POLITECHNIKA RZESZOWSKA
im. IGNACEGO ŁUKASIEWICZA

WYDZIAŁ ELEKTROTECHNIKI I INFORMATYKI
POLITECHNIKI RZESZOWSKIEJ

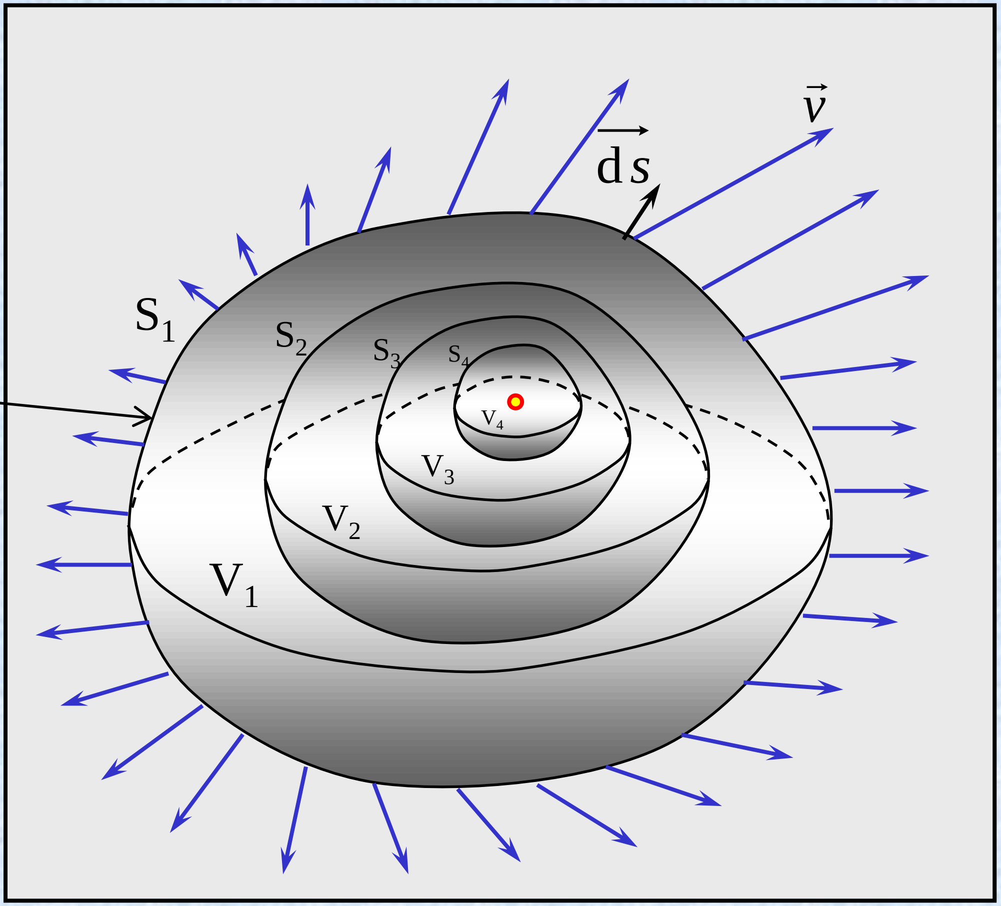
Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski
spawlo@prz.edu.pl

1.4. Związki między różniczkowymi i całkowymi operacjami na polach

1.4.1. Całkowa definicja dywergencji

$$\operatorname{div}\vec{v} \overset{def}{=} \lim_{V\to 0}\frac{\underset{S}{\oiint}\vec{v}\cdot\overrightarrow{ds}}{V}$$



S_n są powierzchniami zamkniętymi!

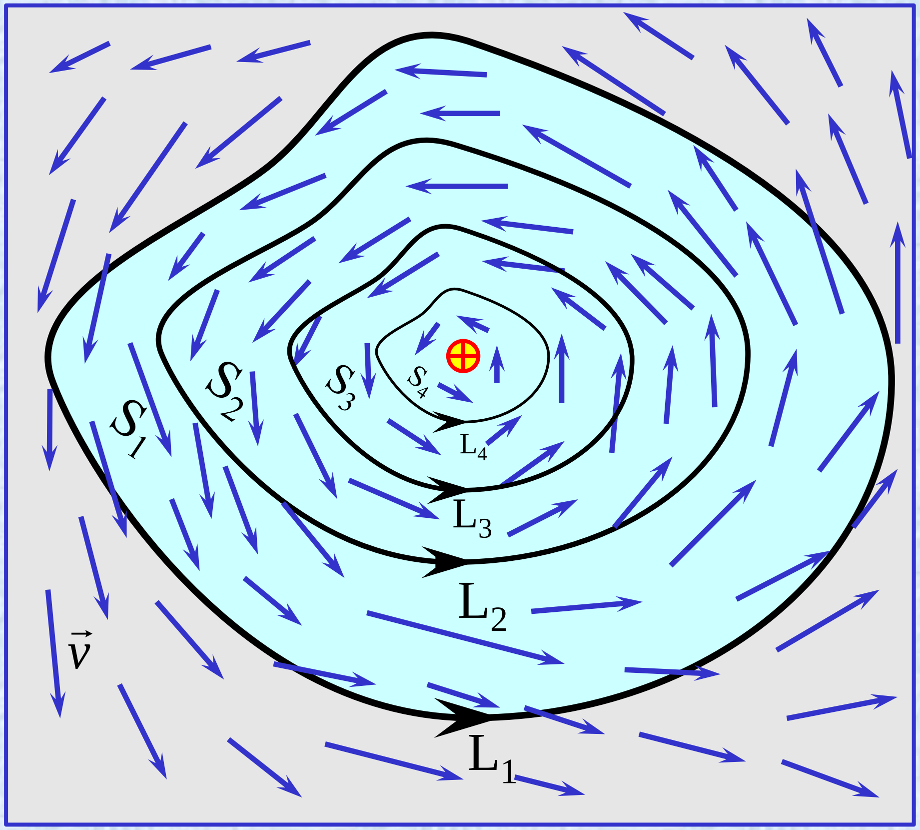
$\overrightarrow{ds}$ jest skierowany na zewnątrz powierzchni S_n

