Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski
spawlo@prz.edu.pl

3. Równania Maxwella

3.1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

3.2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

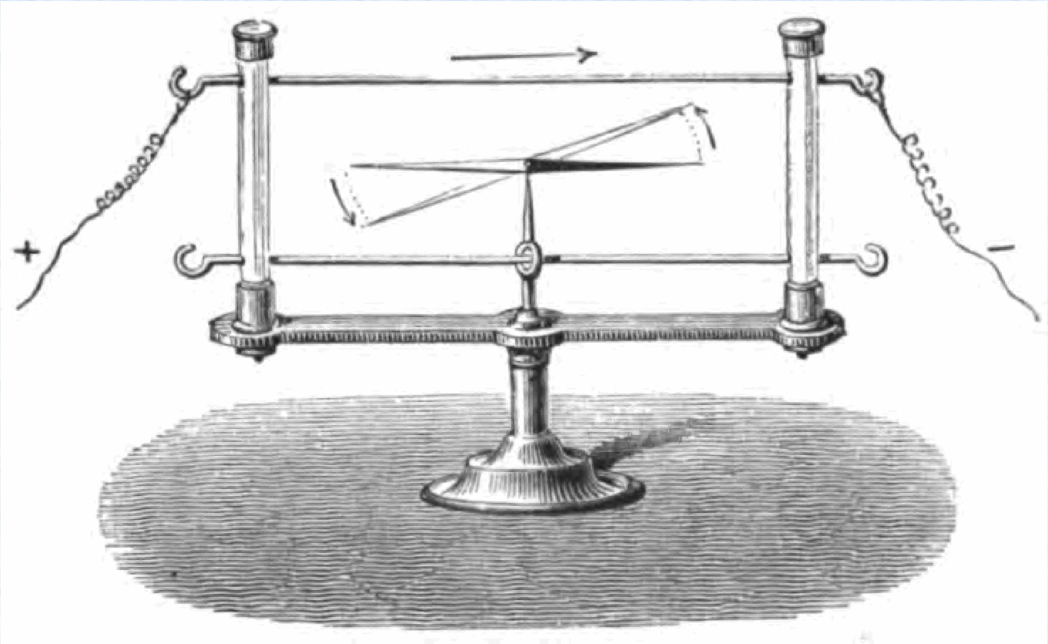
3.3. Prawo Ampere'a

3.4. Prawo Faraday'a

3.5. Prądy przesunięcia Maxwella

3.6. Równania Maxwella w postaci całkowej i różniczkowej

Eksperyment Oersteda (1820)

