POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski

Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

3. Równania Maxwella

3. Równania Maxwella

3.1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

3.2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

3.3. Prawo Ampere’a

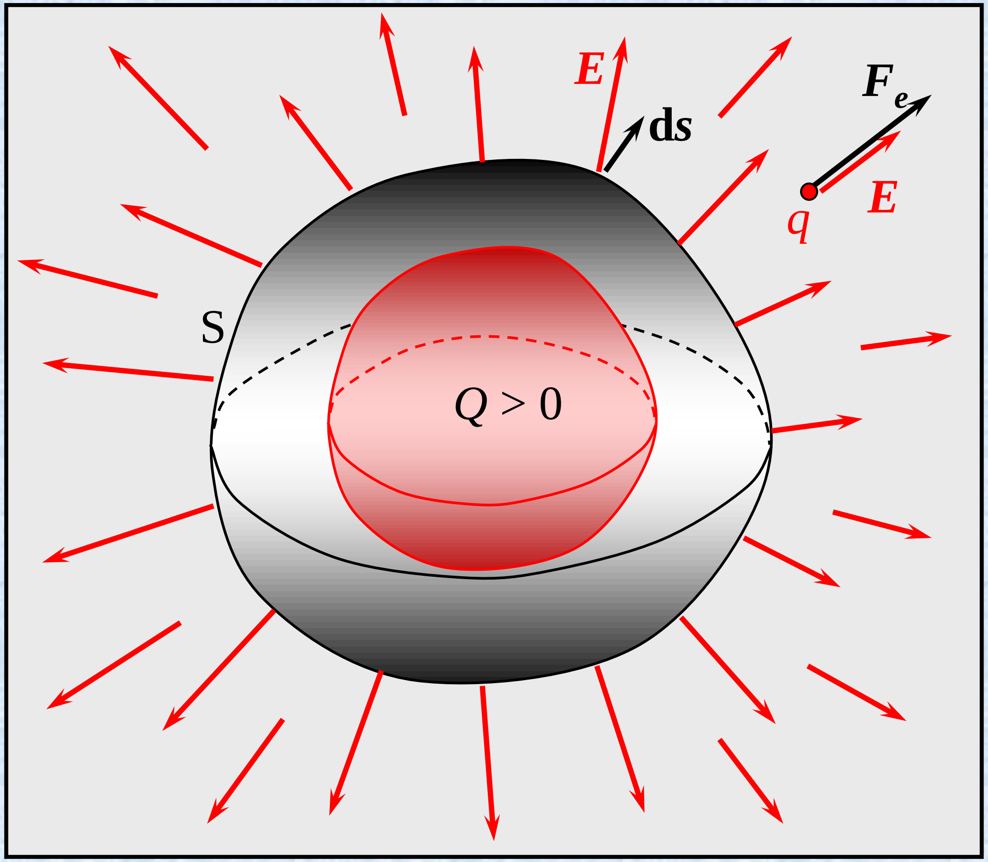
3.4. Prawo Faraday’a

3.5. Prądy przesunięcia Maxwella

3.6. Równania Maxwella w postaci całkowej i różniczkowej

3.1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego *

postać całkowa



Fakt eksperymentalny:

Strumień elektryczny przepływający przez powierzchnię zamkniętą S jest proporcjonalny do ładunku zgromadzonego **wewnątrz** tej powierzchni

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

ε_0 - przenikalność elektryczna próżni

$$\varepsilon_0 \approx 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$$

3.1. Prawo Gaussa dla pola elektrycznego

Twierdzenie Gaussa (matematyka)

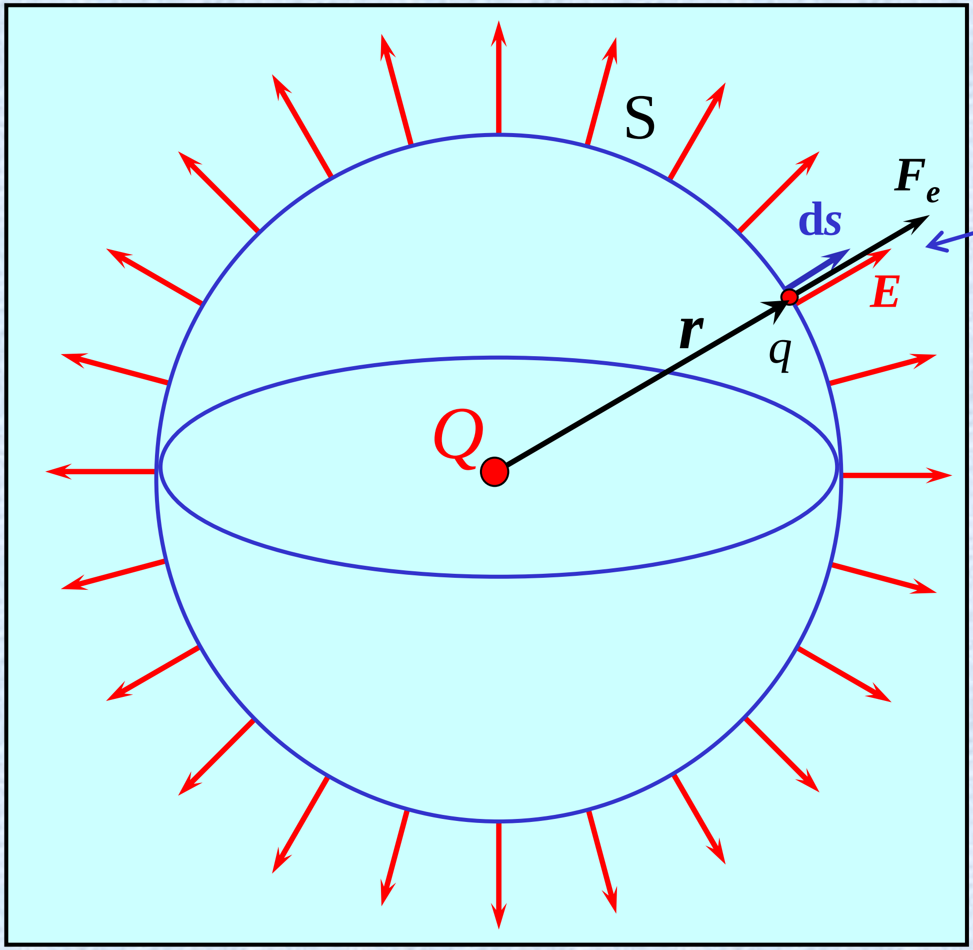
$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v} \, dV = \oiint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{ds}$$

Prawo Gaussa (fizyka)

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

Carl Friedrich Gauss
1777-1855
matematyk, fizyk, astronom, geodeta

Pole elektryczne ładunku punktowego



Prawo Gaussa: $$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$

$$\vec{E}\cdot\vec{ds} = E\cdot ds\cdot\cos\alpha$$

$$\vec{E}\uparrow\uparrow\vec{ds} \longrightarrow \alpha = 0 \longrightarrow \cos\alpha = 1$$

$$\longrightarrow \vec{E}\cdot\vec{ds} = E\,ds$$

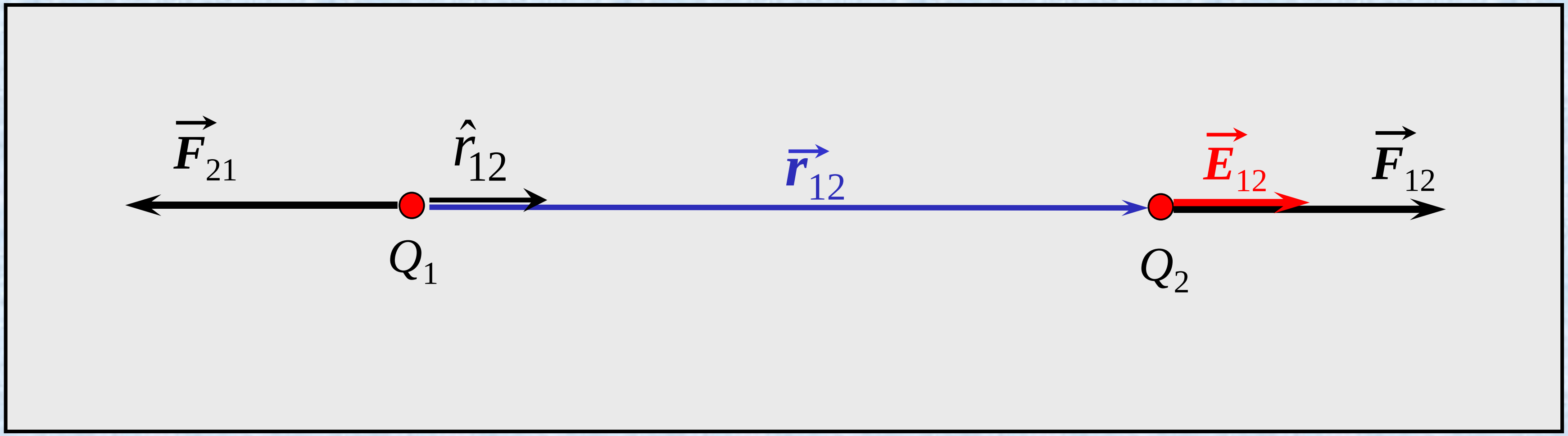
$$\oiint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oiint_S E ds = E\oiint_S ds = ES$$

$$E\big|_S = \text{const}$$

$$S = 4\pi r^2 \longrightarrow \oiint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = 4\pi r^2 E$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0}Q \longrightarrow \boxed{E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}}$$