Można udowodnić, że

$$\operatorname{div}\vec{v} = \vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

1.4.2. Całkowa definicja rotacji

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}\right)_{\perp S} \stackrel{def}{=} \lim_{S\to 0} \frac{\oint\limits_{L} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}}{S}$$



Można udowodnić, że

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_x}{\partial z} - \dfrac{\partial v_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix}$$

1.4.3. Twierdzenie o gradiencie

Przypomnienie: $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi = \vec{\nabla}\varphi = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right]$

Twierdzenie:

$$\int_{L_{AB}} \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}}_{\mathrm{d}\varphi} = \varphi(\mathrm{B}) - \varphi(\mathrm{A})$$

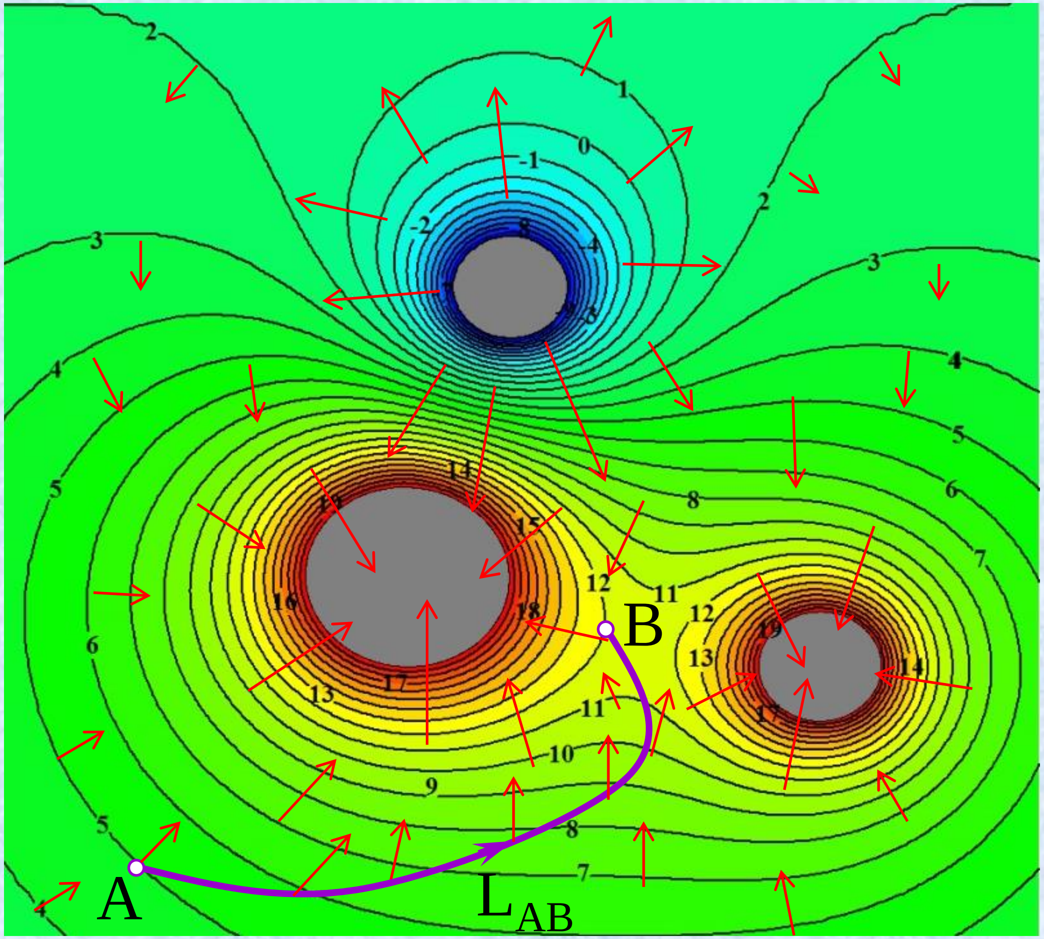
Całka liniowa z gradientu dowolnego pola skalarnego jest równa różnicy wartości tego pola na końcach linii.