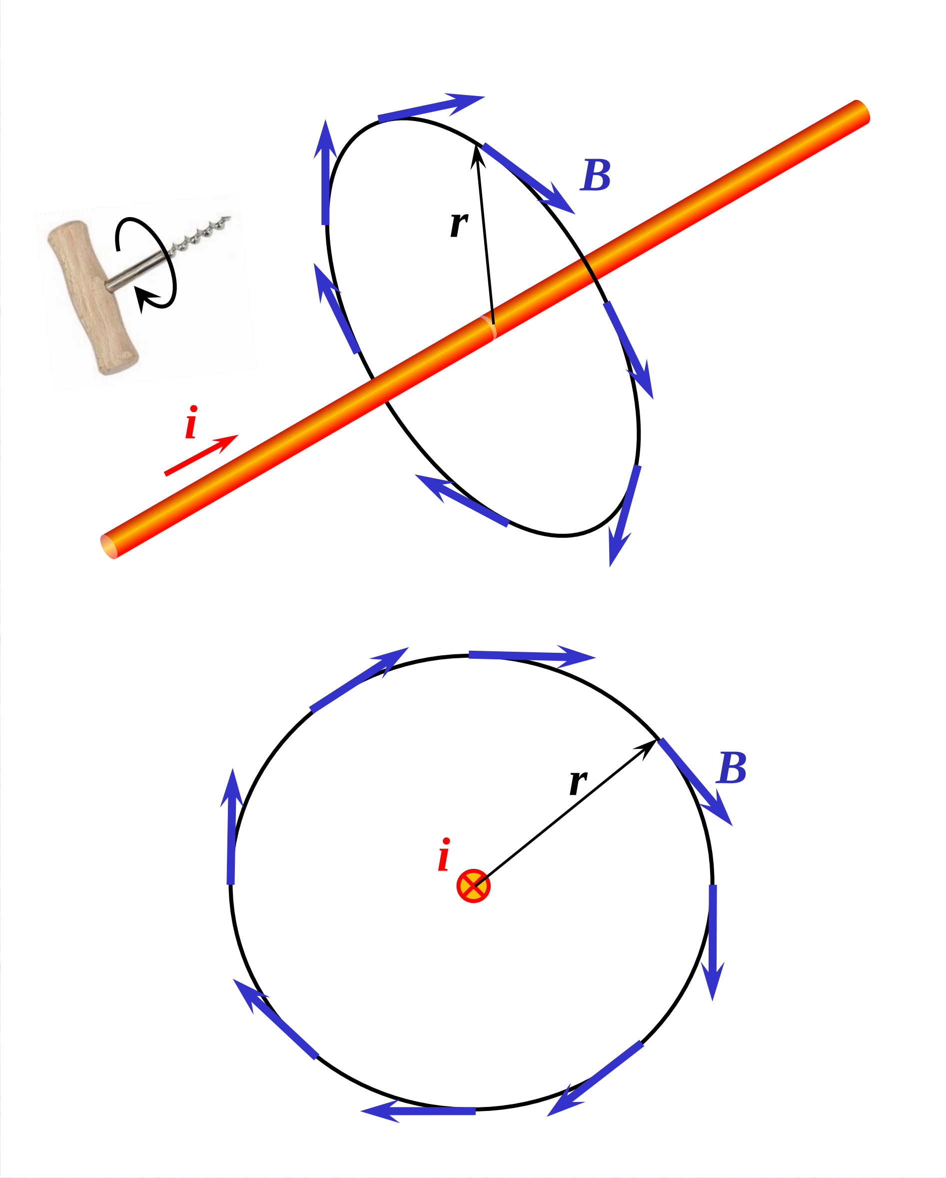


Hans Christian Ørsted
1777 - 1851

Link do filmu z pokazami zjawisk elektromagnetycznych:

https://www.youtube.com/watch?v=SDHmIMqug6Y

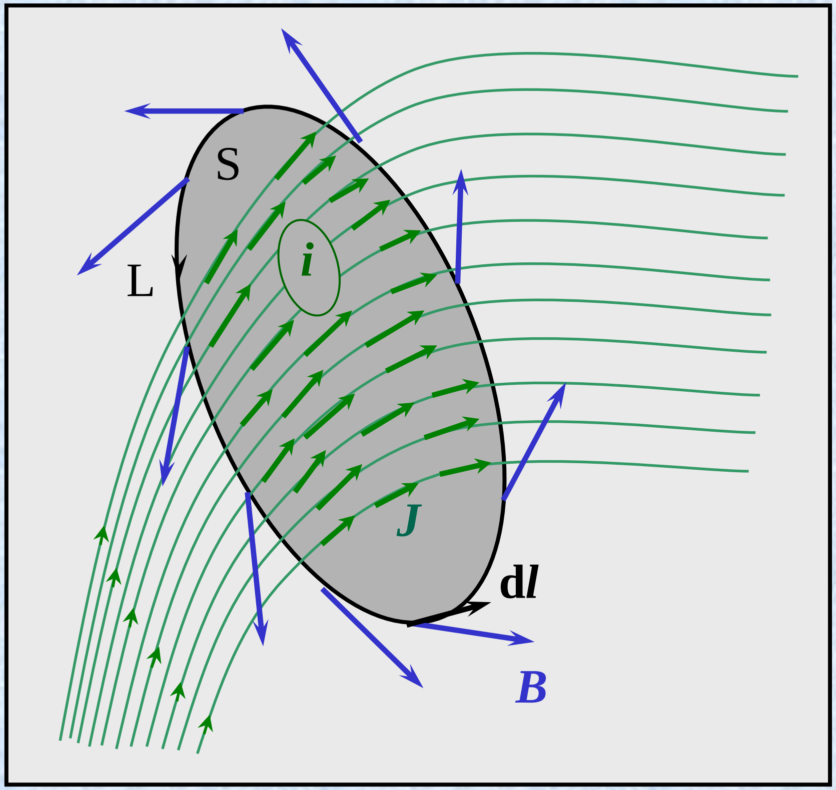
Eksperyment Oersteda i prawo Ampera



André-Marie Ampère
(1775–1836)

