POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski
spawlo@prz.edu.pl

3. Równania Maxwella

3.1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

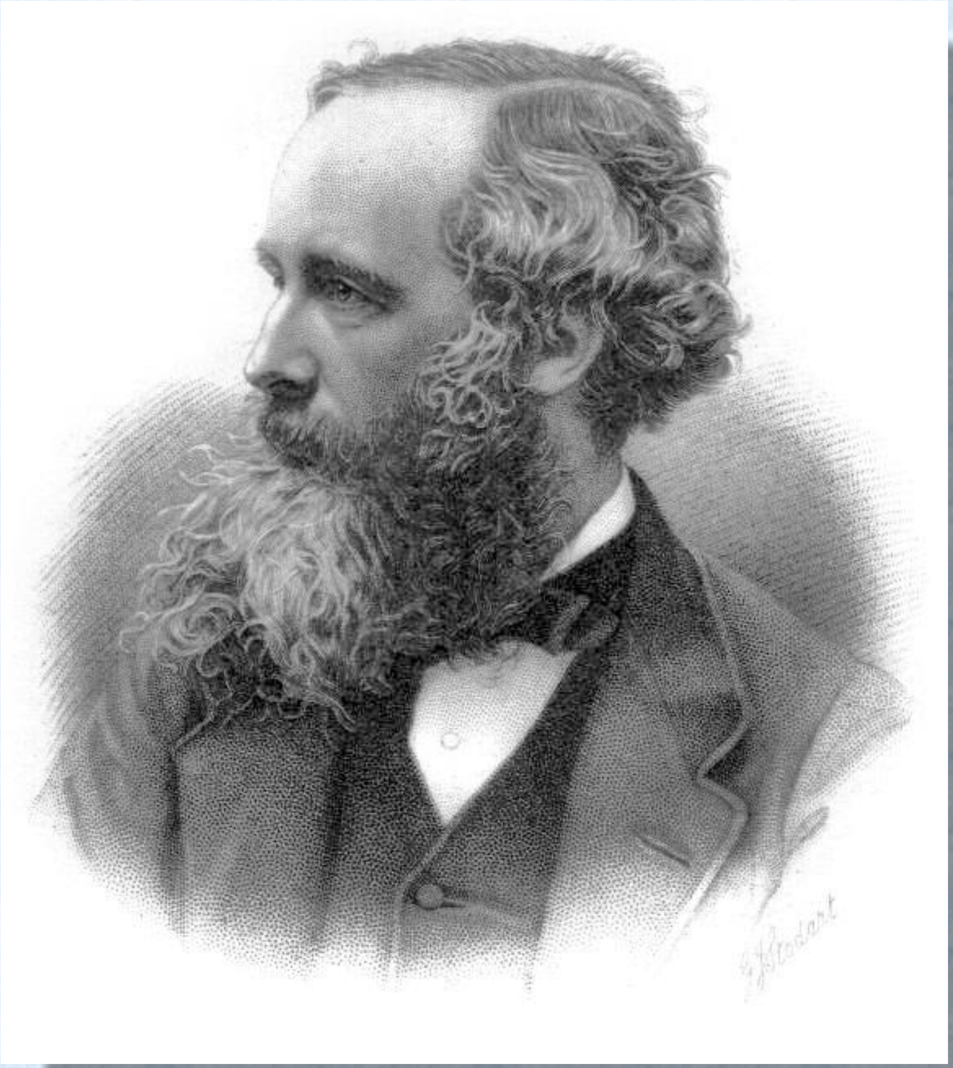
3.2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