Wnioski:

1. Całka liniowa z gradientu nie zależy od kształtu krzywej, tylko od położenia jej końców.

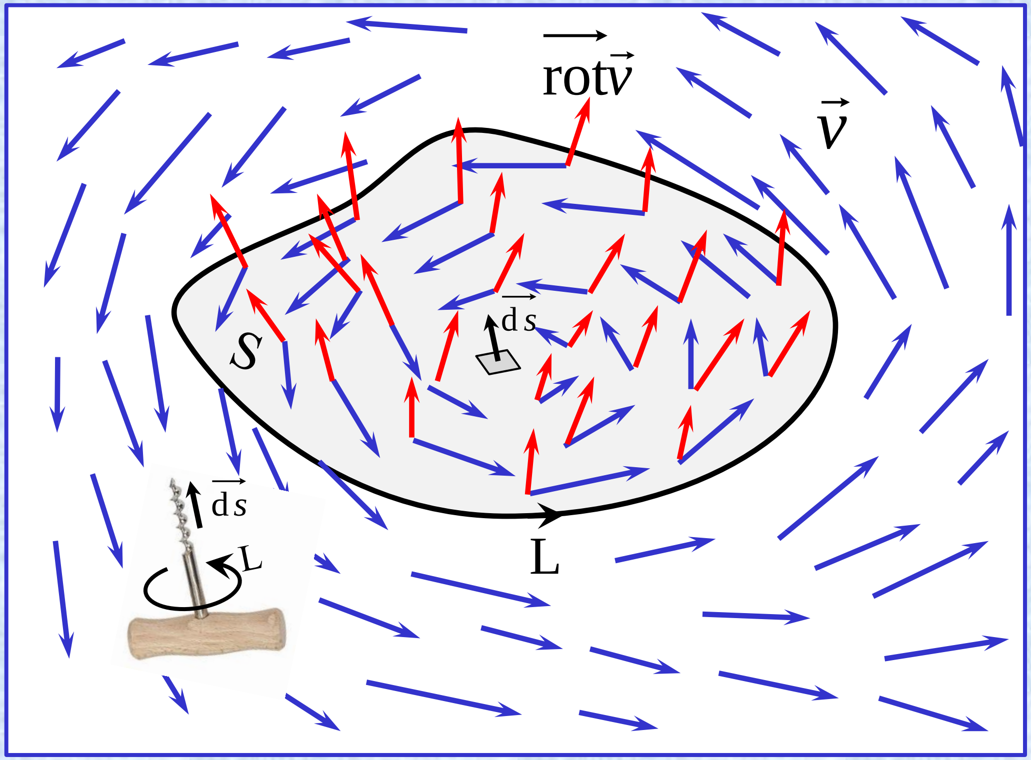
2. Cyrkulacja gradientu zawsze jest równa zeru

$$\oint_{L} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$$



1.4.4. Twierdzenie Stokesa

$$\iint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \oint_L \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$$

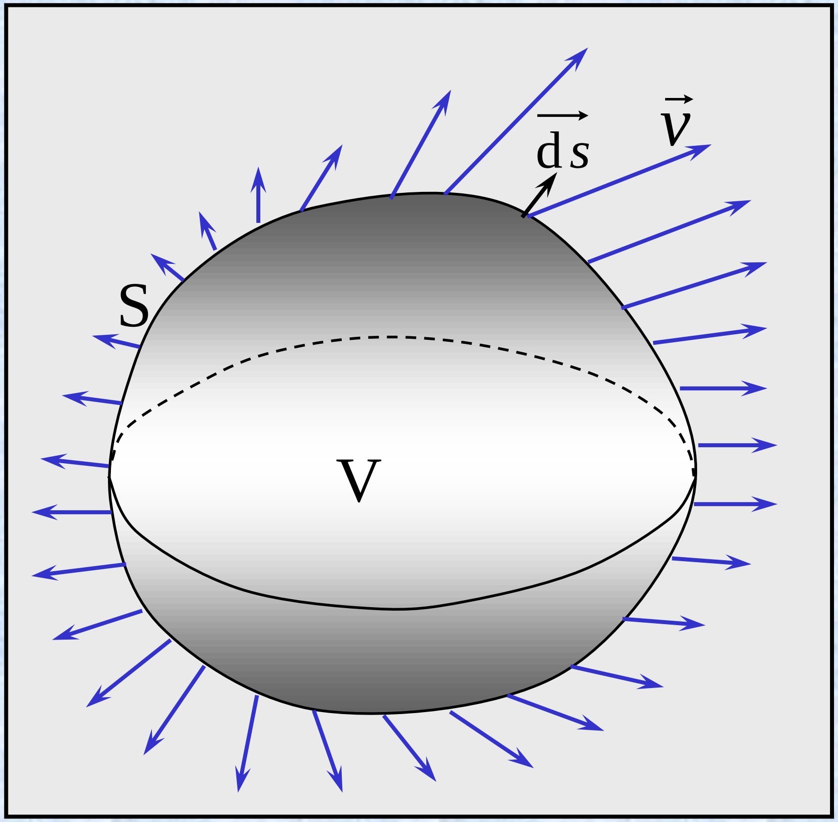


Strumień rotacji dowolnego pola wektorowego przez dowolną powierzchnię S jest równy cyrkulacji tego pola po krzywej ograniczającej tę powierzchnię.

