POLITECHNIKA RZESZOWSKA im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski

Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

2. Podstawowe pojęcia teorii pola elektromagnetycznego

2. Podstawowe pojęcia teorii pola elektromagnetycznego

2.1. Ładunek elektryczny

2.2. Gęstości ładunku elektrycznego

2.3. Natężenie i gęstość prądu

2.4. Zasada zachowania ładunku

2.5. Wektory pola elektromagnetycznego

2.6. Wzór Lorentza

2.1. Ładunek elektryczny

- Ładunek elektryczny jest w teorii pola elektromagnetycznego pojęciem pierwotnym (ściśle niedefiniowalnym).
- Jest to pewna właściwość każdego ciała fizycznego przejawiająca się w zjawiskach elektromagnetycznych i dająca się opisać liczbą rzeczywistą (skalarem) dodatnią, ujemną lub zerem.
- Jednostką ładunku w układzie SI jest ***kulomb*** [C] definiowany jako iloczyn ampera przez sekundę: $\mathrm{C} = \mathrm{A} \cdot \mathrm{s}$ (jednostką podstawową w układzie SI jest amper, ponieważ natężenie prądu można zmierzyć dokładniej niż ładunek elektryczny).
- Najczęściej używane symbole literowe na oznaczenie ładunku to q i Q.
- **<u>Fakty eksperymentalne</u>**
- Ciała obdarzone ładunkami jednoimiennymi się odpychają, a różnoimiennymi przyciągają
- W fizycznym układzie zamkniętym suma ładunków elektrycznych jest zawsze stała (zasada zachowania ładunku)
- Istnieje najmniejsza obserwowalna porcja ładunku, tzw. ***ładunek elementarny:***

$$e = 1{,}6021766209 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$$

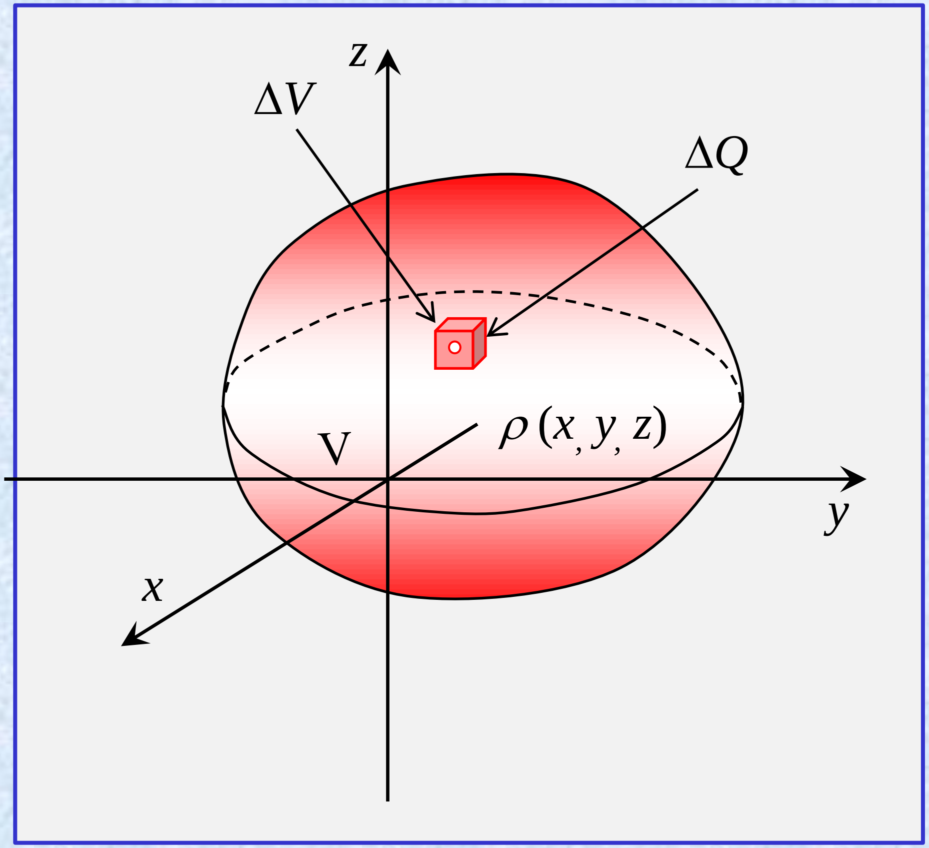
2.2. Gęstość ładunku elektrycznego

- Objętościowa gęstość ładunku elektrycznego

$$\rho = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta V} = \frac{dQ}{dV}$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \iiint_V \rho \, dV$$



