf{A} \qquad \mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$$

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla *r* > *R*

Laplasjan we współrzędnych cylindrycznych:

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\Delta A^{\mathrm{I}}(r) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

stąd: $$r\frac{\mathrm{d}A^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}r} = C \;\Rightarrow\; \frac{\mathrm{d}A^{\mathrm{I}}}{\mathrm{d}r} = \frac{C}{r}$$

$$A^{\mathrm{I}} = C\ln Dr$$

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla $r > R$

Obliczenie stałej C

$$\mathbf{H}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{A}^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\mu_0}\begin{vmatrix} \frac{1}{r}\hat{\mathbf{r}} & \hat{\boldsymbol{\theta}} & \frac{1}{r}\hat{\mathbf{z}} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A^{\mathrm{I}}(r) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial A^{\mathrm{I}}}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{C}{\mu_0 r} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Prawo Ampere'a

$$\oint_{\mathrm{L}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dl} = I$$

L – okrąg o promieniu $r > R$

$$\oint_{\mathrm{L}} \mathbf{H}\cdot\mathbf{dl} = \oint_{\mathrm{L}} H_\theta\,\mathrm{d}\,l = \oint_{\mathrm{L}}\left(-\frac{C}{\mu_0 r}\right)\mathrm{d}\,l = -\frac{C}{\mu_0 r}\oint_{\mathrm{L}}\mathrm{d}\,l = -\frac{C}{\mu_0 r}2\pi r = -\frac{2\pi}{\mu_0}C$$

stąd: $C = -\dfrac{\mu_0 I}{2\pi}$, czyli $A^{\mathrm{I}} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi}\ln\dfrac{1}{Dr}$

$$\boxed{H_\theta^{\mathrm{I}} = \frac{I}{2\pi r}}$$

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla $r < R$

$$\Delta A^{\mathrm{II}}(r) = \alpha^2 A^{\mathrm{II}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}A^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}r}\right) = \alpha^2 A^{\mathrm{II}} \;\Rightarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 A^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}A^{\mathrm{II}}}{\mathrm{d}r} - \alpha^2 A^{\mathrm{II}} = 0$$

Zmodyfikowane równanie Bessela

Rozwiązanie ogólne:

$$A^{\mathrm{II}}(r) = F\,\mathrm{I}_0(\alpha r) + G\,\mathrm{K}_0(\alpha r)$$

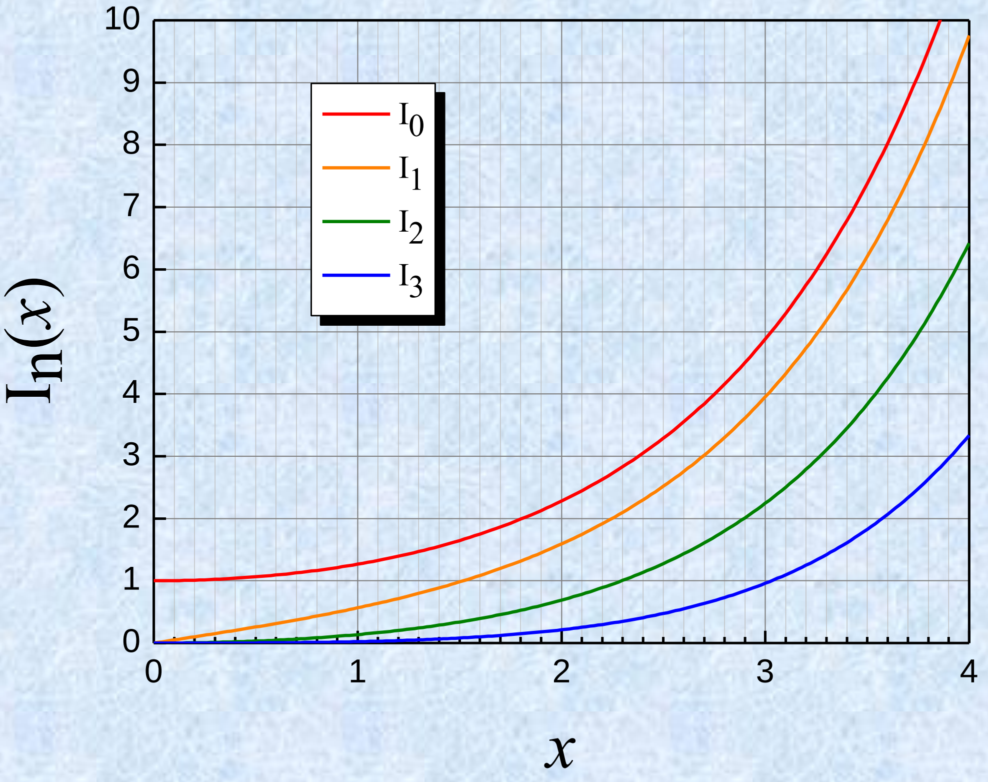
zmodyfikowana funkcja Bessela I-go rodzaju