3.3. Prawo Ampere'a

3.4. Prawo Faraday'a

3.5. Prądy przesunięcia Maxwella

3.6. Równania Maxwella w postaci całkowej i różniczkowej



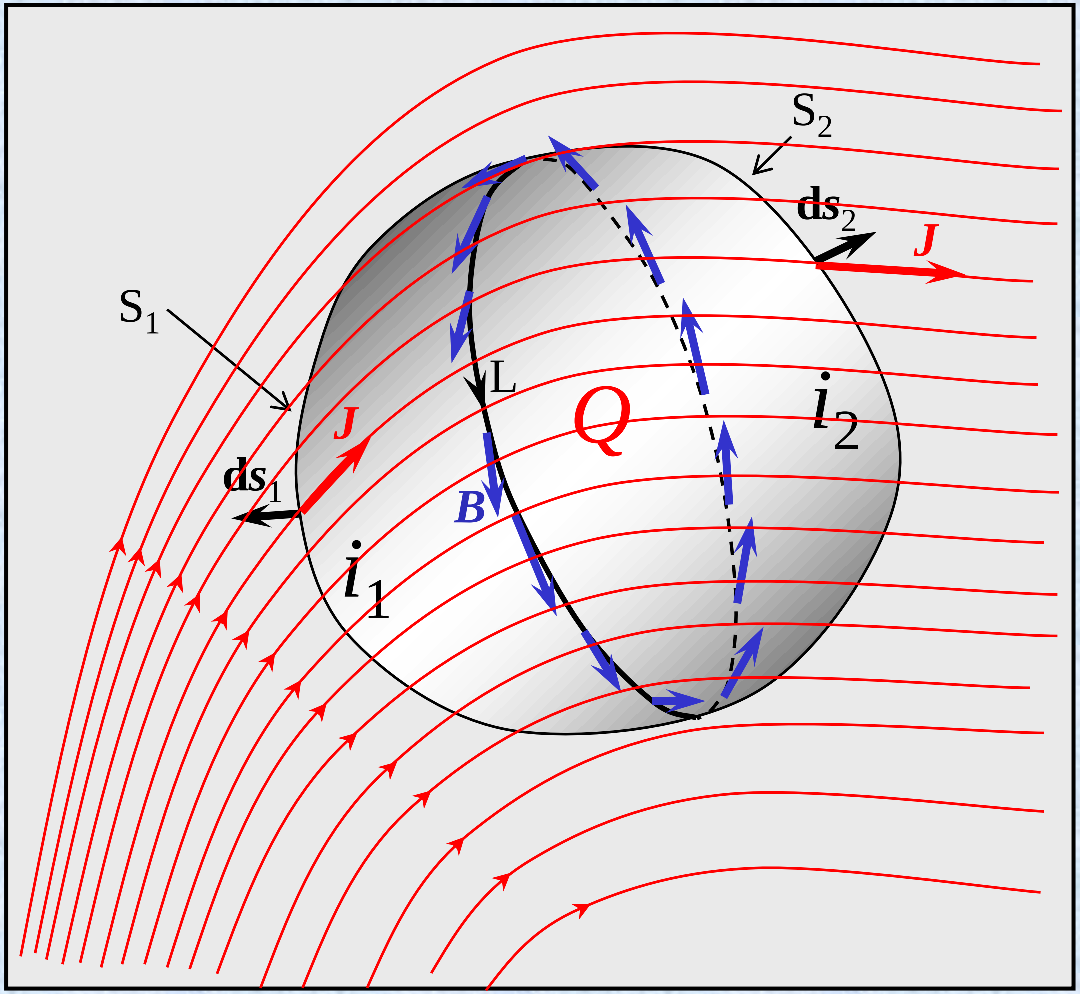
James Clerk Maxwell
1831 - 1879

Podstawowe prawa elektromagnetyzmu – małe podsumowanie

Prawo	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Zasada zachowania ładunku	$\oiint\limits_{S} \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,t} \iiint\limits_{V} \rho \,\mathrm{d}V$	$\mathrm{div}\,\vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$
Gaussa dla pola elektrycznego	$\oiint\limits_{S} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} Q$	$\mathrm{div}\,\vec{E} = \dfrac{1}{\varepsilon_0} \rho$
Gaussa dla pola magnetycznego	$\oiint\limits_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$
Ampera	$\oint\limits_{L} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
Faraday'a	$\oint\limits_{L} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