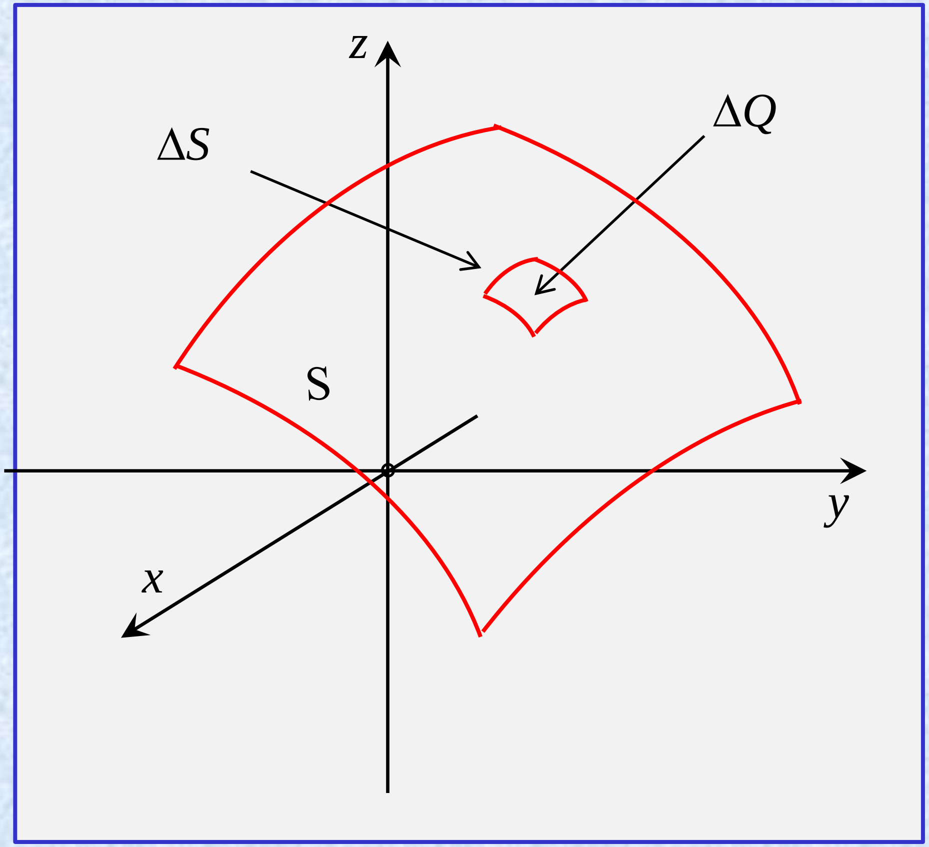
2.2. Gęstość ładunku elektrycznego

- Gęstość powierzchniowa ładunku elektrycznego

$$\sigma = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta s} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \iint_{S} \sigma \, \mathrm{d}s$$