1.4.5. Twierdzenie Gaussa

$$\iiint\limits_V \operatorname{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V = \oiint\limits_S \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}s}$$

$\overrightarrow{\mathrm{d}s}$ jest skierowany na zewnątrz powierzchni S_n

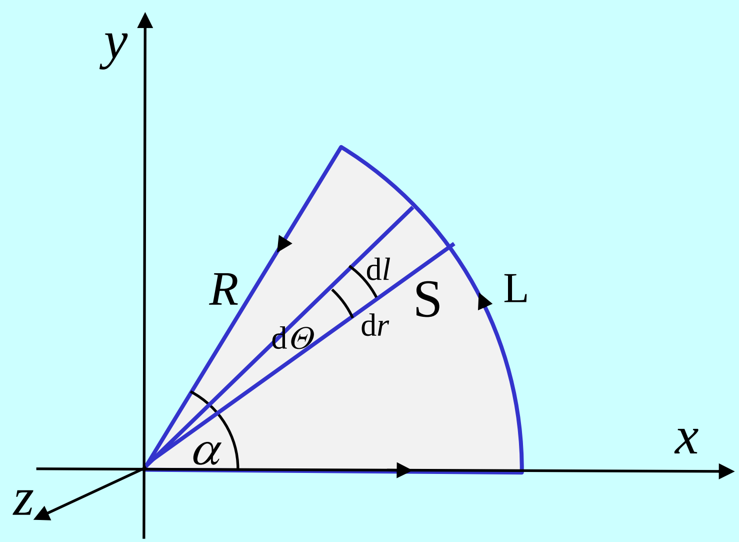


Całka objętościowa po obszarze V z dywergencji dowolnego pola wektorowego jest równa strumieniowi tego pola przez powierzchnię (zamkniętą!) ograniczającą ten obszar.

Zadanie 1. (twierdzenie Stokesa)

Dane jest pole wektorowe: $\vec{v} = \left[2xz + y^2, \quad 3x^2 + yz, \quad 4xy\ln(z+1)\right]$

oraz obszar S przedstawiony na rysunku:



$R = 5, \quad \alpha = 60^\circ$

Obliczyć (niezależnie) całki:

A. $\oint\limits_L \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l}$

B. $\iint\limits_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s}$

$$\vec{v} = \left[2xz + y^2, \quad 3x^2 + yz, \quad 4xy\ln(z+1)\right]$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz + y^2 & 3x^2 + yz & 4xy\ln(z+1) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 6x - 2y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\,s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}\,s \end{bmatrix} \qquad \iint\limits_{S} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s} = \iint\limits_{S} \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 6x - 2y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}\,s \end{bmatrix} = \iint\limits_{S} (6x - 2y)\mathrm{d}\,s = \ldots$$

Zmieniamy zmienne z kartezjańskich na biegunowe

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \qquad \mathrm{d}\,s = \mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,l \qquad \mathrm{d}\,\theta = \frac{\mathrm{d}\,l}{r} \qquad \mathrm{d}\,l = r\,\mathrm{d}\,\theta \qquad S: \begin{cases} 0 \le r \le R \\ 0 \le \theta \le \dfrac{1}{3}\pi \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\mathrm{d}\,s = r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta$$

$$\ldots = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^R (6r\cos\theta - 2r\sin\theta) r\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_0^R (6\cos\theta - 2\sin\theta) r^2\,\mathrm{d}\,r\,\mathrm{d}\,\theta =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} (6\cos\theta - 2\sin\theta)\frac{1}{3}R^3\,\mathrm{d}\,\theta = \frac{1}{3}R^3 (6\sin\theta + 2\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{3}R^3\left(6\sin\frac{\pi}{3} + 2\cos\frac{\pi}{3} - (6\sin 0 + 2\cos 0)\right) =$$

$$= \frac{1}{3}R^3\left(3\sqrt{3} + 1 - 2\right) = \frac{1}{3}\left(3\sqrt{3} - 1\right)R^3$$

Zmiana zmiennych w całce podwójnej

$$\begin{cases} x = x(u,t) \\ y = y(u,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

Jakobian

$$J(u,t) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial t} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix}$$

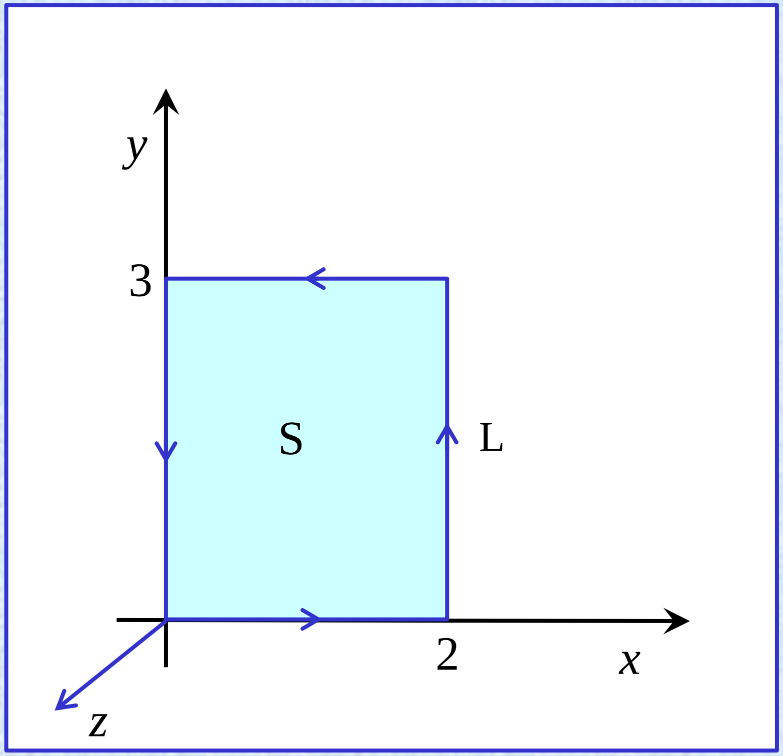
$$J(r,\theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