3.5. Prądy przesunięcia Maxwella

Sprzeczność prawa Ampère'a z zasadą zachowania ładunku



Zasada zachowania ładunku:

$$\oiint_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

$$\iint_{S_1} \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s_1} + \iint_{S_2} \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s_2} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

$$-i_1 + i_2 = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

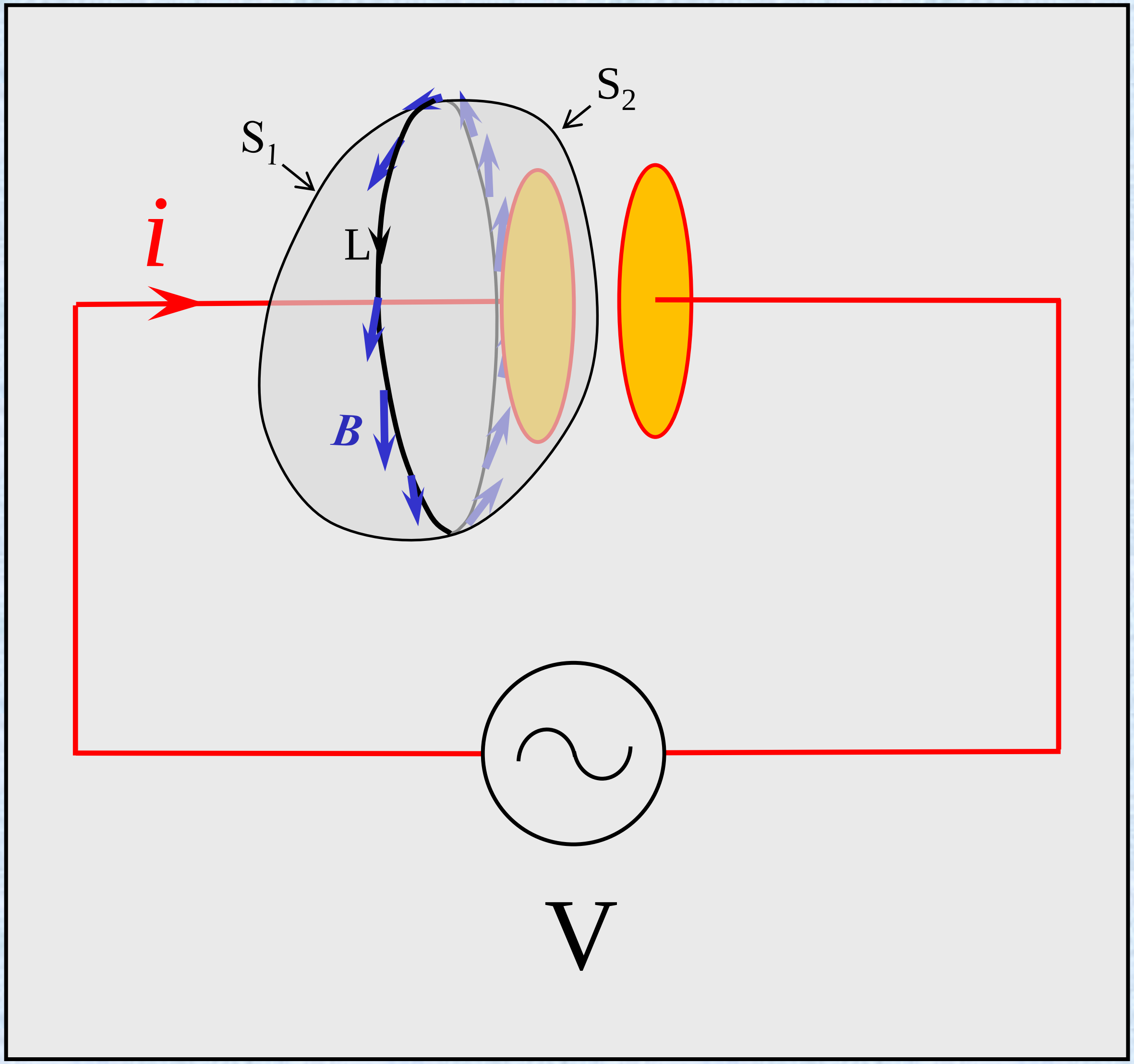
$$i_1 - i_2 = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

Czyli na ogół $i_1 \neq i_2$

Prawo Ampère'a :

$$\oint_L \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i_1 = \mu_0 i_2 \quad \Rightarrow \quad i_1 = i_2$$

Sprzeczność prawa Ampère'a z zasadą zachowania ładunku



$$i_1 = i$$

$$i_2 = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = ?$$

Sprzeczność prawa Ampère'a z zasadą zachowania ładunku

Prawo Ampère'a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

czyli: $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) = \mu_0\, \mathrm{div}\, \vec{J}$

ale: $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) \equiv 0$ (tożsamość matematyczna)

zatem: $\mathrm{div}\, \vec{J} = 0$

a zgodnie z zasadą zachowania ładunku: $\mathrm{div}\, \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