$$B \sim \frac{i}{r}$$

Całkowa postać prawa Ampera



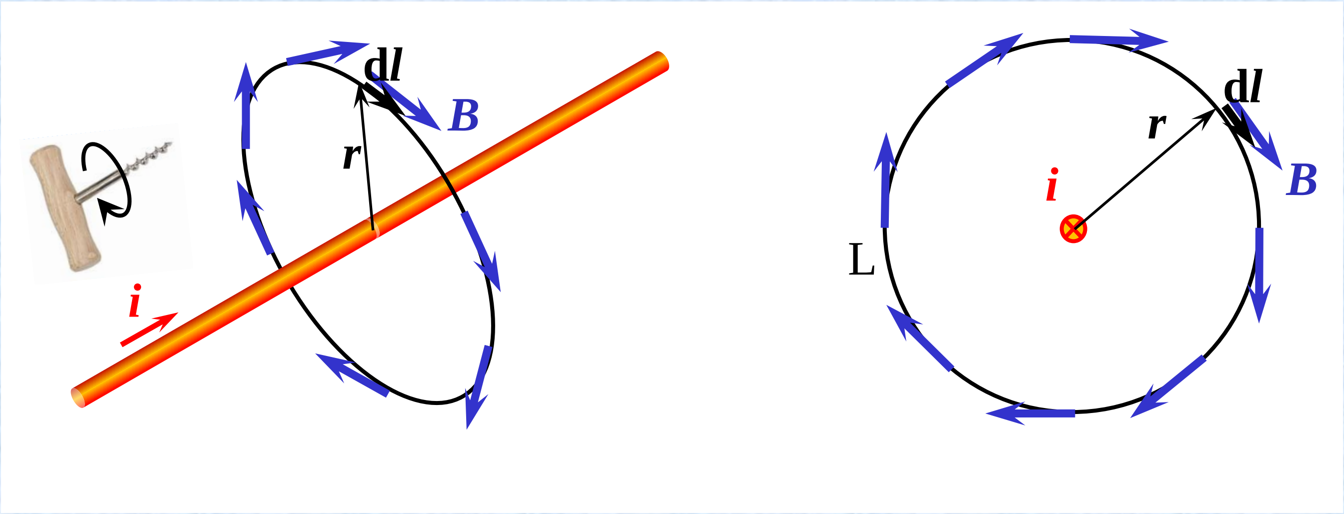
$$\oint_L \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i$$

μ_0 przenikalność magnetyczna próżni

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$$

Cyrkulacja wektora indukcji magnetycznej po brzegu dowolnej powierzchni jest proporcjonalna do natężenia prądu przepływającego przez tę powierzchnię.

Przykład - Obliczanie pola magnetycznego wokół prostoliniowego przewodu z prądem stałym



$$\oint_L \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \mu_0 i$$

$$\vec{B} \uparrow\uparrow \vec{\mathrm{d}l} \longrightarrow \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = B\,\mathrm{d}\,l \qquad B\big|_L = \mathrm{const} \qquad l = 2\pi r$$

$$\oint_L \vec{B}\cdot\vec{\mathrm{d}l} = \oint_L B dl = B\oint_L dl = Bl = 2\pi r B$$

$$2\pi r B = \mu_0 i \longrightarrow \boxed{B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}}$$

Różniczkowa postać prawa Ampera

$\oint\limits_{L} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i$ ale $i = \iint\limits_{S} \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ I stąd:

$\oint\limits_{L} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 \iint\limits_{S} \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ (inny sposób zapisania prawa Ampera w postaci całkowej)

Korzystając z twierdzenia Stokesa $\oint\limits_{L} \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint\limits_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$

mamy: $\iint\limits_{S} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint\limits_{S} \mu_0\vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$

i stąd: $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0\vec{J}}$ (ponieważ S jest dowolną powierzchnią)