zmodyfikowana funkcja Bessela II-go rodzaju (funkcja McDonalda)

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla *r* < *R*

zmodyfikowane funkcja Bessela I-go rodzaju



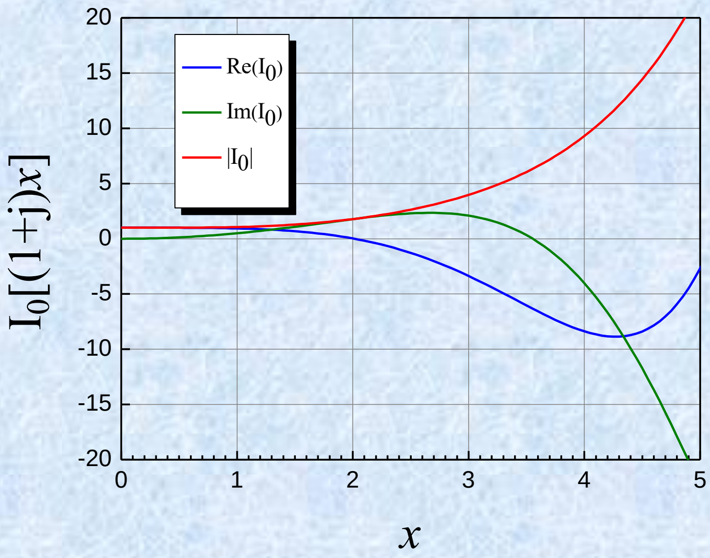
$$\lim_{r\to\infty} \mathrm{K}_0(\alpha r) = \infty \quad \Rightarrow \quad G = 0$$

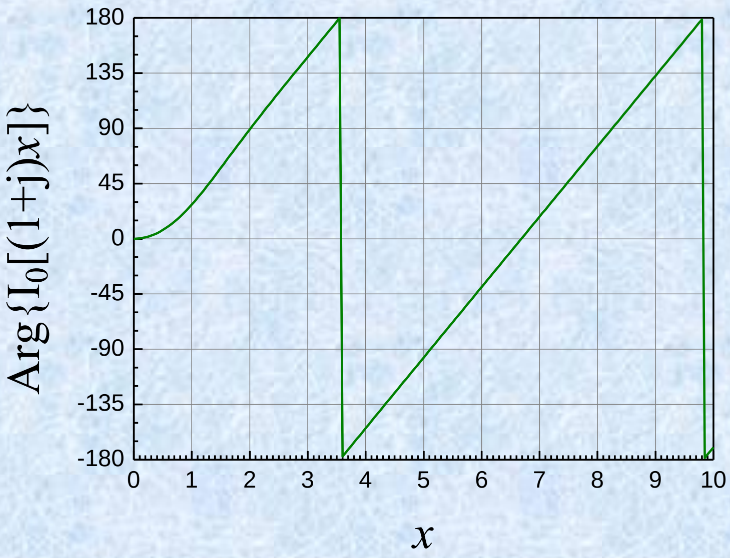
6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla *r* < *R*

$$A^{\mathrm{II}}(r) = F\mathrm{I}_0(\alpha r) = F\mathrm{I}_0\left(\sqrt{\mathrm{j}\omega\gamma\mu}\,r\right) = F\mathrm{I}_0\left((1+j)\sqrt{\frac{\omega\gamma\mu}{2}}\,r\right)$$

zmodyfikowane funkcja Bessela I-go rodzaju dla argumentu zespolonego (1+j)*x*





6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla $r < R$

Obliczenie stałej F

Na podstawie warunku brzegowego: $H_s^{\mathrm{I}}(R) = H_s^{\mathrm{II}}(R)$

mamy: $$\left.\frac{\partial A^{\mathrm{II}}}{\partial r}\right|_{r=R} = \frac{\mu}{\mu_0}\left.\frac{\partial A^{\mathrm{I}}}{\partial r}\right|_{r=R}$$