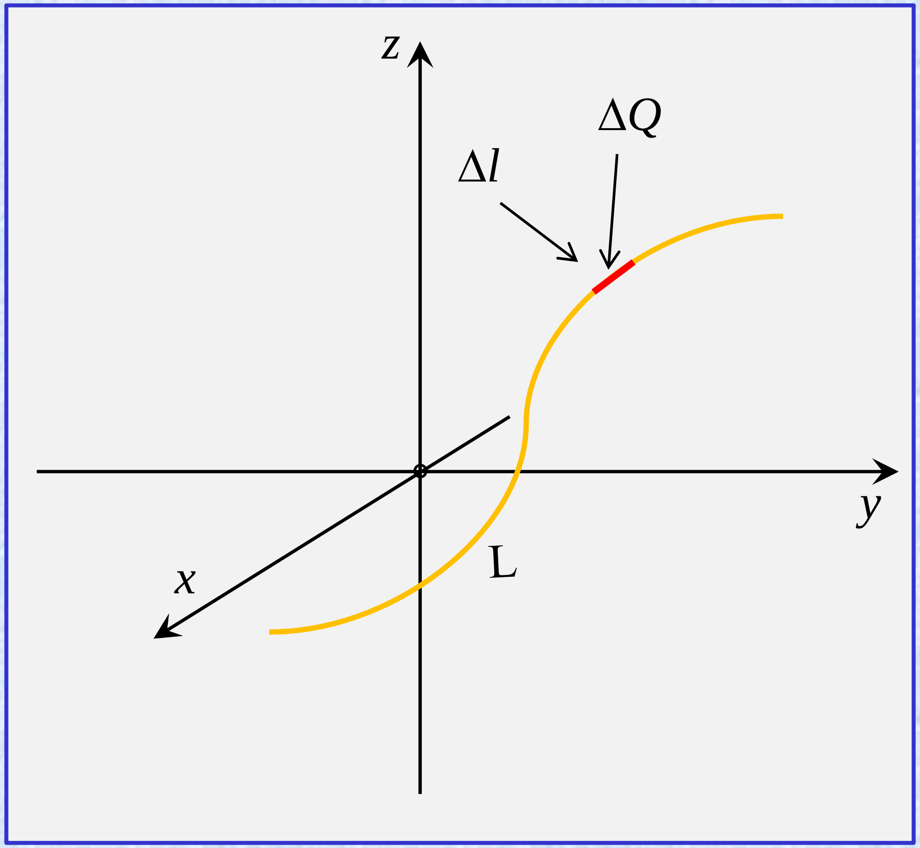
2.2. Gęstość ładunku elektrycznego

- Liniowa gęstość ładunku elektrycznego

$$\lambda = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta l} = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}l}$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \int_{\mathrm{L}} \lambda \, \mathrm{d}l$$



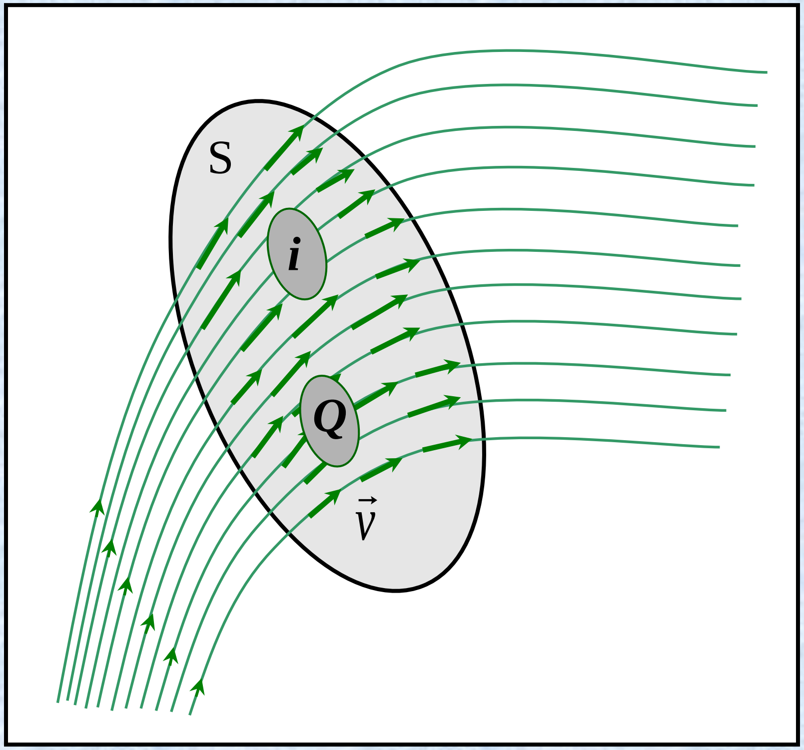
2.3. Natężenie i gęstość natężenia prądu

- Natężenie prądu

$$i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)\,dt$$



Jednostką natężenia prądu jest amper [A].
Jest to jednostka podstawowa układu SI.