3. Równania Maxwella

3.1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

3.2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

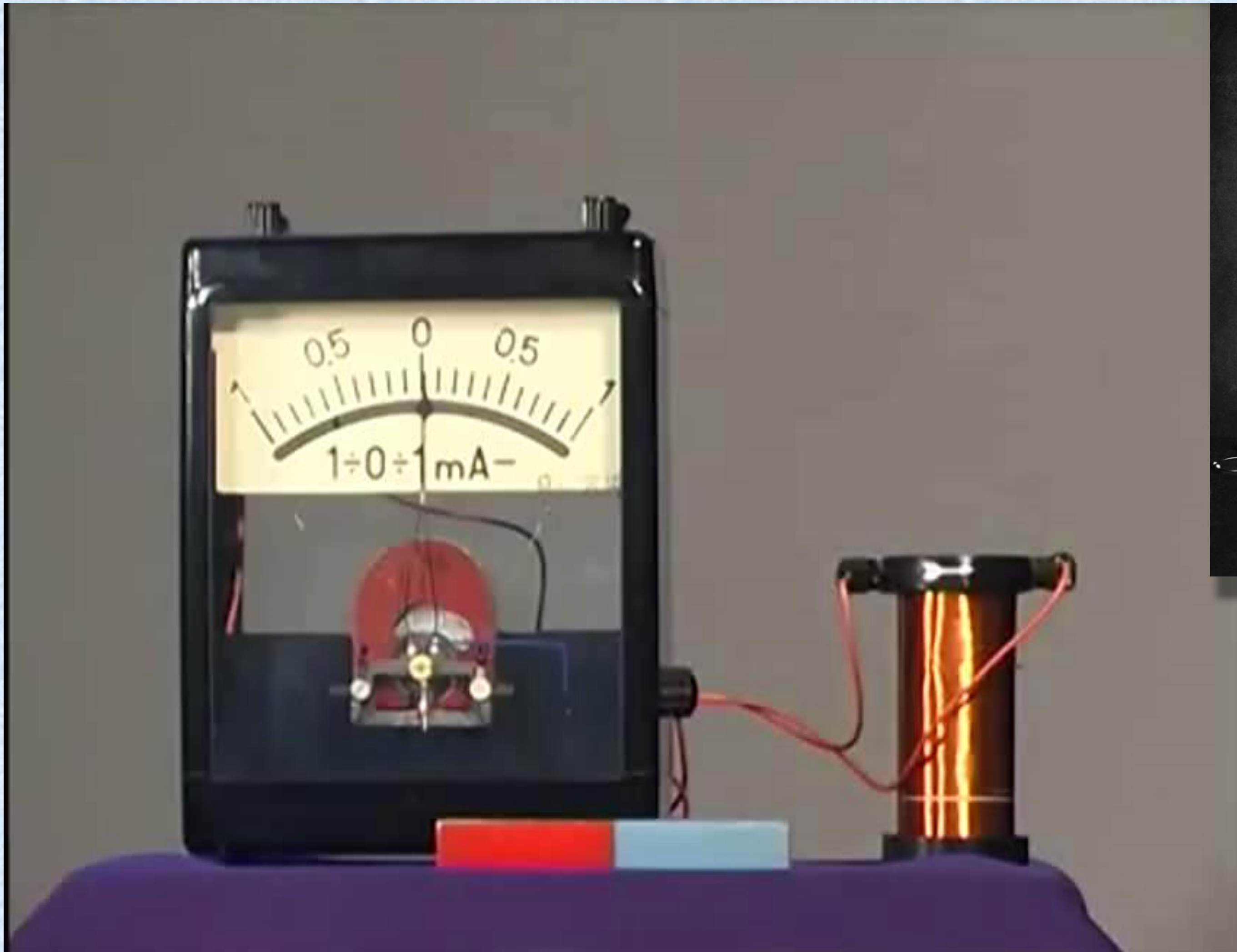
3.3. Prawo Ampere'a

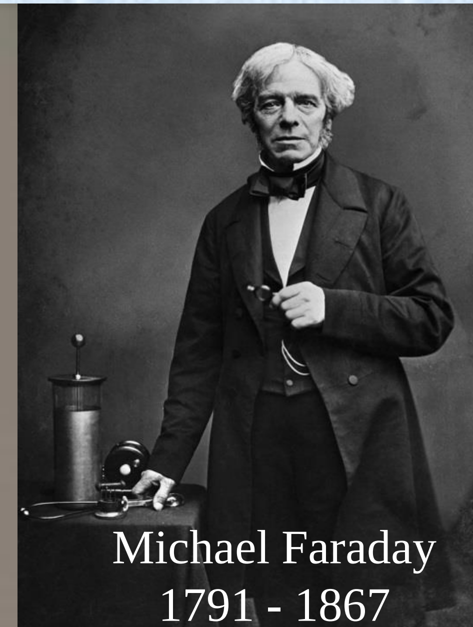
3.4. Prawo Faraday'a

3.5. Prądy przesunięcia Maxwella

3.6. Równania Maxwella w postaci całkowej i różniczkowej