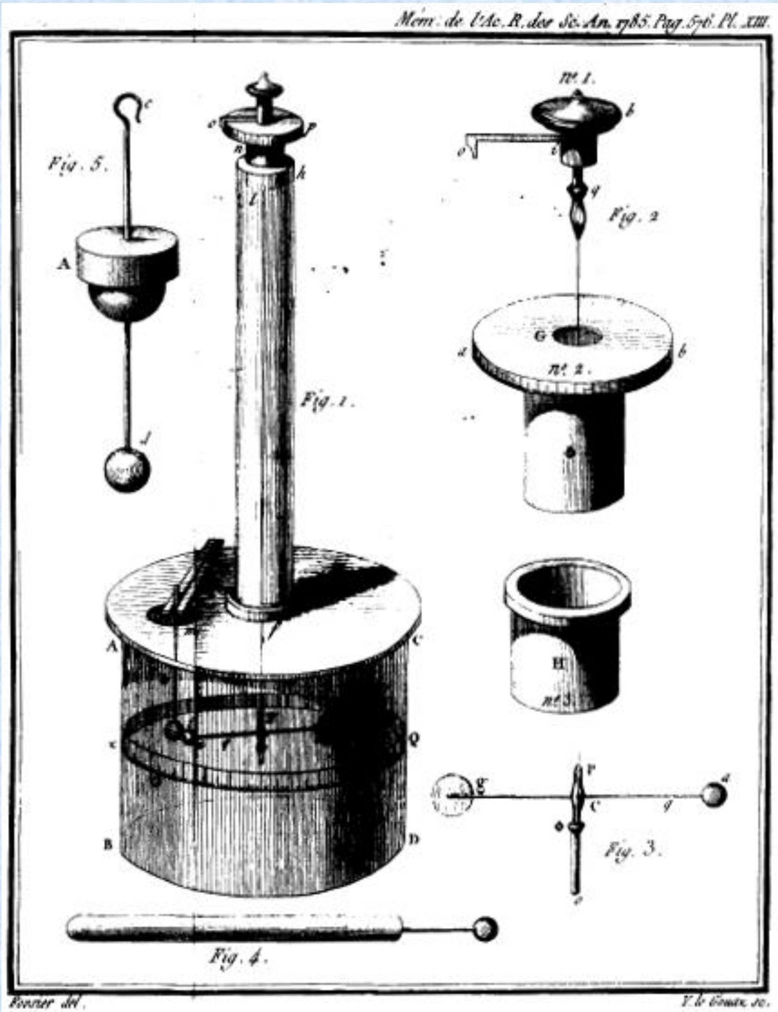
Prawo Coulomba



$$E_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2} \longrightarrow \vec{E}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}\hat{r}_{12}$$ gdzie: $|\hat{r}_{12}| = 1,\quad \hat{r}_{12} = \frac{\vec{r}_{12}}{r}$

$$\vec{F}_{12} = Q_2\vec{E}_{12} \longrightarrow \boxed{\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\hat{r}_{12}}$$

Prawo Coulomba



Waga skręceń Coulomba

Charles Coulomb
1736-1806

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1Q_2}{r^2}\hat{r}_{12}$$

Różniczkowa postać prawa Gaussa dla pola elektrycznego

$$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q$$ ale $$Q = \iiint_V \rho\, dV$$ więc: $$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho\, dV$$

Na podstawie twierdzenia Gaussa $$\oiint_S \vec{E}\cdot\overrightarrow{ds} = \iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV$$

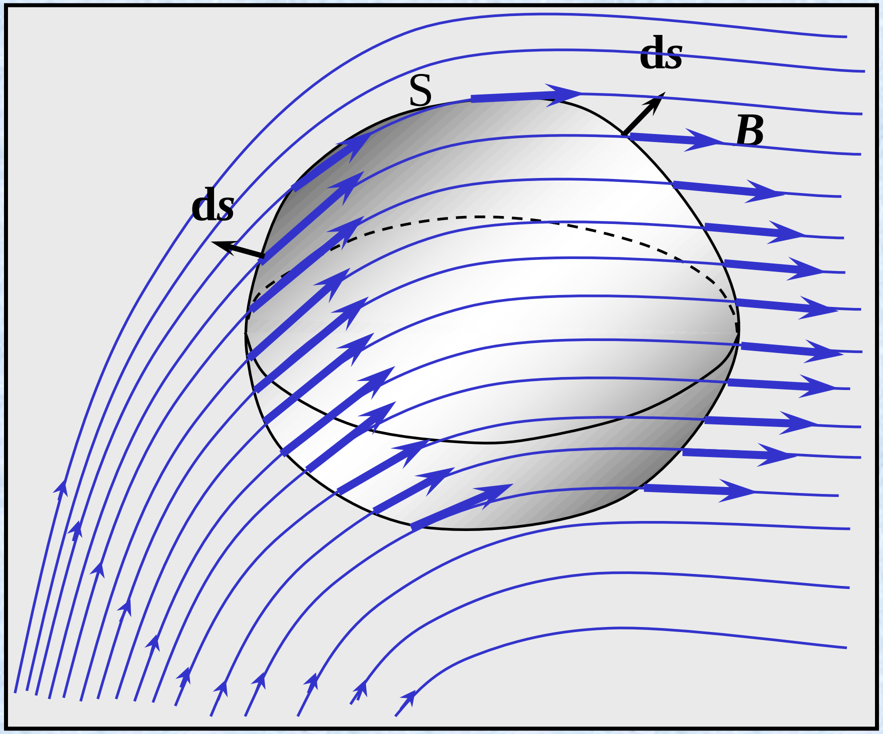
mamy: $$\iiint_V \operatorname{div}\vec{E}\, dV = \iiint_V \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\, dV$$

Ponieważ równość ta jest prawdziwa dla każdego obszaru V więc:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho}$$

3.2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

postać całkowa



Fakt eksperymentalny:

- Strumień magnetyczny przez dowolną powierzchnię zamkniętą zawsze równy jest zeru.

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

Inaczej:

- Strumień magnetyczny wpływający do wnętrza dowolnego obszaru jest równy strumieniowi wypływającemu z tego obszaru (strumień wypływający z obszaru jest dodatni, a wpływający jest ujemny).

3.2. Prawo Gaussa dla pola magnetycznego

postać różniczkowa

$$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = 0$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa
$$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{ds} = \iiint_V \mathrm{div}\vec{B}\, \mathrm{d}V$$

mamy
$$\iiint_V \mathrm{div}\vec{B}\, \mathrm{d}V = 0$$

Ponieważ równość ta jest prawdziwa dla każdego obszaru V więc:

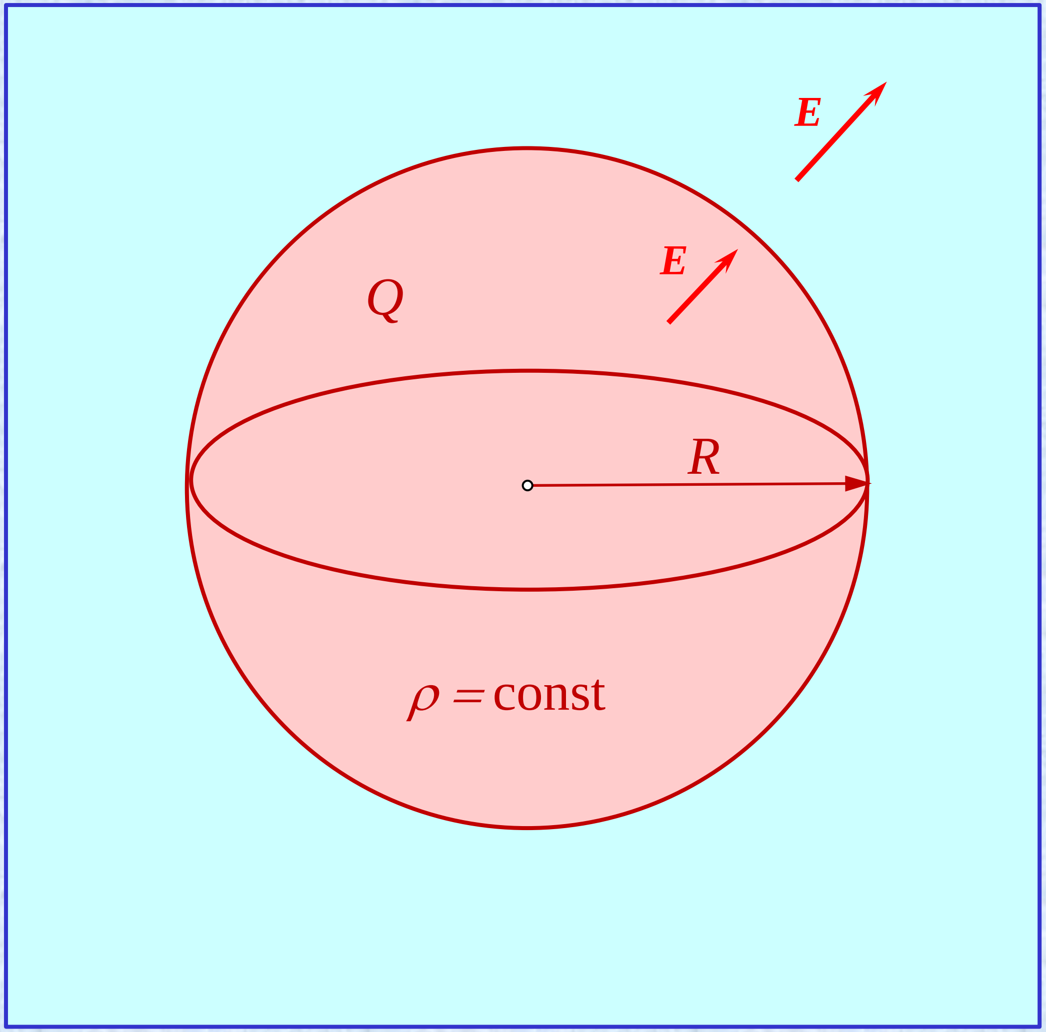
$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{B} = 0}$$

Prawa Gaussa - podsumowanie

Pole	Postać całkowa	Postać różniczkowa
Elektryczne	$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$	$\mathrm{div}\, \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \rho$
Magnetyczne	$\oiint_S \vec{B} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = 0$	$\mathrm{div}\, \vec{B} = 0$

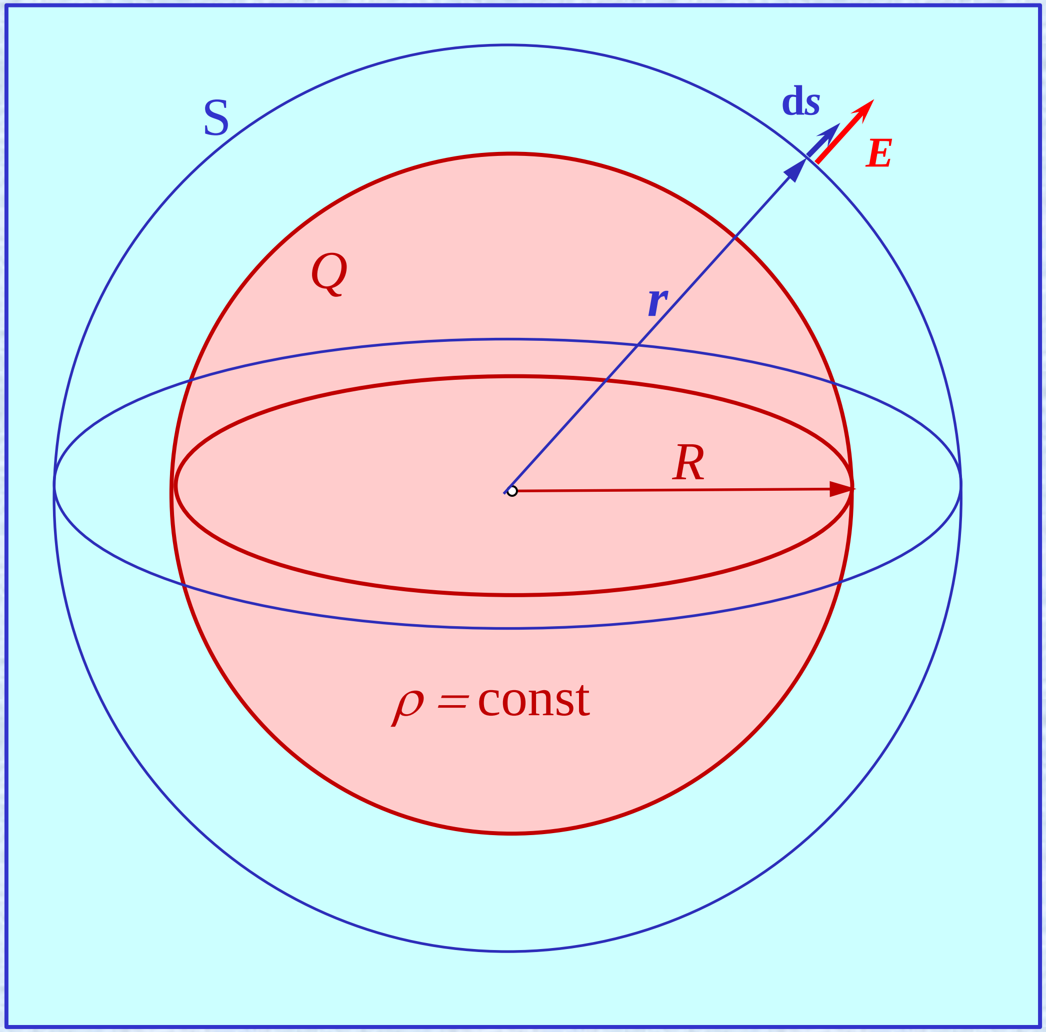
Prawo Gaussa - przykłady

Przykład 1. Pole kuli jednorodnie naładowanej (ρ = const)



Prawo Gaussa - przykłady

Przykład 1. Pole kuli jednorodnie naładowanej (ρ = const)



Na zewnątrz kuli ($r > R$)

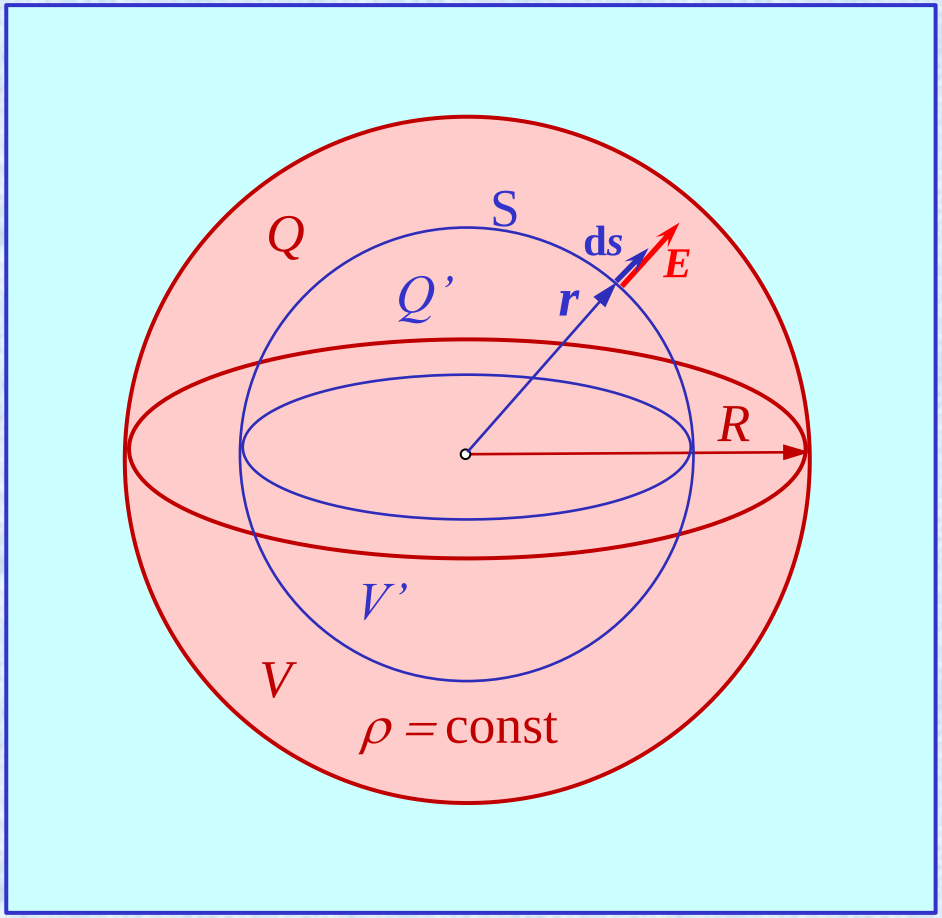
$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \oiint_S E ds = E \oiint_S ds = ES = 4\pi r^2 E$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{ds} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Przykład 1. Pole kuli jednorodnie naładowanej