2.3. Natężenie i gęstość natężenia prądu

- Gęstość natężenia prądu

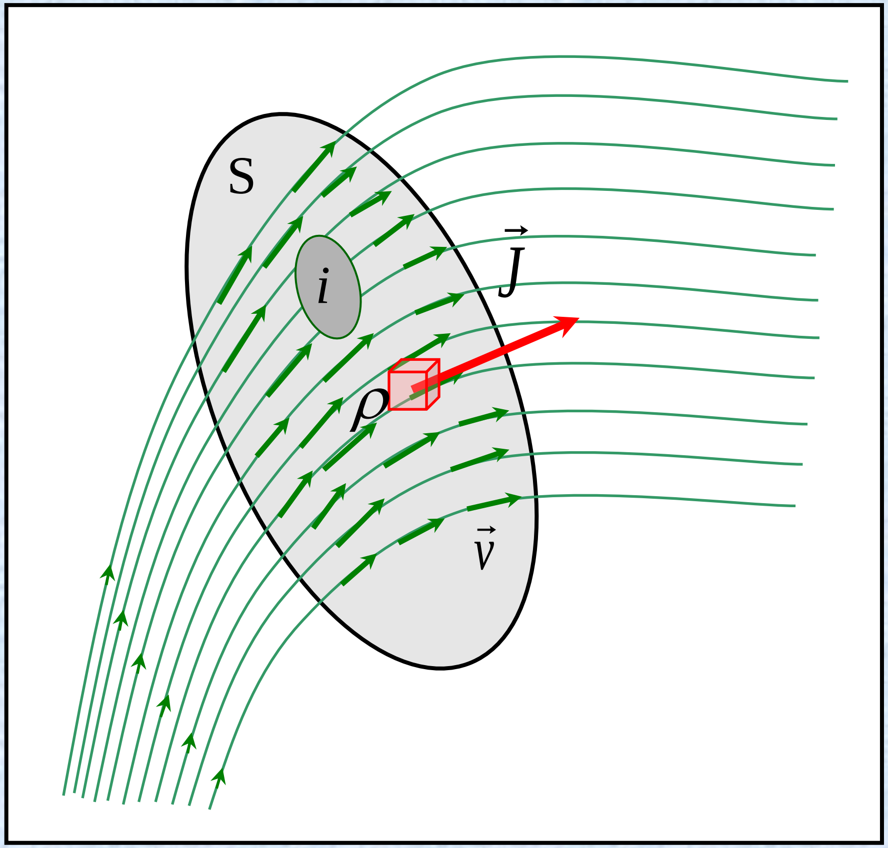
$$\vec{J} = \rho \vec{v}$$

- Jednostki gęstości prądu

$$\left[\vec{J}\right] = [\rho] \cdot [\vec{v}] = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{A \cdot s}}{\mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{s}} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\rho > 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J} \uparrow\uparrow \vec{v}$$

$$\rho < 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{J} \uparrow\downarrow \vec{v}$$



2.3. Natężenie i gęstość natężenia prądu

Związek natężenia z gęstością prądu

Z definicji natężenia prądu i gęstości ładunku mamy:

$$\mathrm{d}i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \qquad \mathrm{d}q = \rho \mathrm{d}V$$

czyli: $$\mathrm{d}i = \rho \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} \qquad (*)$$

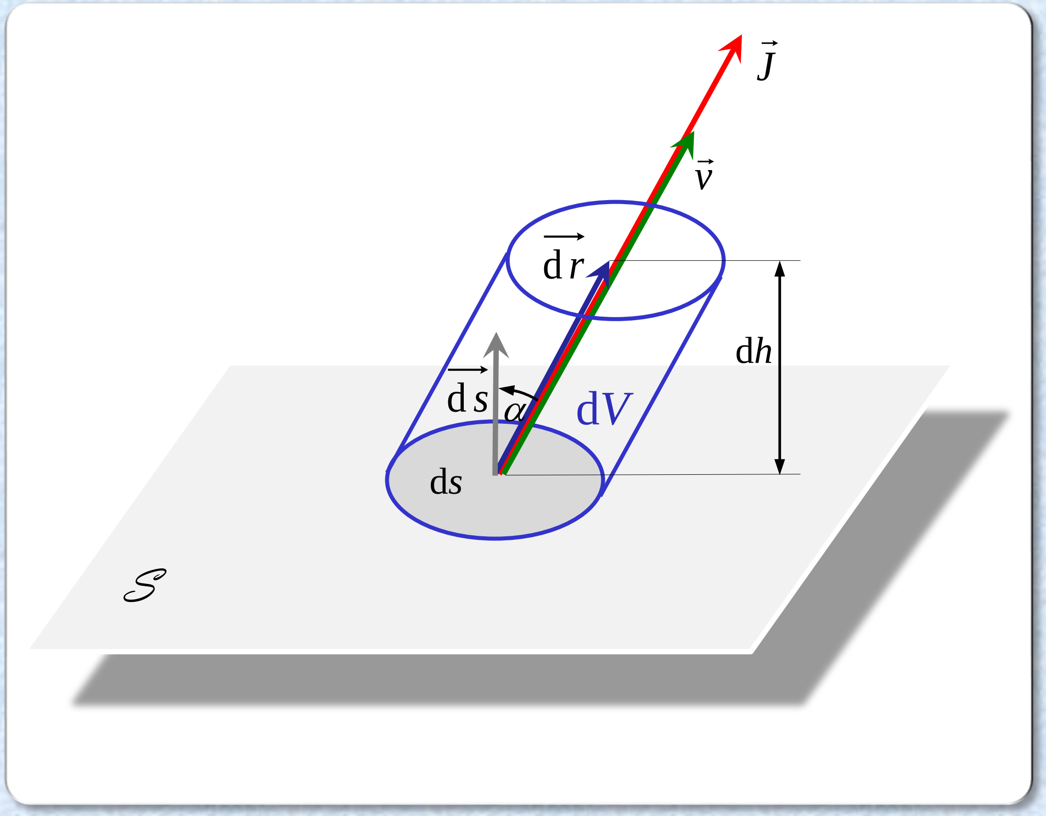
Obliczamy objętość $\mathrm{d}V$:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s \cdot \mathrm{d}h$$

ale (patrz rysunek): $\mathrm{d}h = \mathrm{d}r \cos\alpha$

więc:

$$\mathrm{d}V = \mathrm{d}s\,\mathrm{d}r\cos\alpha = \overrightarrow{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r}$$

