POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski
spawlo@prz.edu.pl

4. Pole elektromagnetyczne w ośrodkach materialnych

4.1. Pole elektryczne w dielektrykach

4.2. Pole elektryczne w przewodnikach

4.3. Pole magnetyczne w ośrodkach materialnych

4.4. Makroskopowe równania Maxwella

4.1. Pole elektryczne w dielektrykach

4.1.1. Wektor indukcji elektrycznej *D*

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$$

ρ - makroskopowa gęstość ładunku (tzn. uśredniona po objętości)

Na podstawie twierdzenia Gaussa mamy:

$$\oiint_{S} \vec{D} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = Q$$

Jednostką indukcji elektrycznej jest [C/m^2].

4.1. Pole elektryczne w dielektrykach

4.1.2. Zależność między *D* i *E*

Ogólnie: $\vec{D} = \widehat{\varepsilon}\vec{E}$ $\widehat{\varepsilon}$ - przenikalność elektryczna

- W próżni: $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon_0$
- W ośrodkach jednorodnych, izotropowych i liniowych: $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon = \text{const}$
- W ośrodkach niejednorodnych: $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon(\vec{r}) = \varepsilon(x, y, z)$
- W ośrodkach nieliniowych: $\widehat{\varepsilon} = \varepsilon\left(E\right)$
- W ośrodkach anizotropowych: $\widehat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}$

4.2. Pole elektryczne w przewodnikach

4.1.3. Zależność między $\boldsymbol{J}$ i $\boldsymbol{E}$ (lokalne prawo Ohma)

Ogólnie: $\vec{J} = \widehat{\gamma}\vec{E}$ $\qquad \widehat{\gamma}$ - konduktywność

- W ośrodkach jednorodnych, izotropowych, liniowych, w stałej temperaturze:

$$\widehat{\gamma} = \gamma = \mathrm{const}$$

- W ośrodkach niejednorodnych: $\widehat{\gamma} = \gamma(\vec{r}) = \gamma(x, y, z)$

- W ośrodkach nieliniowych: $\widehat{\gamma} = \gamma(E)$

- W ośrodkach anizotropowych: $\widehat{\gamma} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$

4.3. Pole magnetyczne w ośrodkach materialnych

4.3.1. Wektor natężenia pola magnetycznego $\vec{H}$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{H} = \vec{J}_c$$

$\vec{J}_c = \vec{J} + \vec{J}_p$ - makroskopowa gęstość prądu całkowitego

$\vec{J}_p = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ - gęstość prądu przesunięcia

Na podstawie twierdzenia Stokes'a mamy:

$$\oint_L \vec{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

Jednostką natężenia pola magnetycznego jest [A/m].

4.3. Pole magnetyczne w ośrodkach materialnych

4.3.2. Zależność między *B* i *H*

Ogólnie: $\vec{B} = \widehat{\mu}\vec{H}$ $\widehat{\mu}$ - przenikalność elektryczna

- W próżni: $\widehat{\mu} = \mu_0$
- W ośrodkach jednorodnych, izotropowych i liniowych: $\widehat{\mu} = \mu = \mathrm{const}$
- W ośrodkach niejednorodnych: $\widehat{\mu} = \mu(\vec{r}) = \mu(x, y, z)$
- W ośrodkach nieliniowych: $\widehat{\mu} = \mu(H)$
- W ośrodkach anizotropowych: $\widehat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} & \mu_{13} \\ \mu_{21} & \mu_{22} & \mu_{23} \\ \mu_{31} & \mu_{32} & \mu_{33} \end{bmatrix}$