(sprzeczność w przypadku, gdy gęstość ładunku zmienia się w czasie)

Modyfikacja prawa Ampère'a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{?}$$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) = \mu_0\, \mathrm{div}\, \vec{J} + \mathrm{div}\vec{?}$$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{div}\vec{?} = -\mu_0\, \mathrm{div}\, \vec{J}$$

a ponieważ: $\mathrm{div}\, \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ więc $\mathrm{div}\vec{?} = \mu_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

Z prawa Gaussa mamy: $\rho = \varepsilon_0\, \mathrm{div}\, \vec{E}$

zatem $\mathrm{div}\vec{?} = \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t} \mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \mathrm{div}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

i stąd mamy: $\vec{?} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Uogólnione prawo Ampère'a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

gęstość prądu przesunięcia

Postać całkowa (wyprowadzenie na podstawie twierdzenia Stokes'a):

$$\oint_{\mathrm{L}} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{\mathrm{S}} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

natężenie prądu przesunięcia

Interpretacja fizyczna prądu przesunięcia:

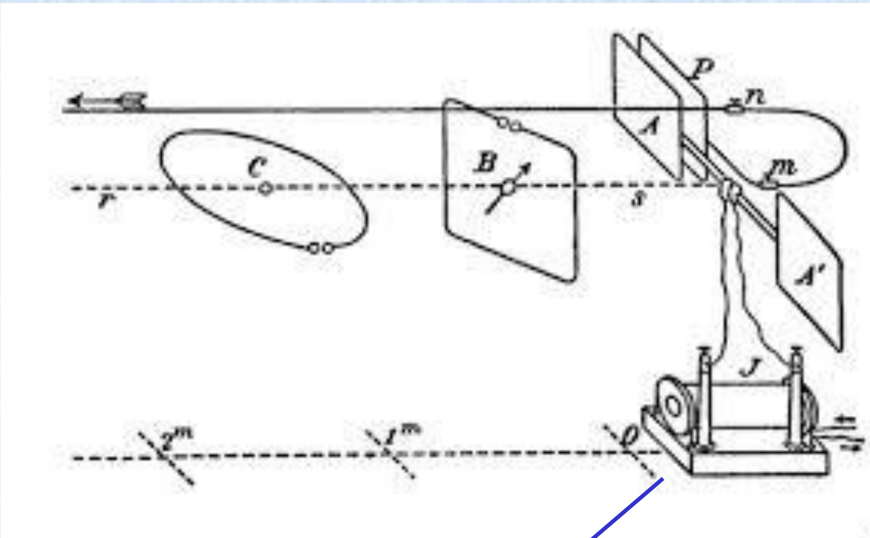
- zmienne w czasie pole elektryczne indukuje pole magnetyczne, którego cyrkulacja po krzywej L jest proporcjonalna do pochodnej po czasie strumienia elektrycznego przenikającego przez powierzchnię S rozpiętą na tej krzywej.

3.6. Równania Maxwella

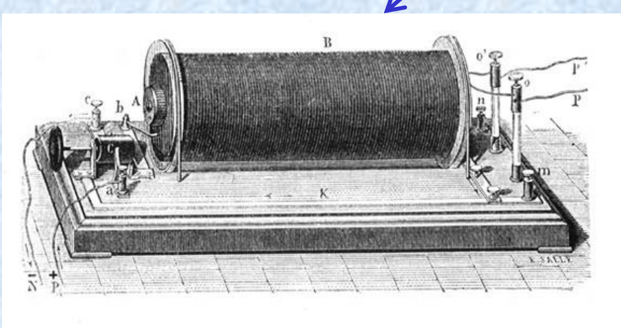
Prawo	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Ampere'a-Maxwella	$\oint_L \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faradaya	$\oint_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Gaussa dla pola magnetycznego	$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$	$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$
Gaussa dla pola elektrycznego	$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$	$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$

Eksperymentalne potwierdzenie teorii Maxwella

Schemat doświadczenia Hertza (1866)



Heinrich Rudolf Hertz
1857 - 1894



Cewka Ruhmkorffa