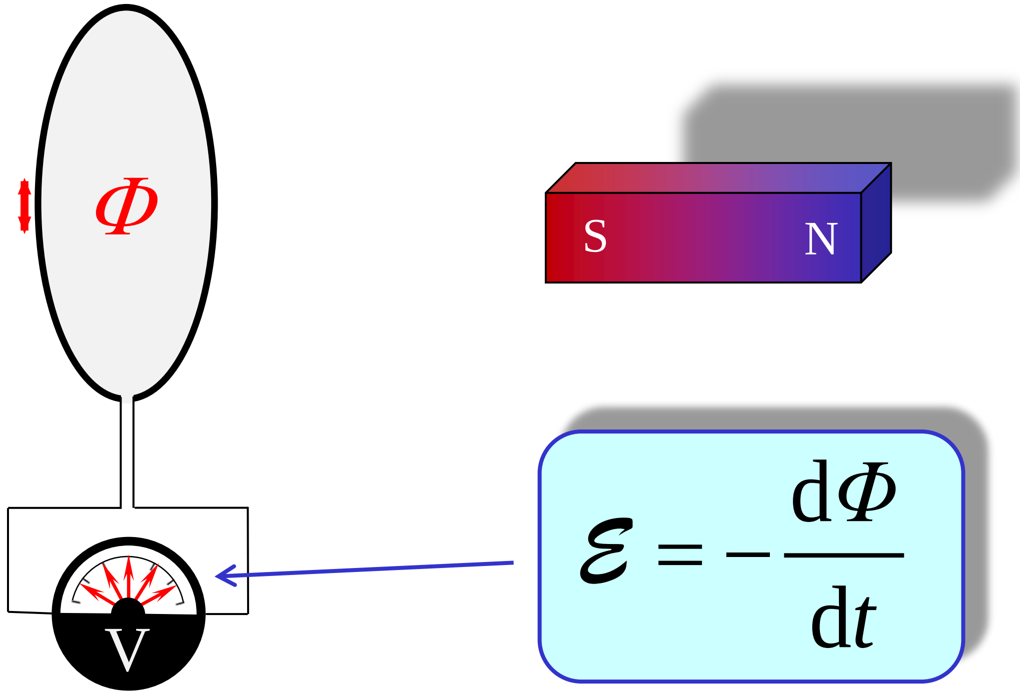
Zjawisko indukcji elektromagnetycznej





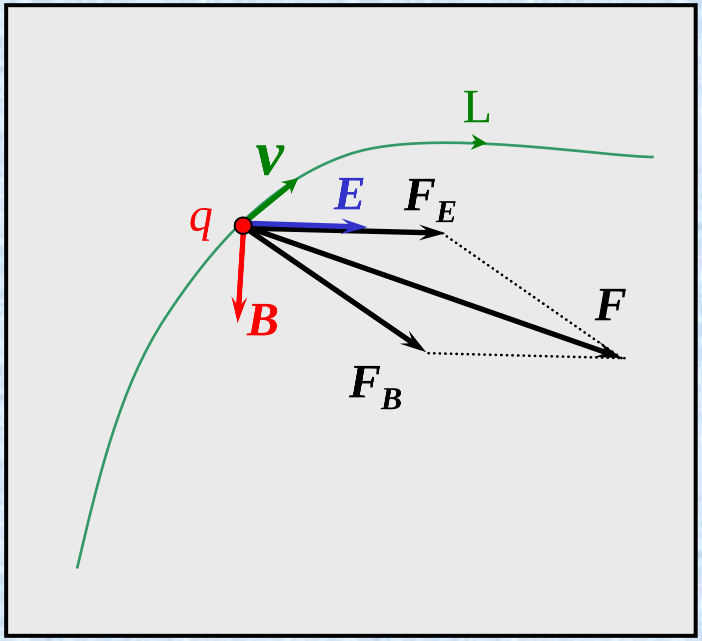
Michael Faraday
1791 - 1867

Zjawisko indukcji elektromagnetycznej



$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Napięcie elektryczne i siła elektromotoryczna