4.4. Makroskopowe równania Maxwella

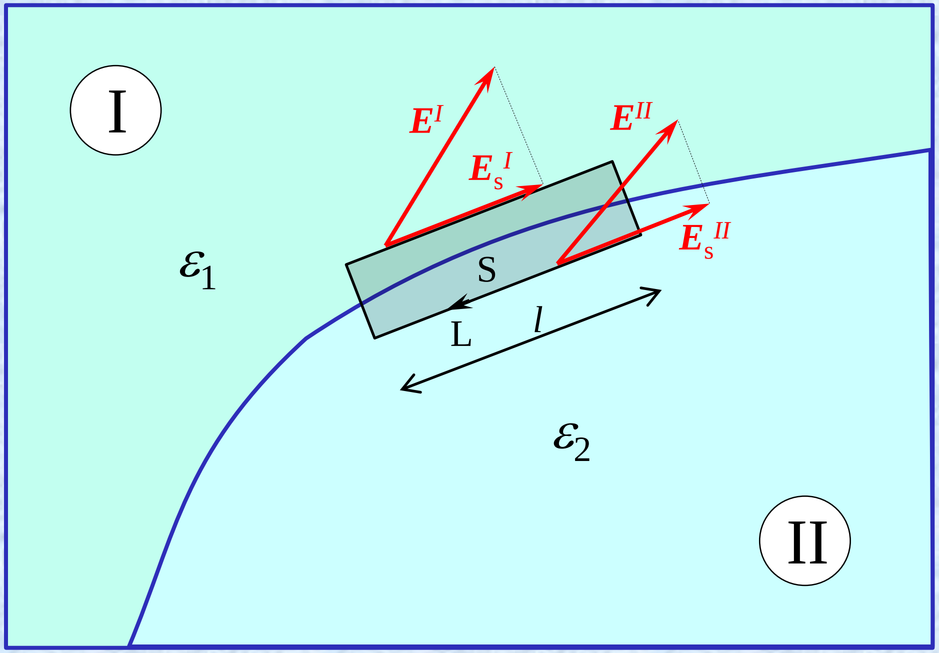
Prawo	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Ampere'a-Maxwella	$\oint_L \vec{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$
Faradaya	$\oint_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Gaussa dla pola magnetycznego	$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$	$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$
Gaussa dla pola elektrycznego	$\oiint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = Q$	$\mathrm{div}\, \vec{D} = \rho$

Równania materiałowe (konstytutywne)
$\vec{D} = \hat{\varepsilon}\vec{E}$
$\vec{B} = \hat{\mu}\vec{H}$
$\vec{J} = \hat{\gamma}\vec{E}$

5. Klasyczne warunki brzegowe elektrodynamiki

5. Klasyczne warunki brzegowe elektrodynamiki

5.1. Warunek brzegowy dla natężenia pola elektrycznego



Prawo Faradaya

$$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}s}$$

$$S \to 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}s} \to 0 \quad \Rightarrow \quad \oint_L \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = 0$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = E_s^{\mathrm{I}} l - E_s^{\mathrm{II}} l = 0$$

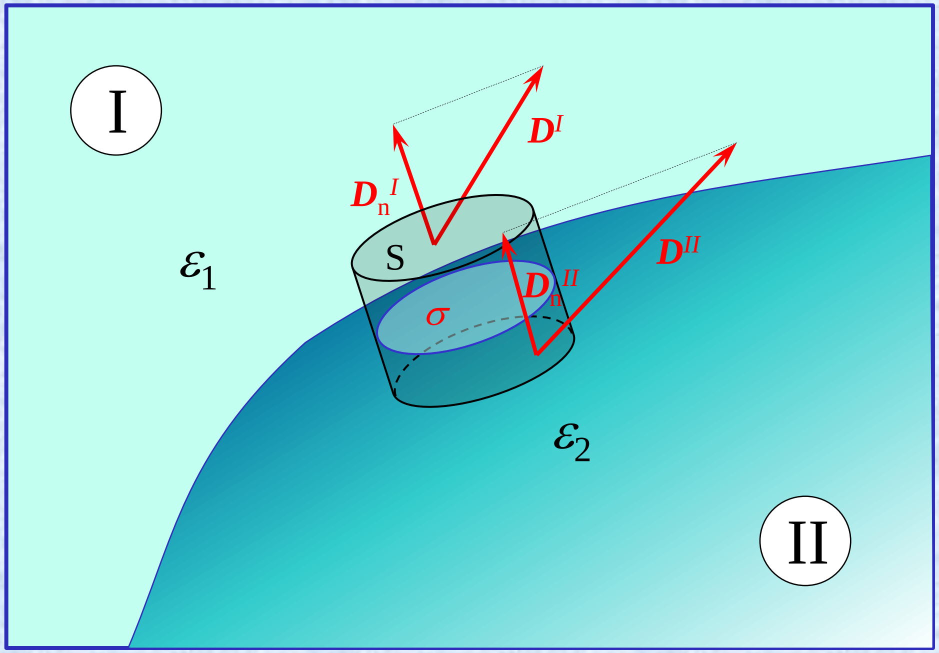
zatem:

$$E_s^{\mathrm{I}} = E_s^{\mathrm{II}}$$

Wniosek:

Styczna składowa natężenia pola elektrycznego na powierzchni granicznej jest zawsze ciągła.