$$\mathrm{d}\,s = \left|J(u,t)\right| \mathrm{d}\,u\,\mathrm{d}\,t$$

Przykłady

1. Dane jest pole wektorowe: $\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$

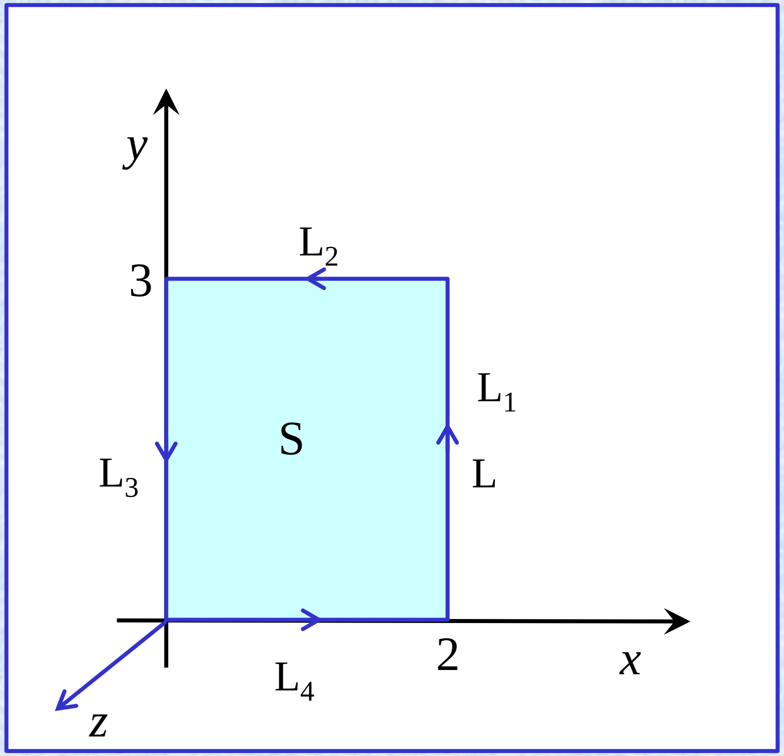
oraz obszar S przedstawiony na rysunku:



Obliczyć (niezależnie) całki:

A. $\oint\limits_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$

B. $\iint\limits_{S} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$



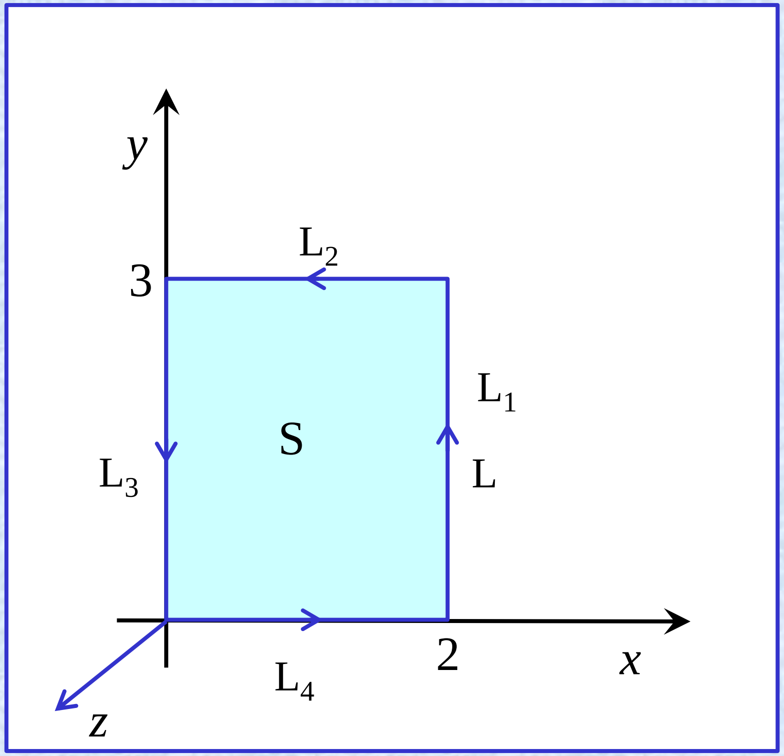
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\oint_{\mathrm{L}} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\mathrm{L}_1} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{\mathrm{L}_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{\mathrm{L}_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{\mathrm{L}_4} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$\mathrm{L}_1 : \begin{cases} x = 2 \\ y = t \\ z = 0 \\ 0 \le t \le 3 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,\mathrm{d}t = 0 \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\,\mathrm{d}t = 1\mathrm{d}t = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= z'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{d}t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$\int_{\mathrm{L}_1} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = \int_{\mathrm{L}_1} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{d}t \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{\mathrm{L}_1} \begin{bmatrix} 2\cdot 2\cdot 0 + t^2 + 1 \\ 2^2 + 3t\cdot 0 - 2 \\ 4\cdot 2t\ln(0+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \mathrm{d}t \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{\mathrm{L}_1} \left(t^2\cdot 0 + 2\,\mathrm{d}t + 3\cdot 0\right) = \int_0^3 2\,\mathrm{d}t = 2t\Big|_0^3 = 6$$