Napięcie: $$U = \frac{W}{q}$$

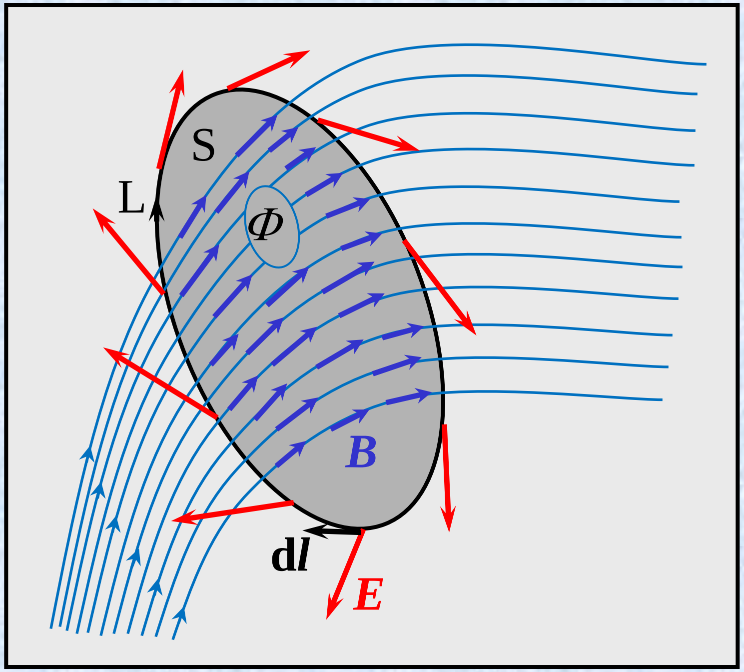
$$W = \int_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \qquad \vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$W = q\int_L \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = q\int_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} + q\int_L \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

ale: $$\left.\begin{array}{c} \vec{v} \parallel \overrightarrow{\mathrm{d}l} \\ \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \perp \vec{v} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$$

Zatem: $$W = q\int_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} \quad \Rightarrow \quad U = \int_L \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