Stąd: $$F\alpha \mathrm{I}_0'(\alpha R) = \frac{\mu I}{2\pi R} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{\mu I}{2\pi \alpha R \mathrm{I}_0'(\alpha R)}$$

Zatem: $$A^{\mathrm{II}}(r) = \frac{\mu I}{2\pi \alpha R \mathrm{I}_0'(\alpha R)} \mathrm{I}_0(\alpha r)$$

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla $r < R$

Obliczenie stałej D

Na podstawie warunku brzegowego:

$$A^{\mathrm{I}}(R) = A^{\mathrm{II}}(R)$$

mamy:

$$\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{1}{DR} = \frac{\mu I}{2\pi \alpha R \mathrm{I}_0'(\alpha R)} \mathrm{I}_0(\alpha R) \quad \Rightarrow \quad D = -\frac{1}{R} \exp\left(\frac{\mu_r \Pi_0(\alpha R)}{2\pi \alpha R \mathrm{I}_0'(\alpha R)} \right)$$

6. Pole quasi-stacjonarne prostoliniowego przewodu o przekroju kołowym

6.2. Rozwiązanie dla *r* < *R*

Pole elektryczne $\underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{m}} = -j\omega\underline{\mathbf{A}}_{\mathrm{m}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{m}} = \left[0, \quad 0, \quad \underline{E}_{\mathrm{m}}\right]$

$$\underline{E}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{II}}(r) = \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0 \underline{I}_{\mathrm{m}} \ln R}{2\pi \mathrm{I}_0(\alpha R)} \mathrm{I}_0(\alpha r)$$

Rozkład gęstości prądu

$$\underline{\mathbf{J}}_{\mathrm{m}} = \gamma \underline{\mathbf{E}}_{\mathrm{m}}$$

$$\underline{J}_{\mathrm{m}}(r) = \frac{\mathrm{j}\omega\mu_0 \gamma \underline{I}_{\mathrm{m}} \ln R}{2\pi \mathrm{I}_0(\alpha R)} \mathrm{I}_0(\alpha r)$$