Wewnątrz kuli ($r < R$)

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{ds} = \oint\!\!\oint_S E\mathrm{d}s = E\oint\!\!\oint_S \mathrm{d}s = ES = 4\pi r^2 E$$

$$Q' = \iiint_{V'} \rho \mathrm{d}v = \rho \iiint_{V'} \mathrm{d}v = \rho V' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3\varepsilon}\pi r^3 \rho$$

$$E = \frac{1}{3\varepsilon}\rho r$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

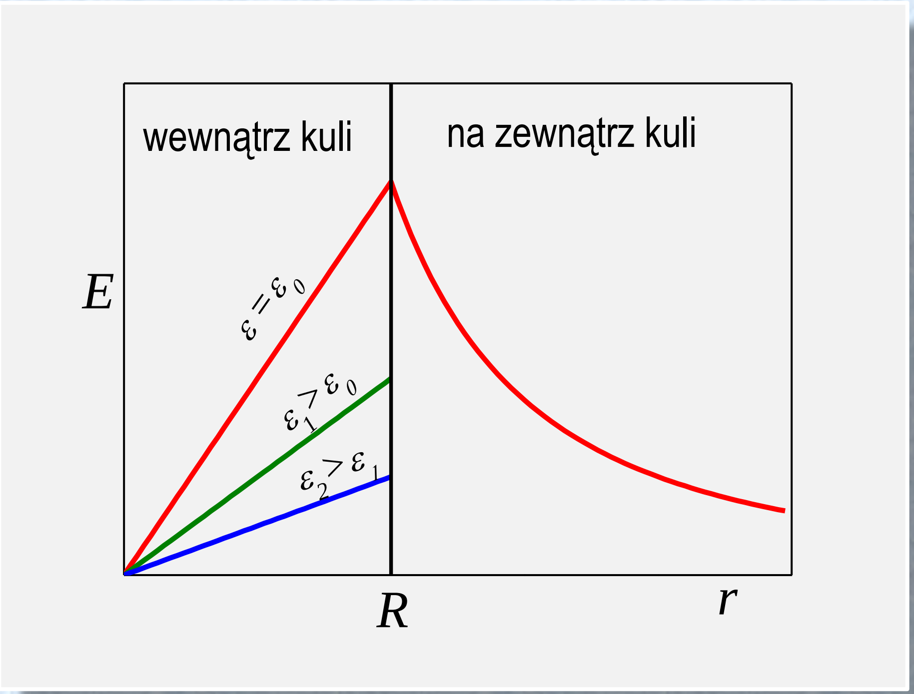
$$E = \frac{1}{3\varepsilon}\frac{3Q}{4\pi R^3} r$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} r$$

Przykład 1. Pole kuli jednorodnie naładowanej

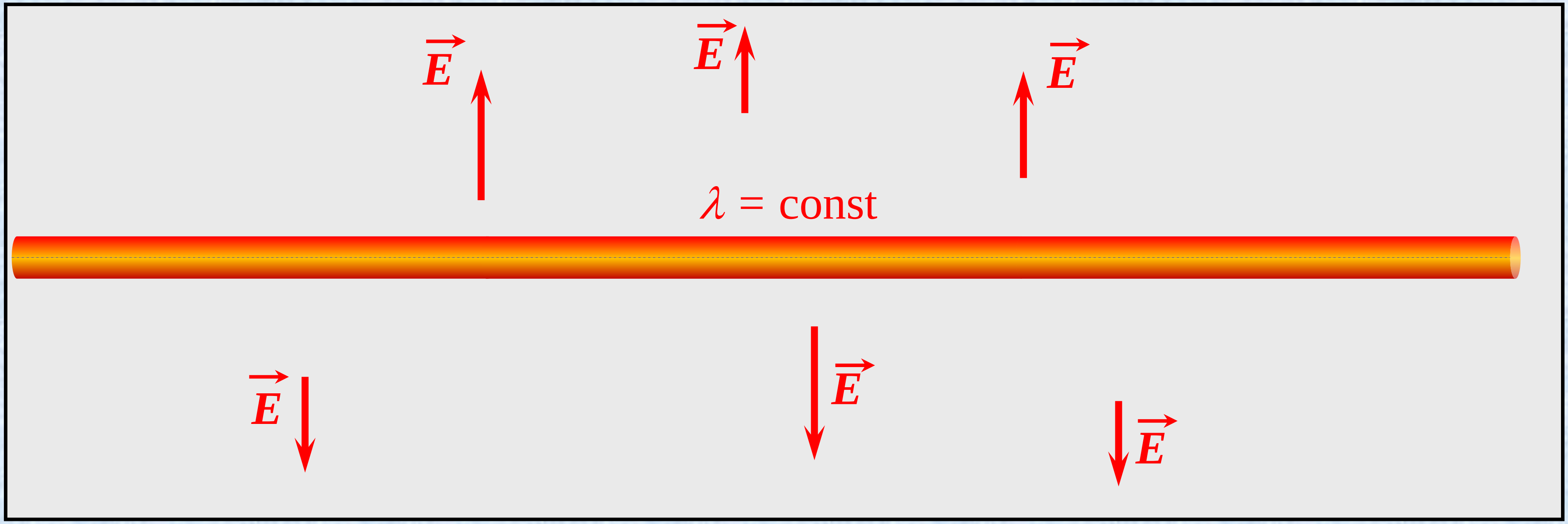
Podsumowanie

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon}\dfrac{r}{R^3} & \text{dla} \quad r < R \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{1}{r^2} & \text{dla} \quad r > R \end{cases}$$