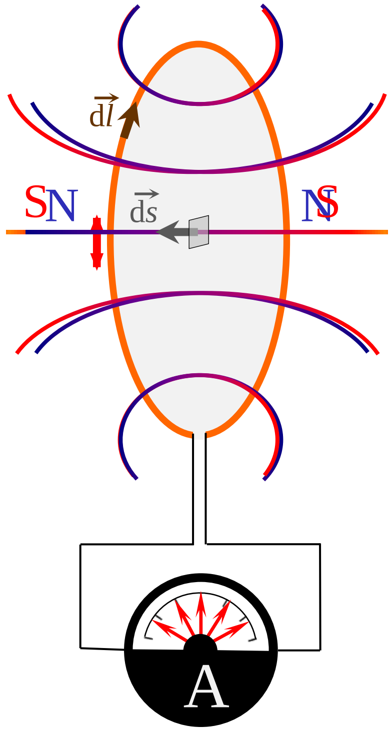
Całkowa postać prawa Faraday'a

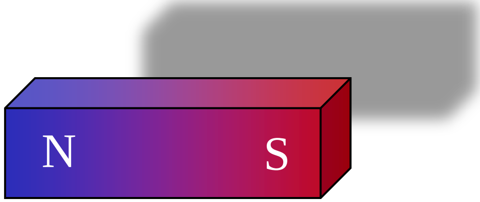


$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi$$

$$\oint_L \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

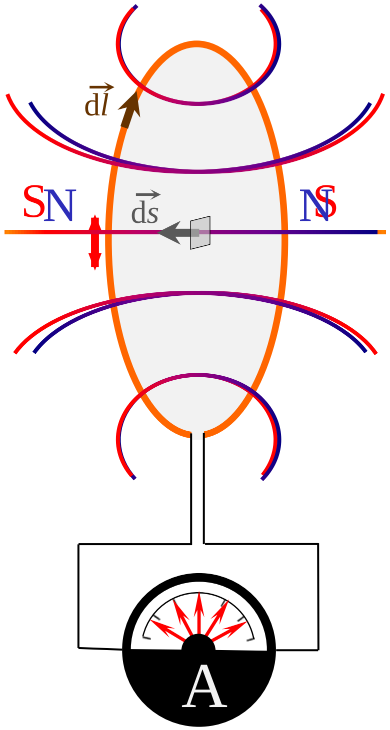
Reguła Lenza

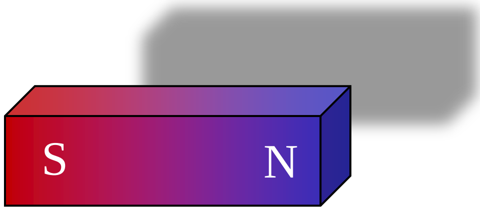




Reguła Lenza

Zmiana biegunów magnesu





Różniczkowa postać prawa Faraday'a

Postać całkowa: $$\oint_L \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_S \vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

Korzystając z twierdzenia Stokesa: $$\oint_L \vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

i zamieniając kolejność różniczkowania i całkowania w drugiej całce otrzymujemy: $$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_S \left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

Stąd: $$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}}$$

(ponieważ S jest dowolną powierzchnią)

Podstawowe prawa elektromagnetyzmu – małe podsumowanie

Prawo	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Zasada zachowania ładunku	$\oint\!\!\oint_{S} \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_{V} \rho \, \mathrm{d}V$	$\mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$
Gaussa dla pola elektrycznego	$\oint\!\!\oint_{S} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$	$\mathrm{div}\,\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$
Gaussa dla pola magnetycznego	$\oint\!\!\oint_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$	$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$
Ampera	$\oint_{L} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$
Faraday'a	$\oint_{L} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

3.5. Prądy przesunięcia Maxwella

3.5.1. Sprzeczność prawa Ampère'a z zasadą zachowania ładunku

Prawo Ampère'a $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

czyli: $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) = \mu_0\, \mathrm{div}\, \vec{J}$

ale: $\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) \equiv 0$ (tożsamość matematyczna)

zatem: $\mathrm{div}\, \vec{J} = 0$

a zgodnie z zasadą zachowania ładunku: $\mathrm{div}\, \vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

(sprzeczność w przypadku, gdy gęstość ładunku zmienia się w czasie)

3.5. Prąd przesunięcia Maxwella

3.5.2. Modyfikacja prawa Ampère'a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \vec{?}$$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) = \mu_0 \,\mathrm{div}\,\vec{J} + \mathrm{div}\vec{?}$$

$$\mathrm{div}\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}\right) \equiv 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathrm{div}\vec{?} = -\mu_0 \,\mathrm{div}\,\vec{J}$$

a ponieważ: $\mathrm{div}\,\vec{J} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ więc $\mathrm{div}\vec{?} = \mu_0 \dfrac{\partial \rho}{\partial t}$

Z prawa Gaussa mamy: $\rho = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\,\vec{E}$

zatem $\mathrm{div}\vec{?} = \mu_0 \dfrac{\partial}{\partial t}\mathrm{div}\left(\varepsilon_0 \vec{E}\right) = \mathrm{div}\left(\mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$

i stąd ostatecznie: $\vec{?} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

3.5. Prąd przesunięcia Maxwella

3.5.3. Uogólnione prawo Ampère'a

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

gęstość prądu przesunięcia

Postać całkowa: $$\oint_L \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

natężenie prądu przesunięcia

(wyprowadzenie na podstawie prawa Stokes'a)

<u>**Interpretacja fizyczna prądu przesunięcia:**</u>

- zmienne w czasie pole elektryczne indukuje pole magnetyczne, którego cyrkulacja po krzywej L jest proporcjonalna do pochodnej po czasie strumienia elektrycznego przenikającego przez powierzchnię S rozpiętą na tej krzywej.

3.6. Równania Maxwella

Prawo	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Ampere'a-Maxwella	$\oint\limits_{L} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \mu_0 i + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{S} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
Faradaya	$\oint\limits_{L} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$	$\overrightarrow{\mathrm{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Gaussa dla pola magnetycznego	$\oint\!\!\oint\limits_{S} \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$	$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$
Gaussa dla pola elektrycznego	$\oint\!\!\oint\limits_{S} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$	$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$