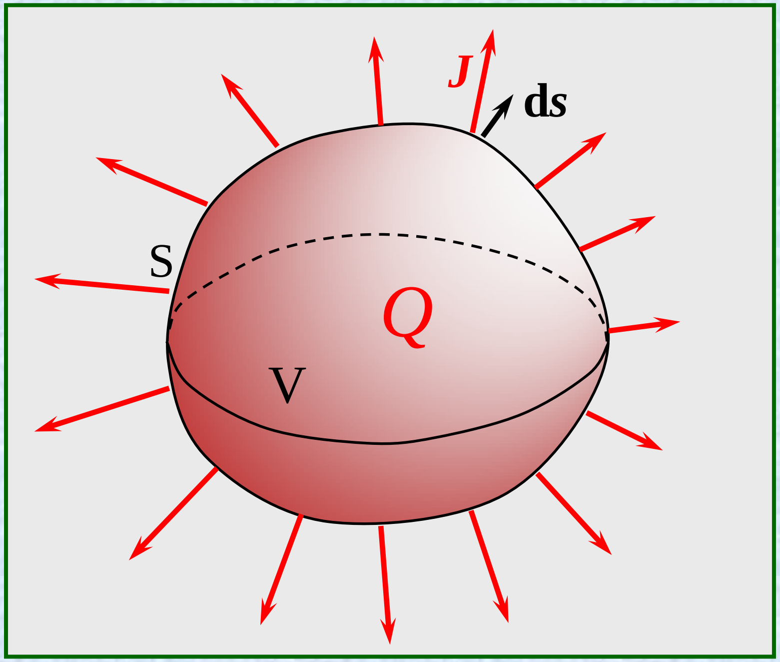


Podstawiając to (∗) otrzymujemy:

$$\mathrm{d}i = \rho \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}s} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}t} = \rho \underbrace{\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}r}}{\mathrm{d}t}}_{=\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \underbrace{\rho\vec{v}}_{=\vec{J}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{i = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{d}i = \iint_{\mathcal{S}} \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}}$$

2.4. Zasada zachowania ładunku

Sformułowanie całkowe



$\mathrm{d}Q$ – przyrost ładunku wewnątrz obszaru V

$\mathrm{d}q$ – ładunek przepływający w czasie $\mathrm{d}t$ przez powierzchnię S (wypływający na zewnątrz obszaru V)

Zgodnie z zasadą zachowania ładunku:

$$\mathrm{d}q = -\mathrm{d}Q$$

Natężenie prądu przepływającego przez S :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

ale: $i = \iint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$ i $Q = \iiint_V \rho \,\mathrm{d}V$

Zatem:

$$\boxed{\oiint_S \vec{J} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iiint_V \rho \,\mathrm{d}V}$$

2.4. Zasada zachowania ładunku

Sformułowanie różniczkowe

Wychodzimy ze sformułowania całkowego: $$\oiint_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

Korzystając z twierdzenia Gaussa: $$\oiint_S \vec{J}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{J}\,\mathrm{d}V$$

mamy: $$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{J}\,\mathrm{d}V = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

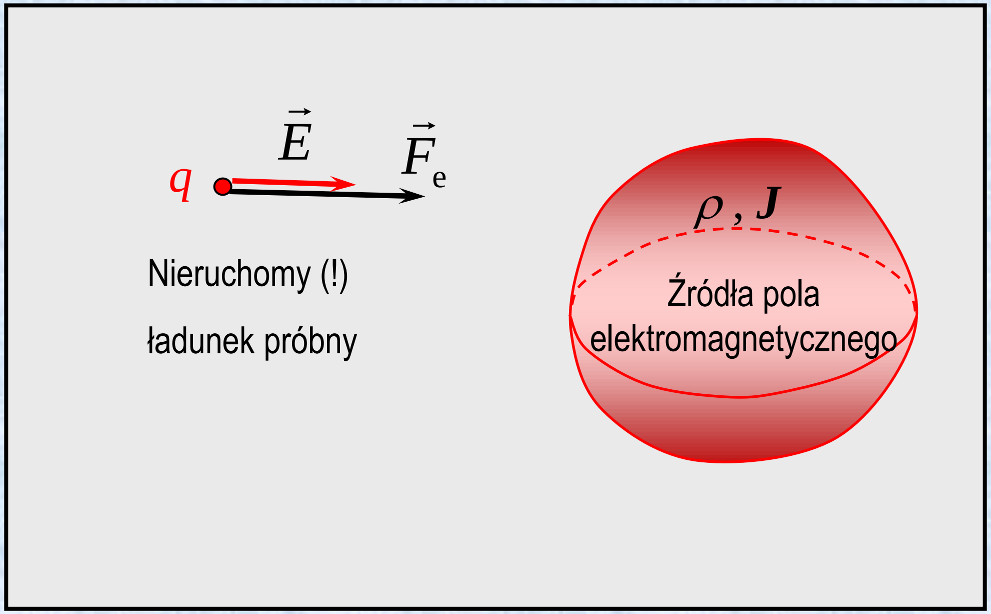
Zamieniamy kolejność różniczkowania i całkowania po prawej stronie:

$$\iiint_V \mathrm{div}\,\vec{J}\,\mathrm{d}V = -\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}V$$

i stąd: $$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{J} = -\frac{\partial\rho}{\partial t}}$$

2.5. Wektory pola elektromagnetycznego

2.5.1. Natężenie pola elektrycznego



Fakt eksperymentalny:

- siła elektryczna jest proporcjonalna do ładunku

$$\vec{F}_e \sim q$$

Natężenie pola elektrycznego:

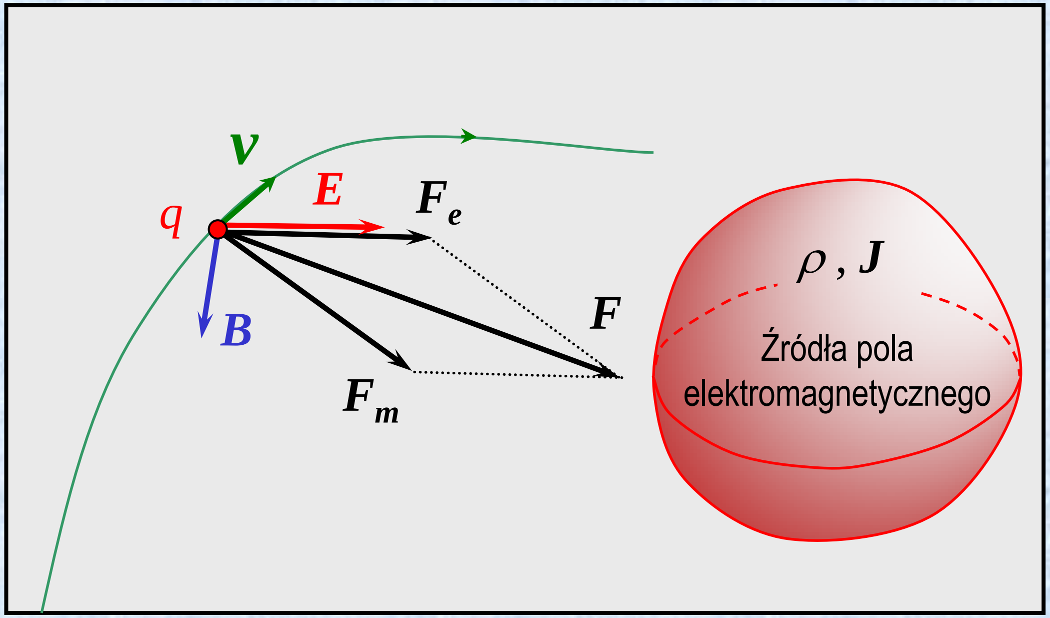
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q}}$$

Jednostka: [N/C]=[V/m].

Ładunek próbny
– ciało o pomijalnie małych rozmiarach (punkt materialny) i znikomo małym ładunku dodatnim

2.5. Wektory pola elektromagnetycznego

Indukcja magnetyczna



Fakty eksperymentalne:

- $\vec{F}_m \sim q$
- $\left|\vec{F}_m\right| \sim \left|\vec{v}\right|$
- $\vec{F}_m \perp \vec{v}$

Indukcja magnetyczna $\vec{B}$:

$$\boxed{\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}}$$

Jednostka indukcji magnetycznej:

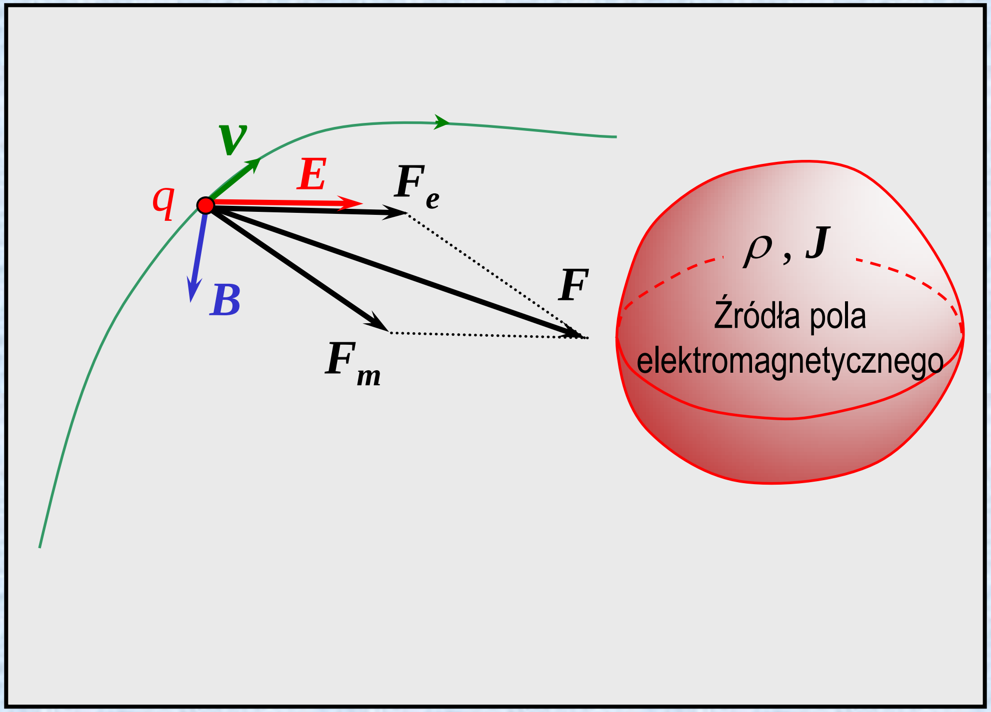
$$[B] = \frac{\mathrm{N \cdot s}}{\mathrm{C \cdot m}} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A \cdot s^2}} = \mathrm{T}$$ **(tesla)**

2.6. Wzór Lorentza

$$\vec{F} = \vec{F}_{\mathrm{e}} + \vec{F}_{\mathrm{m}}$$

$$\vec{F}_{\mathrm{e}} = q\vec{E} \qquad \vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\boxed{\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)}$$



q - ładunek (punktowy)

$\vec{v}$ - prędkość

$\vec{E}$ - natężenie pola elektrycznego

$\vec{B}$ - indukcja magnetyczna

Przykłady i zadania ćwiczeniowe

Przykład 1

We współrzędnych kartezjańskich natężenie pola elektrycznego ładunku punktowego o wartości Q umieszczonego w punkcie $\mathrm{A}(x_\mathrm{A},\ y_\mathrm{A},\ z_\mathrm{A})$ opisane jest następującą funkcją wektorową (tzw. *pole kulombowskie*):

$$\vec{E}(x,y,z) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left[x - x_\mathrm{A},\quad y - y_\mathrm{A},\quad z - z_\mathrm{A}\right]}{\left(\sqrt{(x - x_\mathrm{A})^2 + (y - y_\mathrm{A})^2 + (z - z_\mathrm{A})^2}\right)^3}$$

gdzie $\varepsilon_0 \approx 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{F/m}$ - przenikalność elektryczna próżni.

Obliczyć siłę oraz jej wartość, z jaką działa ładunek punktowy $Q = 2\mathrm{mC}$ znajdujący się w punkcie $\mathrm{A}(1,\ 3,\ \text{-}2)\ \mathrm{m}$ na ładunek punktowy $q = 5\mu\mathrm{C}$ znajdujący się w punkcie $\mathrm{B}(3,\ 4,\ 0)\ \mathrm{m}$. Zakładamy, że oba ładunki są statyczne.