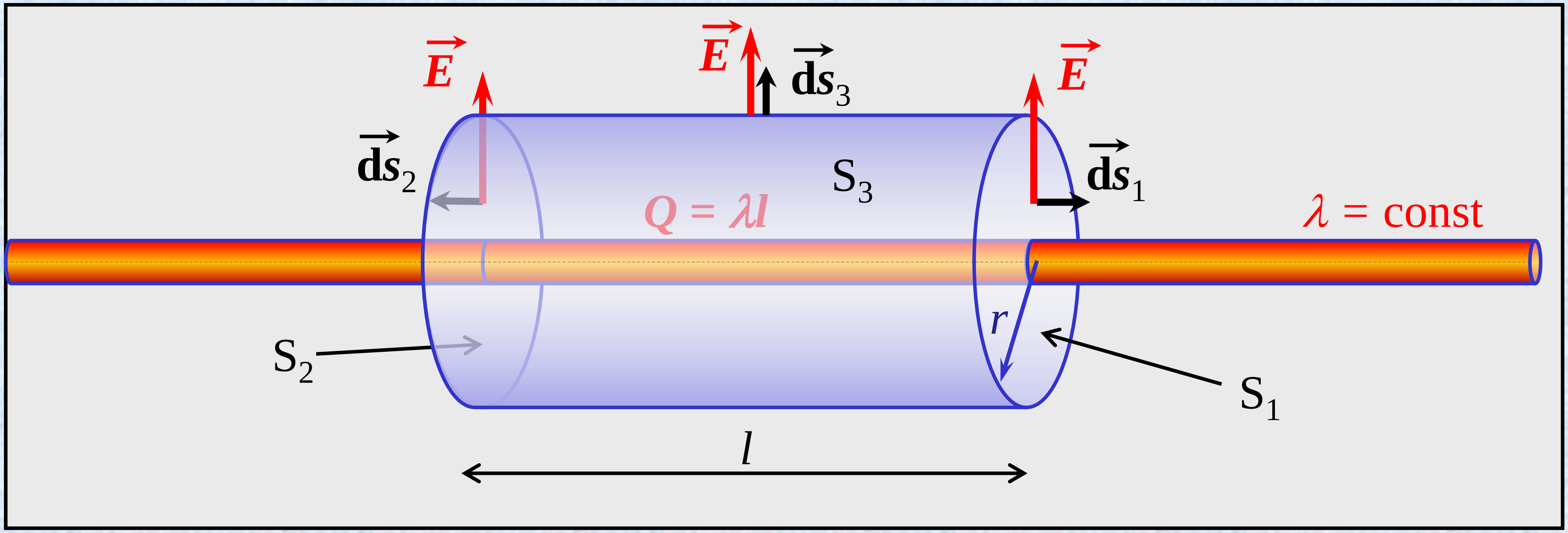


Część ćwiczeniowa

Przykład 2. Pole jednorodnie naładowanej nici prostoliniowej

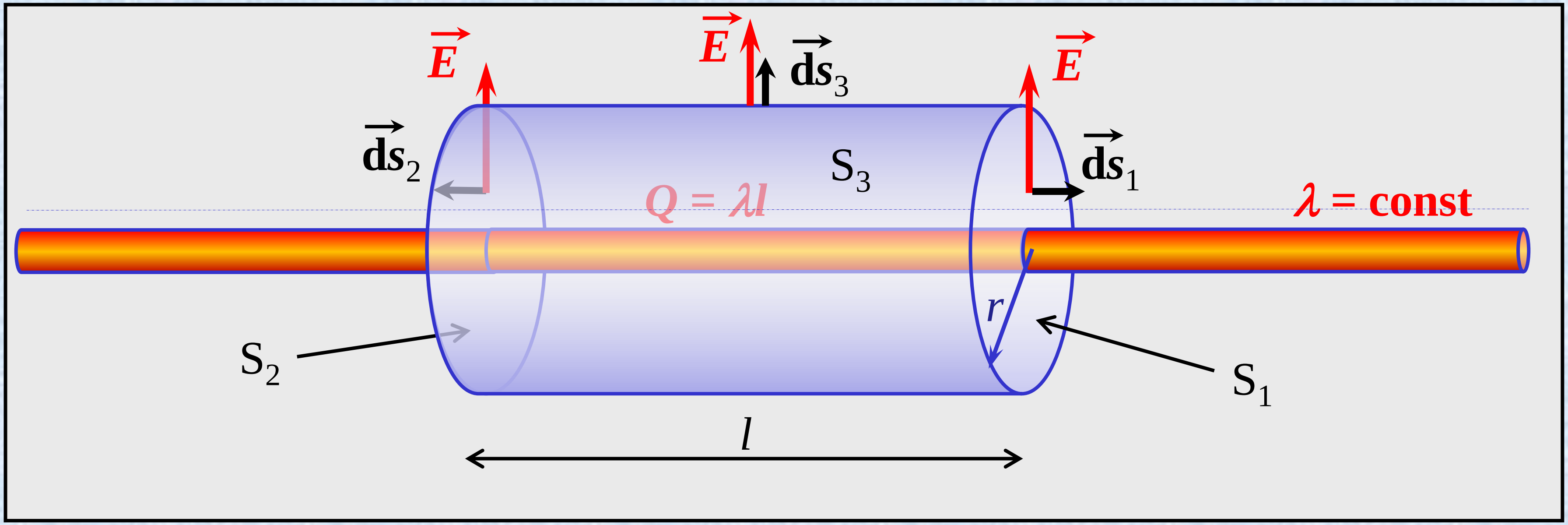


Przykład 2. Pole jednorodnie naładowanej nici prostoliniowej



Obliczanie strumienia elektrycznego

Przykład 2. Pole jednorodnie naładowanej nici prostoliniowej



Obliczenie ładunku wewnątrz powierzchni S

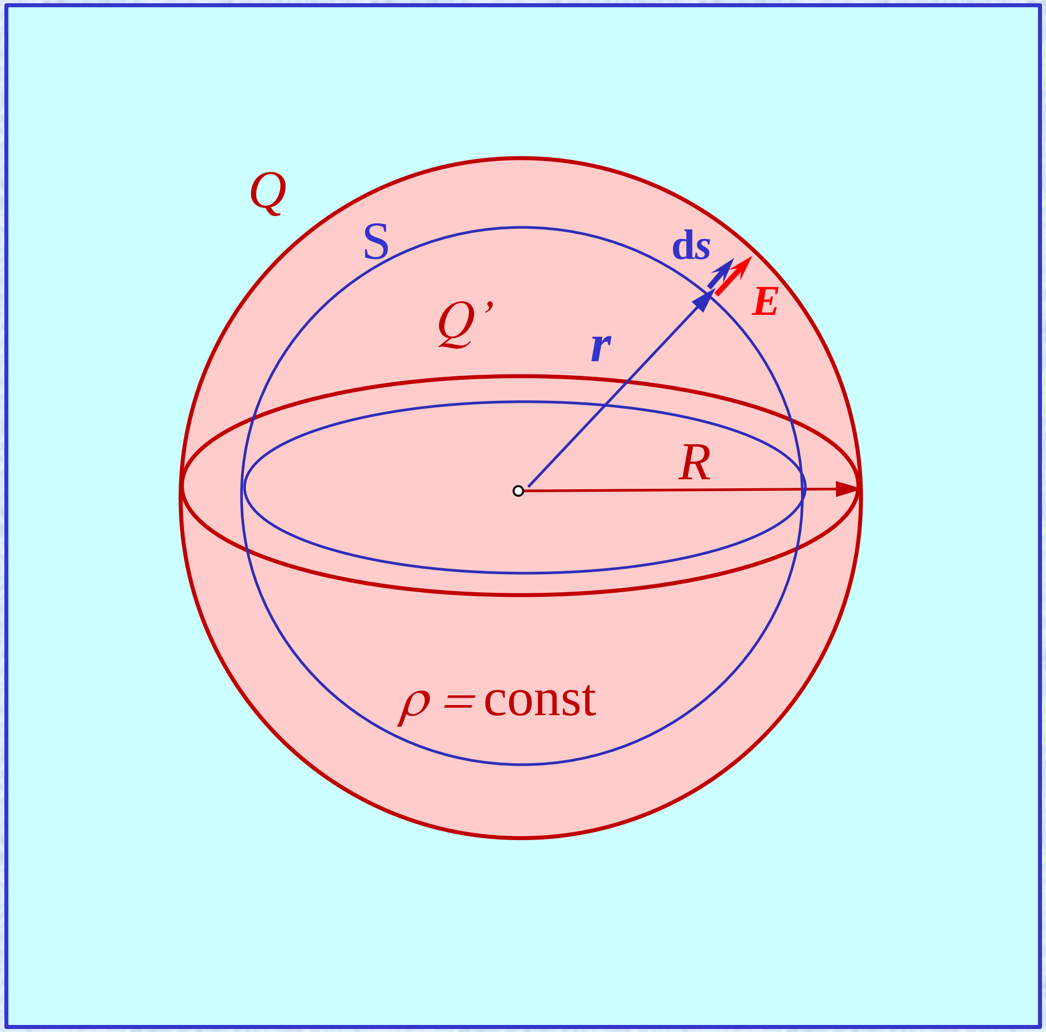
Zadanie do samodzielnego rozwiązania.

Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz nieskończenie długiego walca dielektrycznego o promieniu R i przenikalności elektrycznej ε. Sprawdzić czy spełniona jest relacja wyprowadzona w przykładzie 1:

$$\frac{E(R^+)}{E(R^-)} = \varepsilon_\mathrm{r}$$

gdzie $E(R^+)$ oznacza powierzchniową wartość pola elektrycznego od strony zewnętrznej walca, a $E(R^-)$ – od strony wewnętrznej.