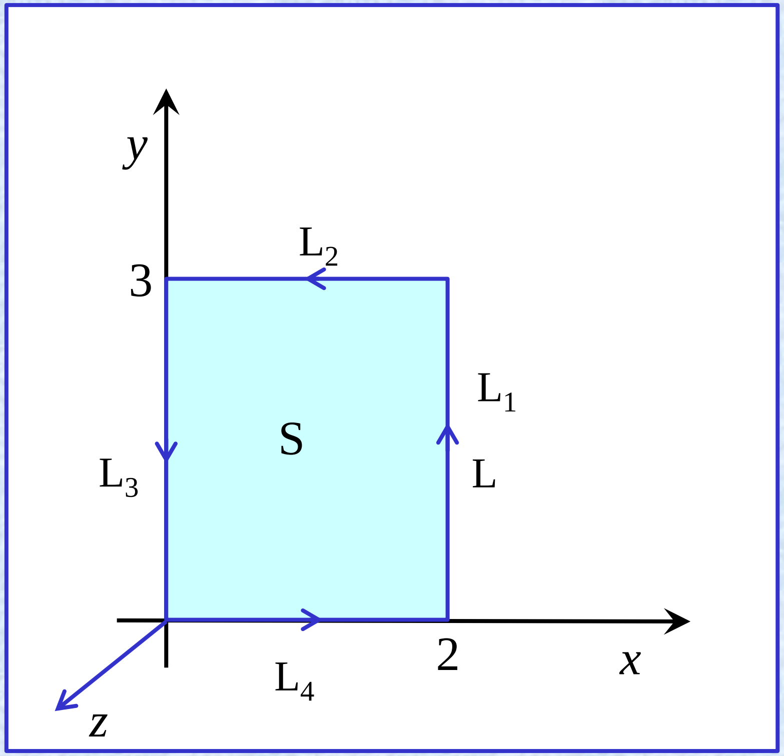
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\oint_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_2 : \begin{cases} x = -t \\ y = 3 \\ z = 0 \\ -2 \le t \le 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ \mathrm{d}z &= z'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \begin{bmatrix} -\mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$\int_{L_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \int_{L_2} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{L_2} \begin{bmatrix} 2\cdot(-t)\cdot 0 + 3^2 + 1 \\ (-t)^2 + 3\cdot 3\cdot 0 - 2 \\ 4\cdot(-t)\cdot 3\ln(0+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{L_2} (-10)\,\mathrm{d}t = -10\int_{-2}^{0} \mathrm{d}t = -10t\Big|_{-2}^{0} = -20$$



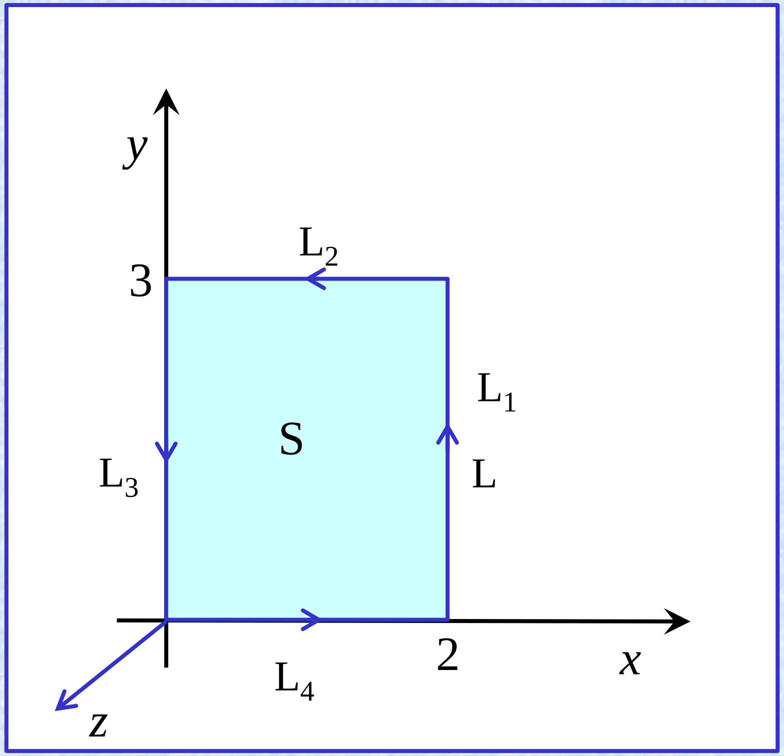
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\oint_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 0 \\ -3 \le t \le 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= z'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{d}t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$\int_{L_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = \int_{L_3} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{d}t \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{L_2} \begin{bmatrix} (-t)^2 + 1 \\ -2 \\ +3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{d}t \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{L_2} 2\,\mathrm{d}t = 2\int_{-3}^{0} \mathrm{d}t = 2t\Big|_{-3}^{0} = 6$$