5.2. Warunek brzegowy dla indukcji elektrycznej



Prawo Gaussa

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = Q$$

$$\oiint_S \vec{D} \cdot \overrightarrow{ds} = D_n^I S - D_n^{II} S$$

$$Q = \sigma \cdot S$$

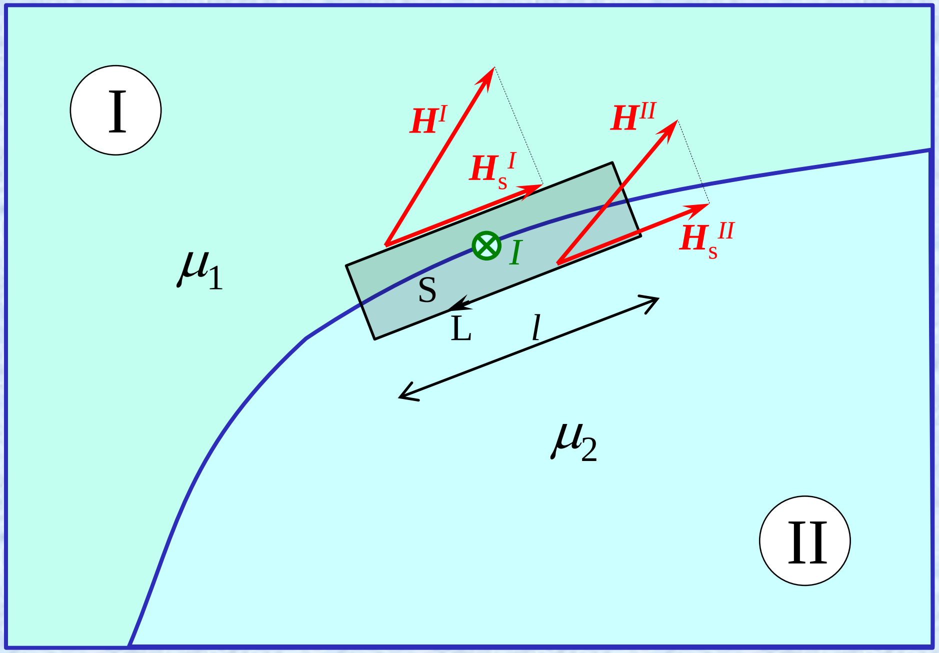
zatem:

$$D_n^{\mathrm{I}} - D_n^{\mathrm{II}} = \sigma$$

Wniosek:

Różnica składowych normalnych indukcji elektrycznej po obu stronach powierzchni granicznej dielektryka równa jest lokalnej wartości gęstości powierzchniowej ładunku.

5. 3. Warunek brzegowy dla natężenia pola magnetycznego



Prawo Ampera-Maxwella

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = i + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{D} \cdot \vec{\mathrm{d}s}$$

$$S \to 0 \quad \Rightarrow \quad \iint_S \vec{D} \cdot \vec{\mathrm{d}s} \to 0, \quad i = I \cdot l$$

I – gęstość liniowa prądu powierzchniowego

$$\oint_L \vec{H} \cdot \vec{\mathrm{d}l} = H_s^{\mathrm{I}} \cdot l - H_s^{\mathrm{II}} \cdot l = I \cdot l$$

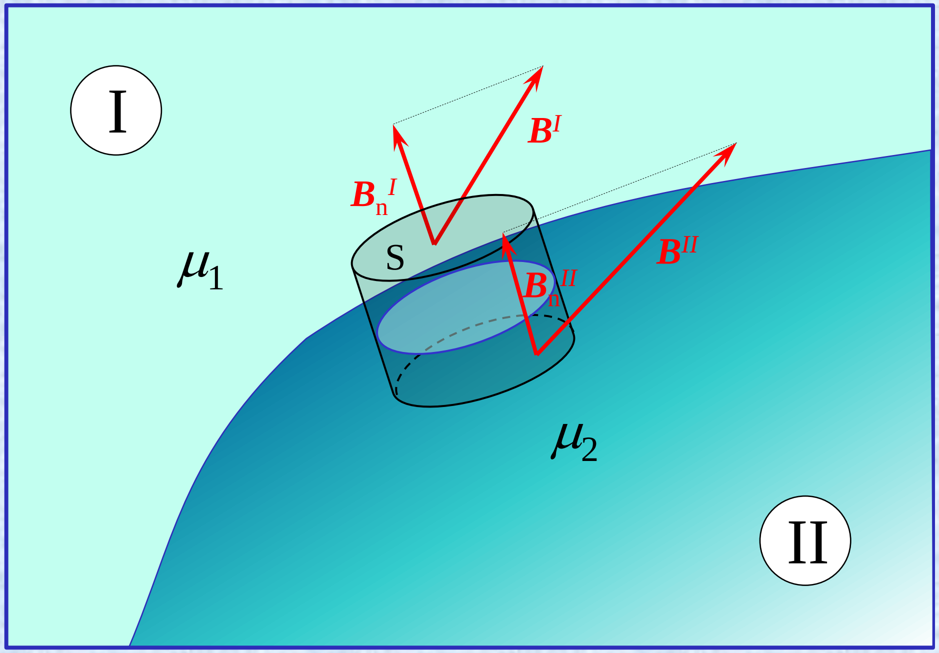
zatem:

$$H_s^{\mathrm{I}} - H_s^{\mathrm{II}} = I$$

Wniosek:

Różnica składowych stycznych natężenia pola magnetycznego po obu stronach powierzchni granicznej równa jest lokalnej wartości gęstości liniowej prądu powierzchniowego.

5.4. Warunek brzegowy dla indukcji magnetycznej



Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

$$\oiint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$$

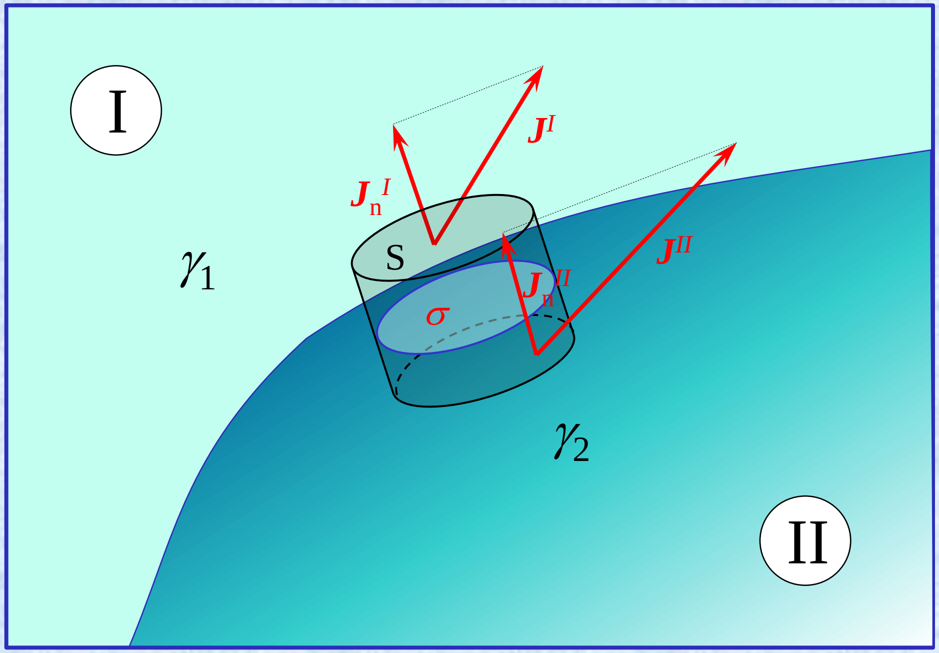
$$\oiint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = B_n^I S - B_n^{II} S = 0$$

zatem:

$$B_\mathrm{n}^\mathrm{I} = B_\mathrm{n}^\mathrm{II}$$

<u>**Wniosek:**</u>
Normalna składowa indukcji magnetycznej na powierzchni granicznej jest zawsze ciągła.

5.5. Warunek brzegowy dla wektora gęstości prądu



Zasada zachowania ładunku

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = J_n^I S - J_n^{II} S$$

$$\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V = \sigma\cdot S$$

zatem:

$$J_\mathrm{n}^\mathrm{I} - J_\mathrm{n}^\mathrm{II} = -\frac{\partial\sigma}{\partial t}$$

Wniosek:

Różnica składowych normalnych wektora gęstości prądu po obu stronach powierzchni granicznej równa jest pochodnej po czasie gęstości powierzchniowej ładunku.