Zadanie 1. Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (ρ = const)



$$r < R$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varepsilon} Q'$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \oiint_S E\mathrm{d}s = E \oiint_S \mathrm{d}s = ES = 4\pi r^2 E$$

$$Q' = \iiint_{V'} \rho \mathrm{d}V = \rho \iiint_{V'} \mathrm{d}V = \rho V'$$

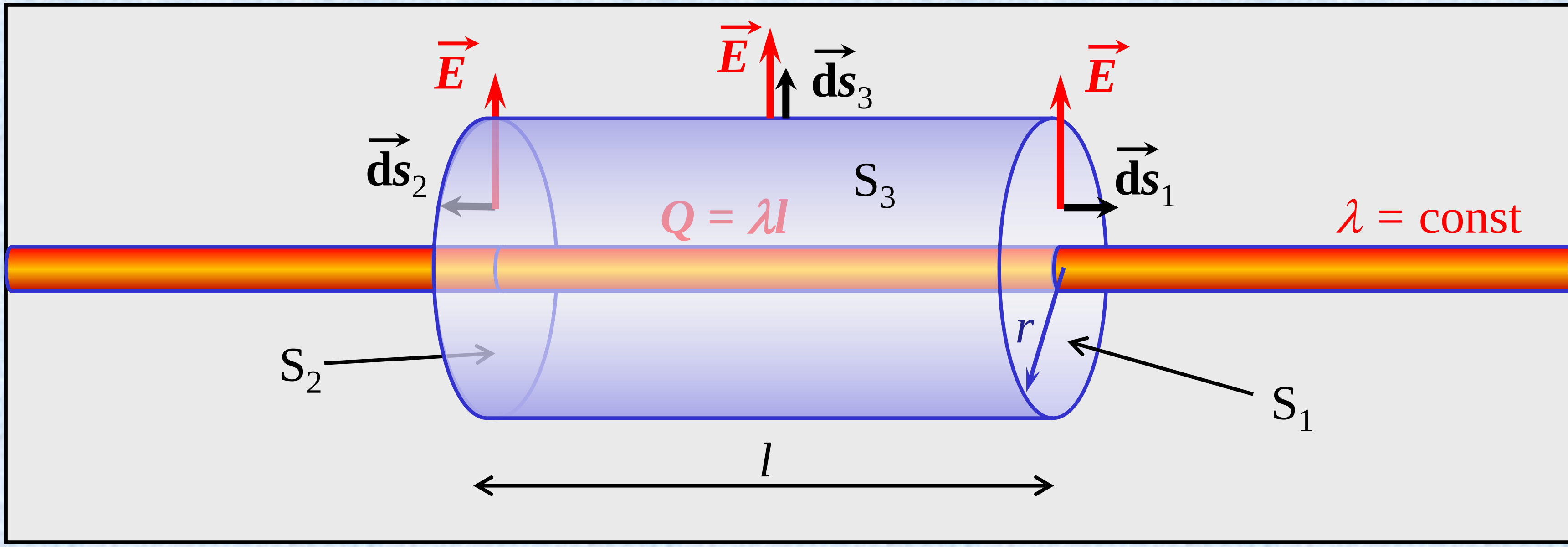
$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon} \rho V'$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon} \rho \frac{4}{3} \pi r^3$$

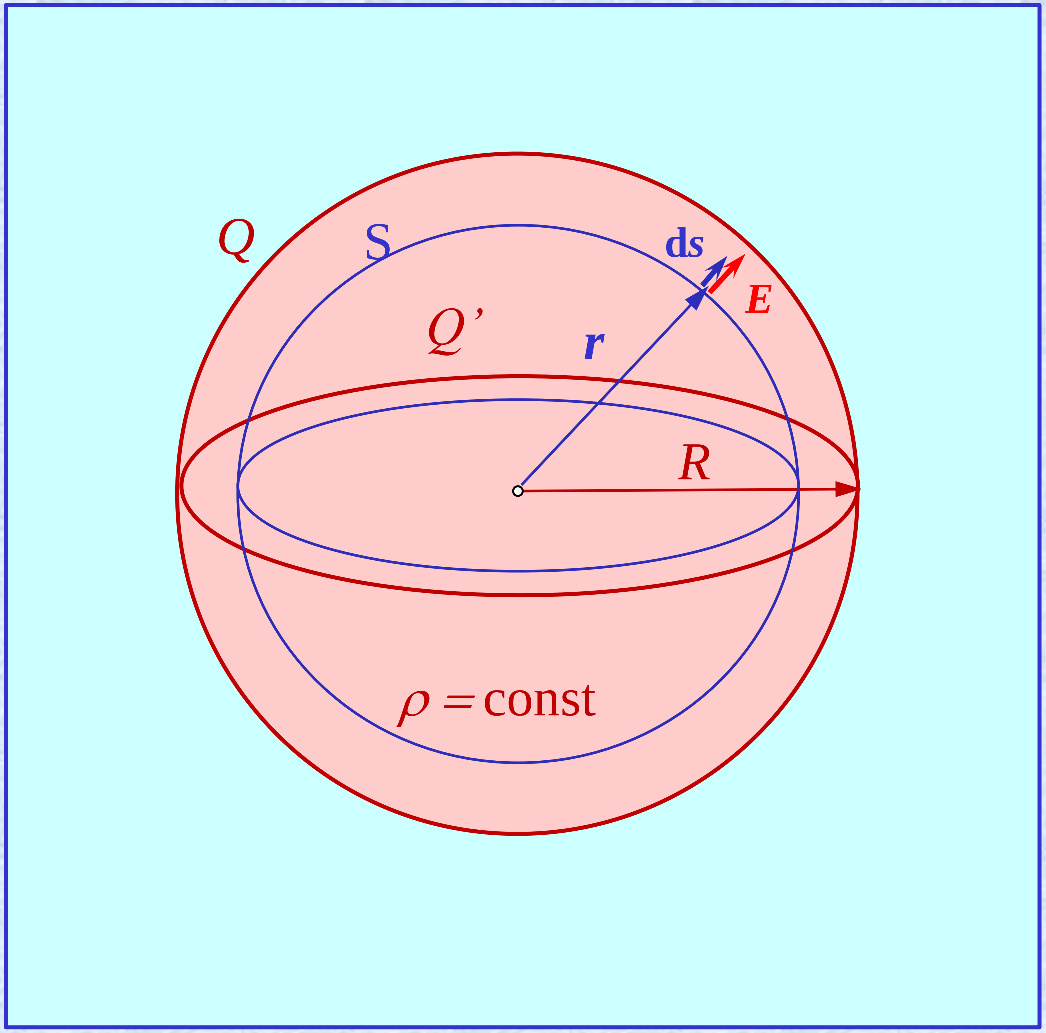
$$E = \frac{1}{3\varepsilon} \rho r \qquad \rho = \frac{Q}{V} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \frac{Q}{R^3} r$$

Zadanie 2. Obliczyć pole elektryczne na zewnątrz jednorodnie naładowanej linii prostoliniowej (λ = const)



Zadanie 1. Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (ρ = const)

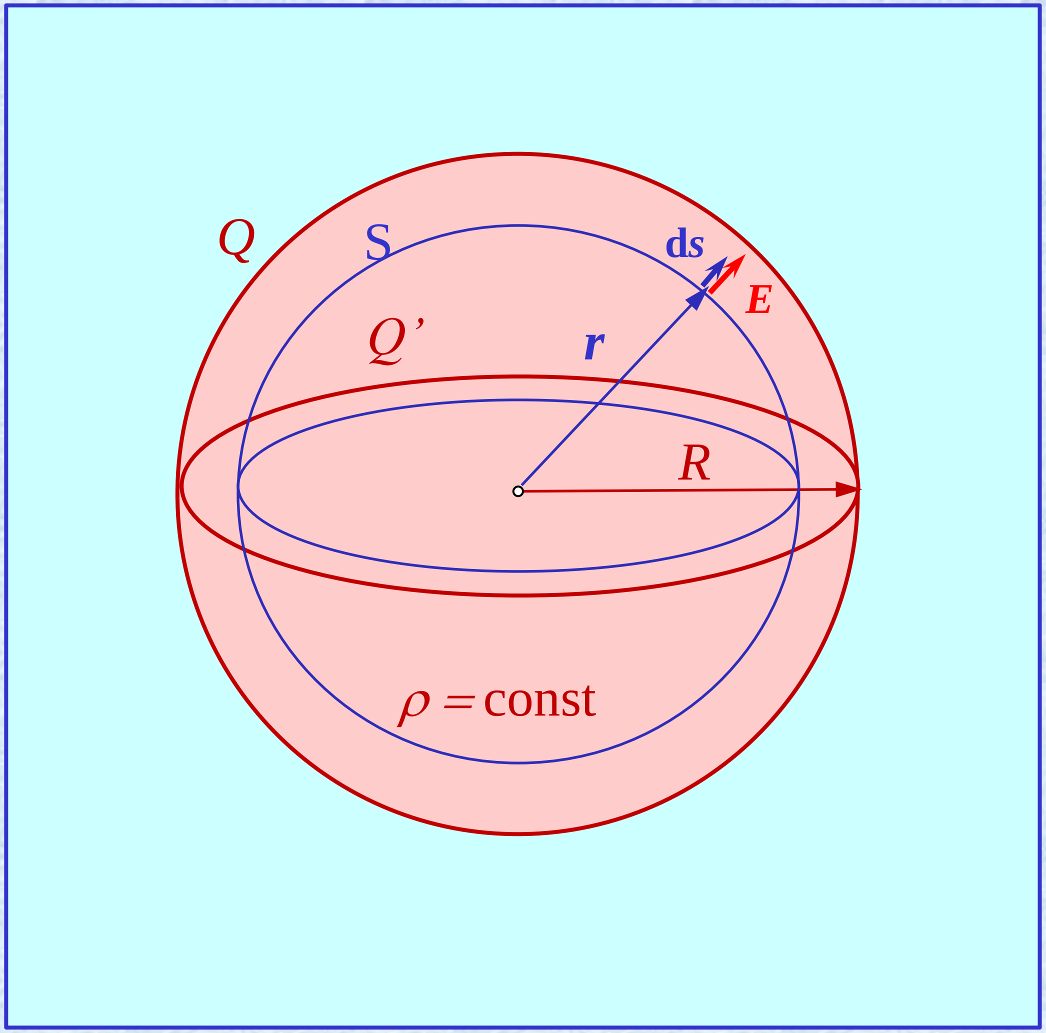


$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^3}r, & r < R \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

$$E(R) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}, & R^- \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}, & R^+ \end{cases}$$

$$\frac{E(R^+)}{E(R^-)} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

Zadanie 1. Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (ρ = const)