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

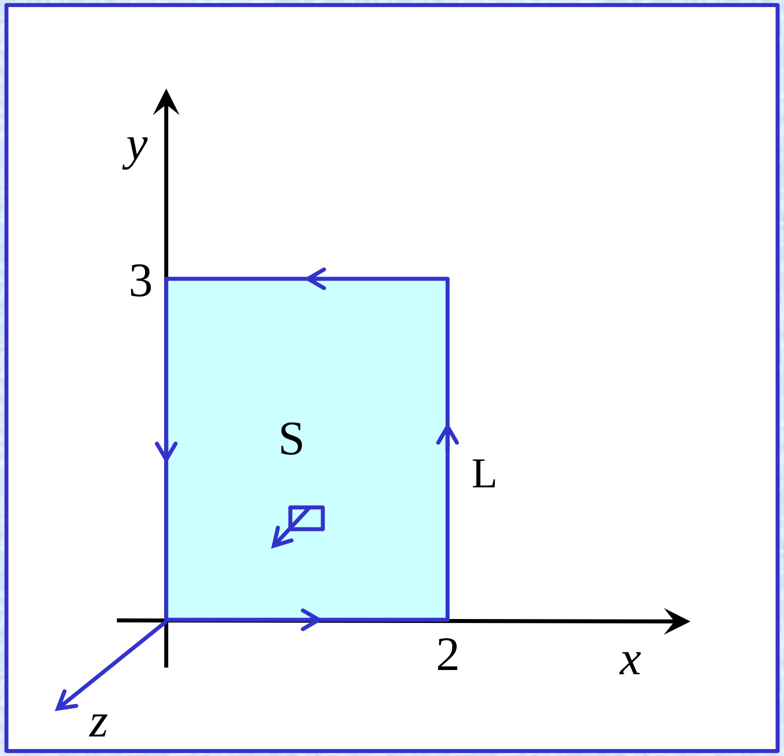
$$\oint_{L} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_4 : \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 \le t \le 2 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_4} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\,\mathrm{d}t = 0 \\ \mathrm{d}z &= z'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_4} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t$$

$$\int_{L_4} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_4} = \int_{L_4} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{L_2} \begin{bmatrix} 1 \\ t^2 - 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^2 \mathrm{d}t = t\Big|_0^2 = 2$$

$$\oint_{L} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 6 - 20 + 6 + 2 = -6$$

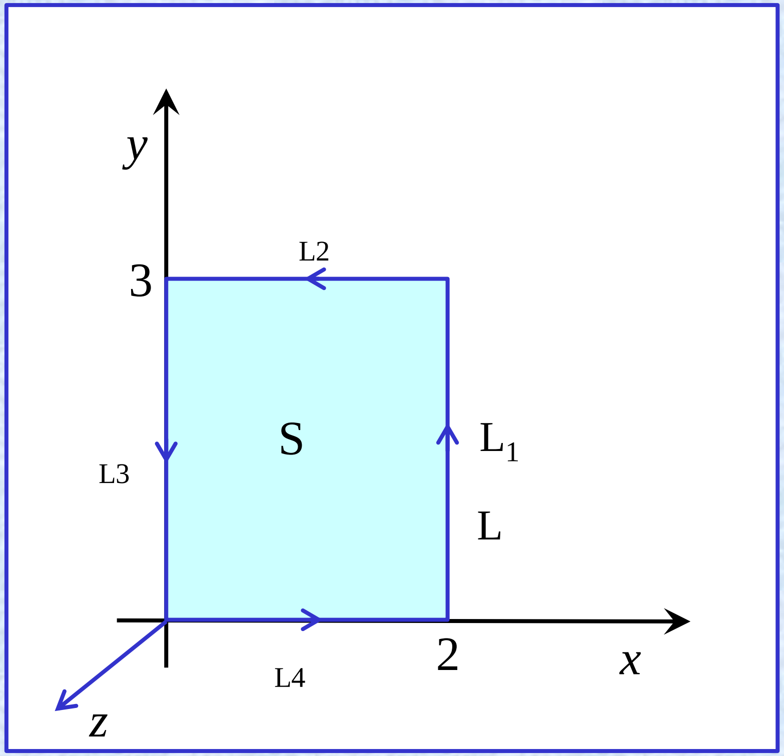


$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz + y^2 + 1 & x^2 + 3yz - 2 & 4xy\ln(z+1) + 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4y\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix}$$

$$\iint_S \begin{bmatrix} 4y\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}s \end{bmatrix} = \int_0^3 \int_0^2 (2x - 2y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \ldots = -6\,?$$



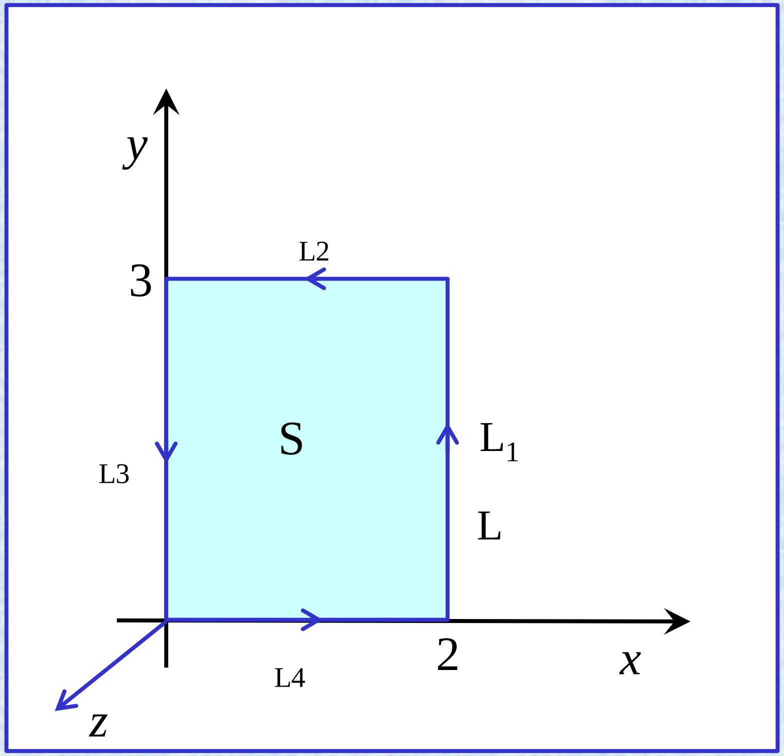
$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\oint_L \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_3 = \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 0 \\ -3 \le t \le 0 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = [\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z] = [0, \quad -\mathrm{d}t, \quad 0] = [0, \quad -1, \quad 0]\mathrm{d}t$$