5.6. Prawo załamania dla pola elektrycznego

Dla $\sigma = 0$ (brak ładunków na powierzchni granicznej między dielektrykami):

$D_\mathrm{n}^\mathrm{I} = D_\mathrm{n}^\mathrm{II}$ czyli: $\varepsilon_1 E_\mathrm{n}^\mathrm{I} = \varepsilon_2 E_\mathrm{n}^\mathrm{II}$ więc: $\dfrac{E_\mathrm{n}^\mathrm{I}}{E_\mathrm{n}^\mathrm{II}} = \dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$

Równocześnie $E_\mathrm{s}^\mathrm{I} = E_\mathrm{s}^\mathrm{II}$

Niech α_1, α_2 oznaczają kąty pomiędzy wektorami (odpowiednio) $\boldsymbol{E}^\mathrm{I}$, $\boldsymbol{E}^\mathrm{II}$, a kierunkiem normalnym do powierzchni granicznej.

Zatem: $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \dfrac{E_\mathrm{s}^\mathrm{I}}{E_\mathrm{n}^\mathrm{I}}$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{E_\mathrm{s}^\mathrm{II}}{E_\mathrm{n}^\mathrm{II}}$, a stąd $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \dfrac{E_\mathrm{s}^\mathrm{I}}{E_\mathrm{n}^\mathrm{I}} \cdot \dfrac{E_\mathrm{n}^\mathrm{II}}{E_\mathrm{s}^\mathrm{II}} = \dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$

Prawo załamania linii pola elektrycznego:

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$$

5.7. Prawo załamania dla pola magnetycznego

Dla $I = 0$ (brak prądów powierzchniowych na powierzchni granicznej):

$H_s^{I} = H_s^{II}$ czyli: $\dfrac{B_s^{I}}{\mu_1} = \dfrac{B_s^{II}}{\mu_2}$ więc: $\dfrac{B_s^{I}}{B_s^{II}} = \dfrac{\mu_1}{\mu_2}$

Równocześnie $B_n^{I} = B_n^{II}$

Niech α_1, α_2 oznaczają kąty pomiędzy wektorami (odpowiednio) $\boldsymbol{B}^{I}$, $\boldsymbol{B}^{II}$, a kierunkiem normalnym do powierzchni granicznej.

Zatem: $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \dfrac{B_s^{I}}{B_n^{I}}$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \dfrac{B_s^{II}}{B_n^{II}}$, a stąd $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \dfrac{B_s^{I}}{B_n^{I}} \cdot \dfrac{B_n^{II}}{B_s^{II}} = \dfrac{\mu_2}{\mu_1}$

<u>**Prawo załamania linii pola magnetycznego:**</u>

$$\frac{\mathrm{tg}\,\alpha_1}{\mathrm{tg}\,\alpha_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}$$

5.8. Warunki brzegowe na powierzchniach ośrodków idealnych

Idealny przewodnik (nadprzewodnik) $\gamma = \infty$

We wnętrzu idealnego przewodnika $\vec{E} = 0$, ponieważ $\vec{J} = \gamma \vec{E}$, a $\vec{J} \neq \infty$

Z warunku $E_s^{\mathrm{I}} = E_s^{\mathrm{II}}$ wynika więc, że na jego powierzchni: $E_s = 0$

Idealny ferromagnetyk $\mu = \infty$

We wnętrzu idealnego przewodnika $\vec{H} = 0$, ponieważ $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$

Z warunku $H_s^{\mathrm{I}} = H_s^{\mathrm{II}}$ wynika więc, że na jego powierzchni: $H_s = 0$

5.9. Podsumowanie

Klasyczne warunki brzegowe elektrodynamiki

Ogólnie	Brak ładunków i prądów powierzchniowych	Idealny przewodnik	Idealny ferromagnetyk
$E_s^{\mathrm{I}} = E_s^{\mathrm{II}}$	$E_s^{\mathrm{I}} = E_s^{\mathrm{II}}$	$E_s = 0$	
$D_n^{\mathrm{I}} - D_n^{\mathrm{II}} = \sigma$	$D_n^{\mathrm{I}} = D_n^{\mathrm{II}}$	$D_n = \sigma$	
$H_s^{\mathrm{I}} - H_s^{\mathrm{II}} = I$	$H_s^{\mathrm{I}} = H_s^{\mathrm{II}}$		$H_s = 0$
$B_n^{\mathrm{I}} = B_n^{\mathrm{II}}$	$B_n^{\mathrm{I}} = B_n^{\mathrm{II}}$		
$J_n^{\mathrm{I}} - J_n^{\mathrm{II}} = -\dfrac{\partial \sigma}{\partial t}$	$J_n^{\mathrm{I}} = J_n^{\mathrm{II}}$		