$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{R^3}r, & \text{dla } r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}, & \text{dla } r > R \end{cases}$$

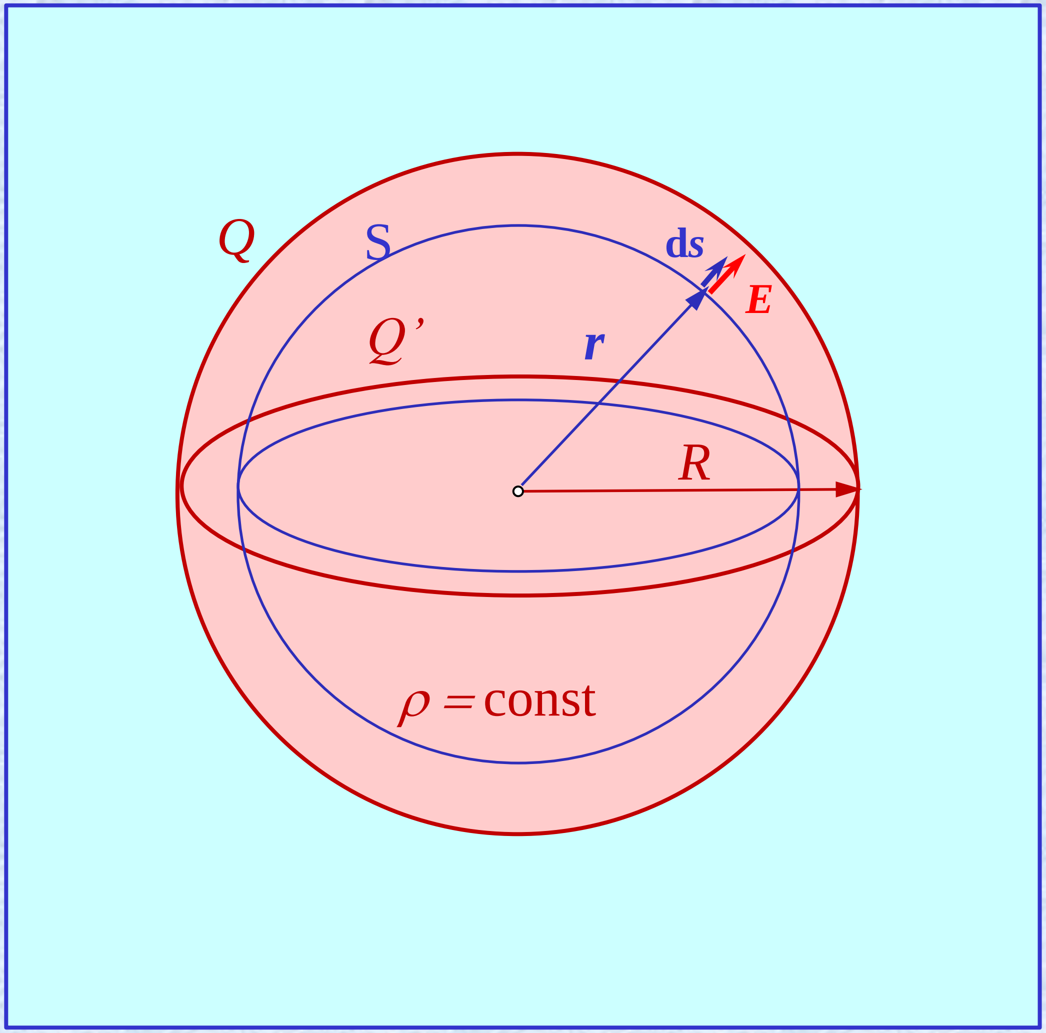
Dla $r = R$

$$E(R^-) = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{Q}{R^2}$$

$$E(R^+) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}$$

$$\frac{E(R^+)}{E(R^-)} = \frac{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R^2}}{\dfrac{1}{4\pi\varepsilon}\dfrac{Q}{R^2}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

Zadanie 1. Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (ρ = const)

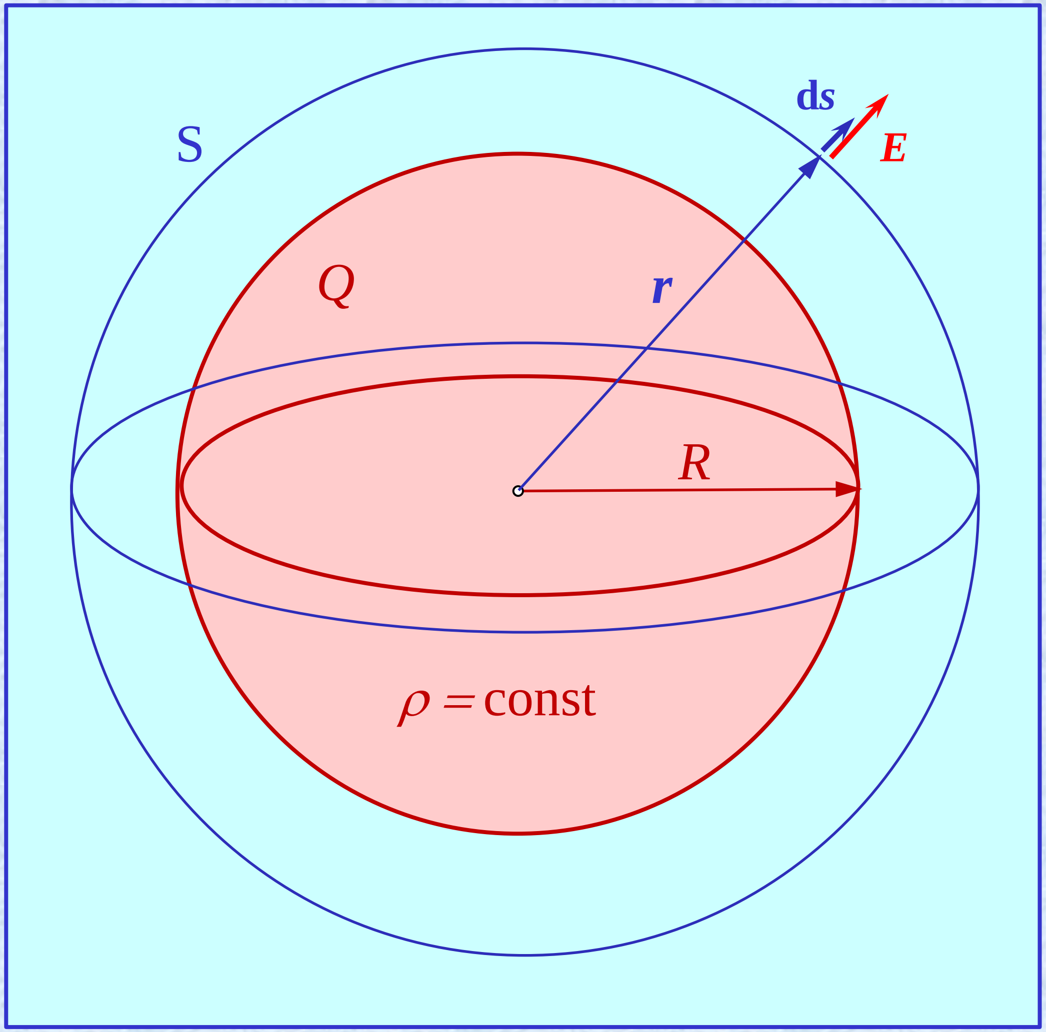


$$E = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \dfrac{Q}{R^3} r, & r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

$$E(R) = \begin{cases} \dfrac{1}{4\pi\varepsilon} \dfrac{Q}{R^2}, & r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{R^2}, & r > R \end{cases}$$

$$\frac{E(R_{>r})}{E(R_{<r})} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \varepsilon_r$$