Rozwiązanie

Siła działająca na ładunek statyczny punktowy q znajdujący się w polu elektrycznym o natężeniu $\boldsymbol{E}$ wyraża się wzorem:

$$\vec{F} = q\vec{E}$$

czyli w naszym przypadku:

$$\vec{F} = \frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\left[x_B - x_A, \quad y_B - y_A, \quad z_B - z_A\right]}{\left(\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}\right)^3}$$

Podstawiamy dane liczbowe (zwracając szczególną uwagę na jednostki!) :

$$\vec{F} = \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 5 \cdot 10^{-3}}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}} \frac{\left[3-1, \quad 4-3, \quad 0-(-2)\right]}{\left(\sqrt{(3-1)^2 + (4-3)^2 + (0-(-2))^2}\right)^3} \approx 89{,}9 \frac{\left[2, \quad 1, \quad 2\right]}{27} = \left[6{,}6; \quad 3{,}3; \quad 6{,}6\right] \mathrm{N}$$

Obliczamy wartość siły: $F = \left|\vec{F}\right| = \sqrt{6{,}6^2 + 3{,}3^2 + 6{,}6^2} = 9{,}9\ \mathrm{N}$

Odpowiedź:

$$\vec{F} = \left[6{,}6; \quad 3{,}3; \quad 6{,}6\right] \mathrm{N}, \qquad F = 9{,}9\ \mathrm{N}$$

Przykład 2

Indukcja magnetyczna w otoczeniu prostoliniowego przewodu ułożonego wzdłuż osi OZ z prądem stałym o natężeniu i płynącym w kierunku zgodnym z osią OZ opisana jest funkcją :

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad -\frac{x}{x^2 + y^2}, \quad 0\right]$$

gdzie $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\ \mathrm{H/m}$ - przenikalność magnetyczna próżni.

Przyjmując i =20 A oblicz siłę działającą na ładunek punktowy q = 10mC znajdujący się w tym polu w punkcie A(1, 3, -2) mm i poruszający się równolegle do osi przewodu (zgodnie osią OZ) z prędkością v = 200 m/s.

Rozwiązanie

Siłę z jaką działa pole magnetyczne na punktowy ładunek elektryczny obliczamy ze wzoru Lorentza:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

Zgodnie z treścią zadania ładunek q porusza się równolegle do osi OZ i zgodnie z nią, więc

$$\vec{v} = \left[0,\ 0,\ v_x\right] = \left[0,\ 0,\ 200\right] \mathrm{m/s}$$

Obliczamy wektor indukcji magnetycznej w punkcie A:

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 20}{2\pi}\left[\frac{3\cdot 10^{-3}}{\left(1\cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(3\cdot 10^{-3}\right)^2},\quad -\frac{1\cdot 10^{-3}}{\left(1\cdot 10^{-3}\right)^2 + \left(3\cdot 10^{-3}\right)^2},\quad 0\right] =$$

$$= 4\cdot 10^{-6}\left[0{,}3\cdot 10^{3},\quad -0{,}1\cdot 10^{3},\quad 0\right] = \left[1{,}2,\quad -0{,}4,\quad 0\right]\cdot 10^{-3}\ \mathrm{T}$$

Obliczamy siłę Lorentza:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = 10\cdot 10^{-3}\cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 200 \\ 1{,}2\cdot 10^{-3} & 0{,}4\cdot 10^{-3} & 0 \end{vmatrix} = 10^{-2}\cdot \begin{bmatrix} -80\cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}8\cdot 10^{-3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{N}$$

Zwróćmy uwagę, że siła ta jest skierowana przeciwnie do osi OX (znak minus!), czyli ładunek ten jest odpychany od przewodu z prądem.

Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1

We współrzędnych kartezjańskich natężenie pola elektrycznego dwóch blisko siebie położonych ładunków o przeciwnych wartościach opisane jest następującą funkcją wektorową (dipol elektryczny umieszczony w początku układu współrzędnych skierowany równolegle do osi OZ) :

$$\vec{E}(x,y,z)=\frac{p}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\left[3xz,\quad 3yz,\quad -x^2-y^2+2z^2\right]}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^5}$$

p – moment dipolowy (iloczyn wartości bezwzględnej ładunków tworzących dipol przez odległość między nimi)

Obliczyć siłę oraz jej wartość, z jaką działa taki dipol o momencie $p=2\cdot 10^{-9}\ \mathrm{C\cdot m}$ na ładunek punktowy q = -4μC znajdujący się w punkcie B(4, 0, 3) cm.

Zadanie 2

Indukcja magnetyczna w otoczeniu prostoliniowego przewodu ułożonego wzdłuż osi OX z prądem stałym o natężeniu i płynącym w kierunku zgodnym z osią OX opisana jest funkcją :

$$\vec{B}(x,y,z) = \frac{\mu_0 i}{2\pi}\left[0, \quad \frac{z}{y^2+z^2}, \quad -\frac{y}{y^2+z^2}\right]$$

gdzie $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$ - przenikalność magnetyczna próżni.

Przyjmując i =50 A oblicz siłę działającą na ładunek punktowy q = 3mC znajdujący się w tym polu w punkcie A(2, -1, 4) mm i poruszający się równolegle do osi OY z prędkością v = 2 km/s.