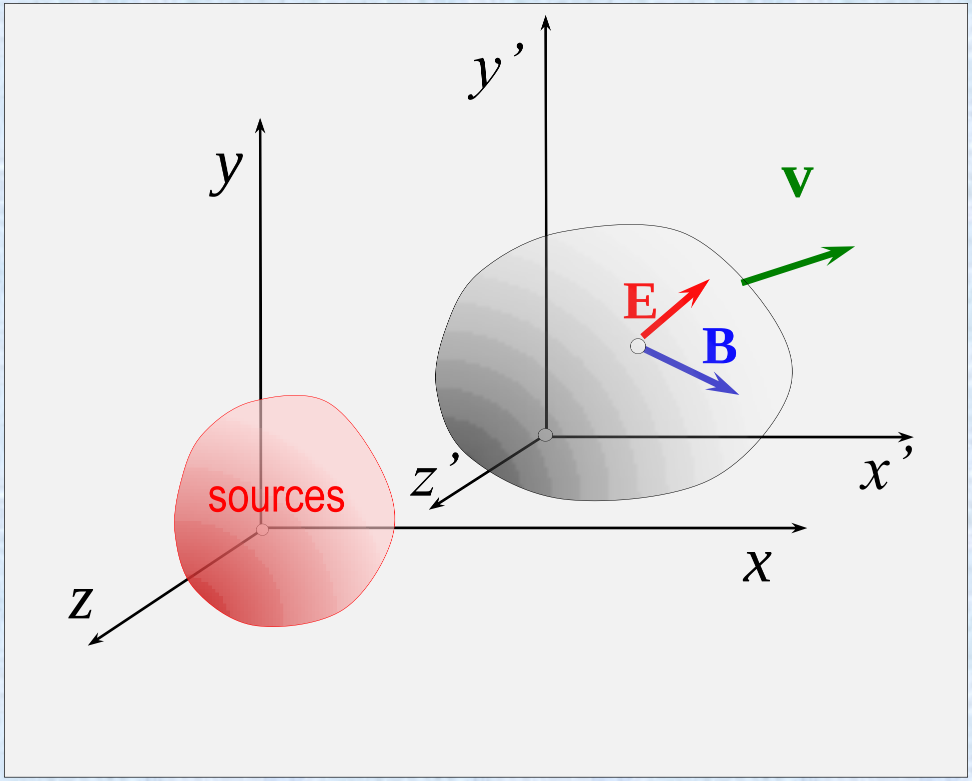
Pole magnetyczne

$$\underline{\mathbf{H}}_{\theta}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \underline{\mathbf{A}}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{II}} = \left[0, \quad -\frac{1}{\mu} \frac{\partial \underline{A}_{\mathrm{m}}^{\mathrm{II}}}{\partial r}, \quad 0\right]$$

$$\underline{H}_{\theta}^{\mathrm{II}}(r) = \frac{\mu_0 \alpha \underline{I}_{\mathrm{m}} \ln R}{2\pi \mu \mathrm{I}_0(\alpha R)} \mathrm{I}_0'(\alpha r)$$

7. Równania elektrodynamiki dla ciał poruszających się

7.1. Analizowany układ



Założenie:

$$v << c$$

7. Równania elektrodynamiki dla ciał poruszających się

7.2. Pole elektryczne w układzie ruchomym

Prawo Ampera-Maxwella: $\mathbf{rotH} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$

$\mathbf{D} = \mathbf{D}(x, y, z, t)$

Ale w układzie ruchomym: $x = x(t), \quad y = y(t), \quad x = y(t)$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \rightarrow \frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

$$\mathbf{v} = \left[\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t}, \quad \frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,t}, \quad \frac{\mathrm{d}\,z}{\mathrm{d}\,t}\right] \qquad \nabla = \left[\frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial z}\right]$$

zatem:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t} = \left(\mathbf{v} \cdot \nabla\right)\mathbf{D} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

7. Równania elektrodynamiki dla ciał poruszających się

7.2. Pole elektryczne w układzie ruchomym

Z tożsamości wektorowej

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$

mamy:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{D} = \mathbf{v}(\nabla \cdot \mathbf{D}) - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{D}) - \mathbf{D}(\nabla \cdot \mathbf{v}) + (\mathbf{D} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

ale: $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} = \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$

czyli ostatecznie:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{D}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} + \mathbf{rot}(\mathbf{D} \times \mathbf{v})$$

7. Równania elektrodynamiki dla ciał poruszających się

7.3. Pole magnetyczne w układzie ruchomym

Prawo Faradaya: $\mathbf{rot}\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

$\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z, t), \qquad x = x(t), \quad y = y(t), \quad x = y(t)$

Postępując analogicznie jak dla pola elektrycznego otrzymujemy:

$$\frac{\mathrm{d}\,\mathbf{B}}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v})$$

7. Równania elektrodynamiki dla ciał poruszających się

7.4. Transformacje Lorentza dla pola elektromagnetycznego

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B}_{\perp} - \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{E}}{c^2}\right)$$

Dla $v << 1: \quad \gamma \approx 1$

$$\mathbf{E}'_{\parallel} = \mathbf{E}_{\parallel} \qquad \mathbf{E}'_{\perp} = \mathbf{E}_{\perp} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}$$

$$\mathbf{B}'_{\parallel} = \mathbf{B}_{\parallel} \qquad \mathbf{B}'_{\perp} = \mathbf{B}_{\perp}$$

7. Równania elektrodynamiki dla ciał poruszających się

7.5. Równania Maxwella w układzie ruchomym

$$\mathbf{rotH} = \gamma\,\mathbf{E}' + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \gamma\,\mathbf{v} \times \mathbf{B} + \rho\mathbf{v} + \mathbf{rot}\left(\mathbf{D} \times \mathbf{v}\right)$$

$$\mathbf{rotE}' = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$$