Zadanie 1. Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (ρ = const)



$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

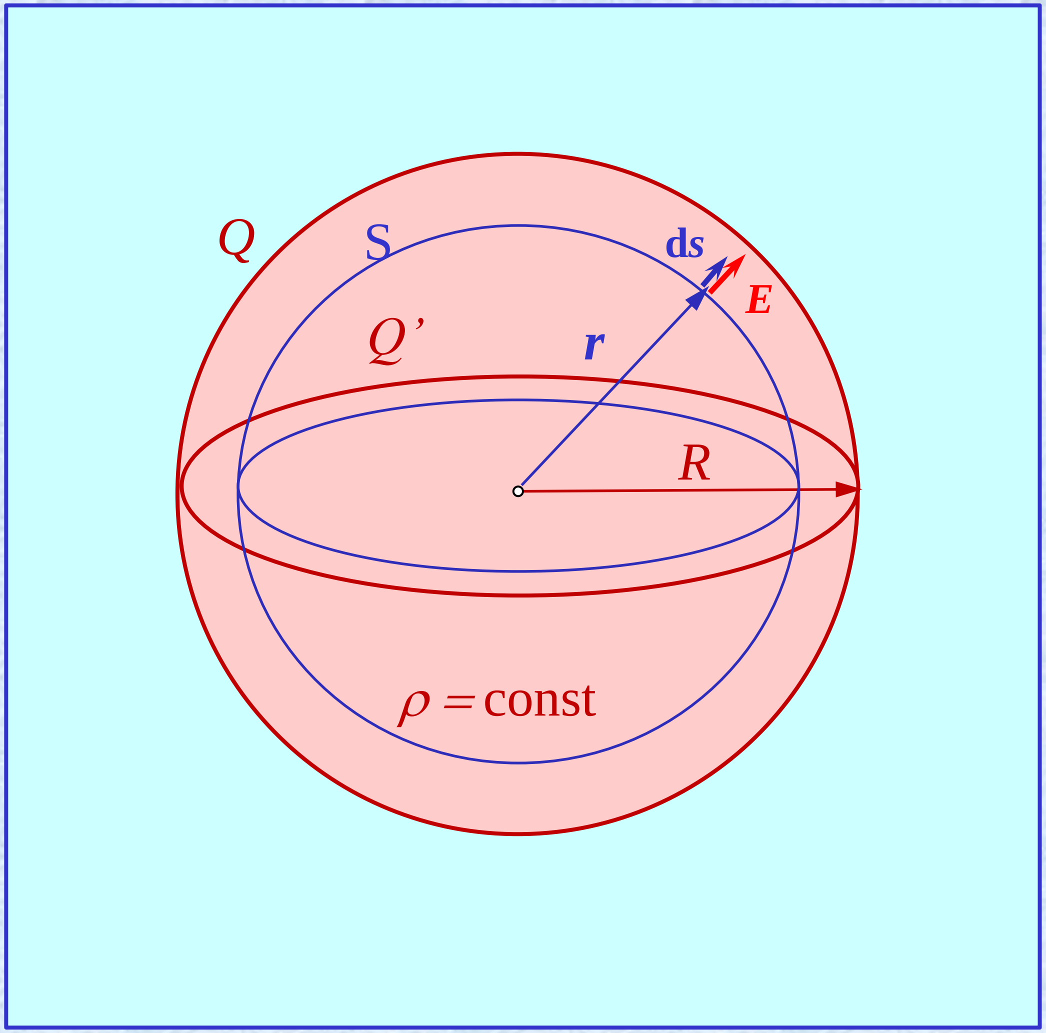
Dla $r > R$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \vec{\mathrm{d}s} = \oiint_S E \mathrm{d}s = E \oiint_S \mathrm{d}s = ES = 4\pi r^2 E$$

$$4\pi r^2 E = \frac{1}{\varepsilon_0} Q$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Zadanie 1. Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (ρ = const)



$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q'$$

Dla $r < R$

$$\oint\!\!\oint_S \vec{E}\cdot\vec{\mathrm{d}s} = \oint\!\!\oint_S E\mathrm{d}s = E\oint\!\!\oint_S \mathrm{d}s = ES = 4\pi r^2 E$$

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{3Q}{4\pi R^3}$$

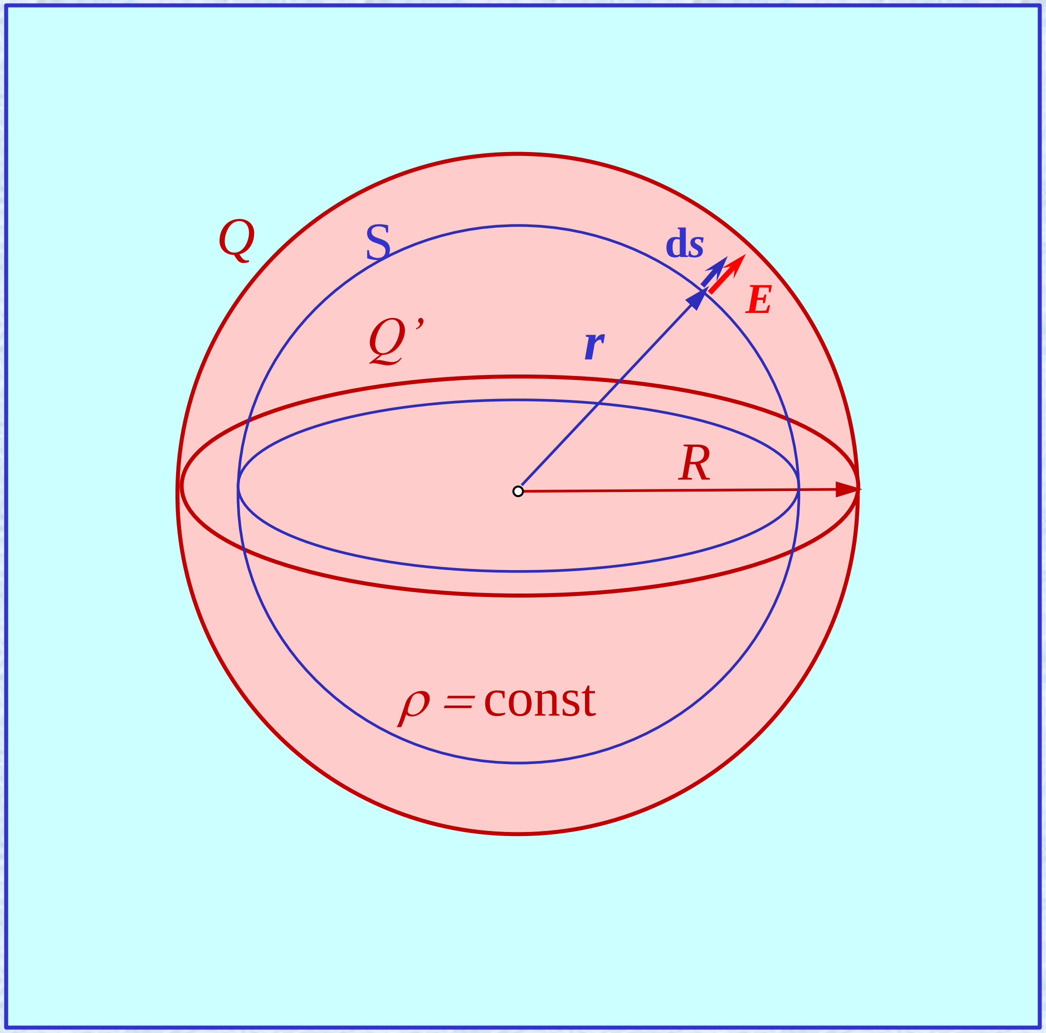
$$Q' = \iiint_{V'} \rho \mathrm{d}V' = \rho\iiint_{V'} \mathrm{d}V' = \rho V' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$4\pi r^2 E = \frac{4}{3\varepsilon}\pi r^3 \rho$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon} r$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} r$$

Zadanie 1. Obliczyć pole elektryczne wewnątrz i na zewnątrz jednorodnie naładowanej kuli (ρ = const)



$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R^3} r, & r < R \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{Q}{r^2}, & r > R \end{cases}$$

$r = R$

$$E(R^-) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}$$

$$E(R^+) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$\frac{E(R^+)}{E(R^-)} = \frac{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon R^2}} = \frac{\dfrac{1}{\varepsilon_0}}{\dfrac{1}{\varepsilon}} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$$