$$\int_{L_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \int_{L_3} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_3} \begin{bmatrix} (-t)^2 + 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{d}t0 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{-3}^{0} 2\mathrm{d}t = 2t\Big|_{-3}^{0} = 6$$



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

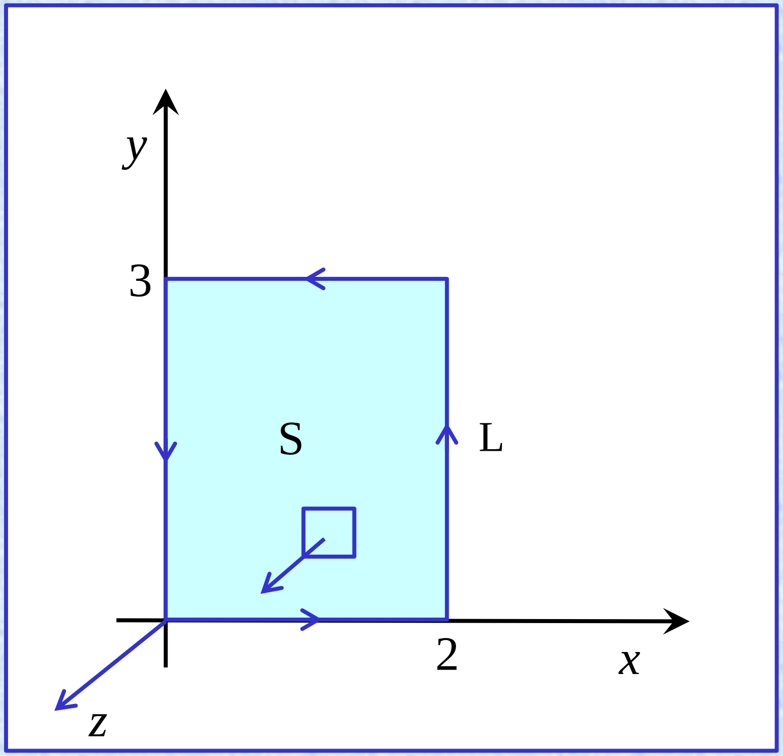
$$\oint_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_4 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 \le t \le 2 \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = [\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z] = [\mathrm{d}t, \quad 0, \quad 0] = [1, \quad 0, \quad 0]\mathrm{d}t$$

$$\int_{L_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \int_{L_2} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_2} \begin{bmatrix} 1 \\ t^2 - 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \int_0^2 \mathrm{d}t = t\big|_0^2 = 2$$

$$\oint_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 6 - 20 + 6 + 2 = -6$$



$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

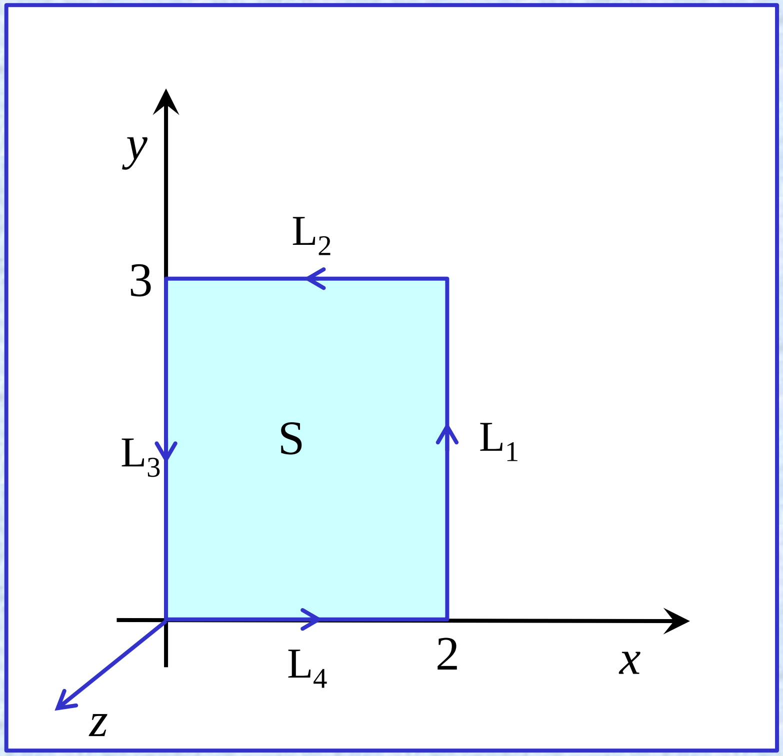
$$\iint_S (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz + y^2 + 1 & x^2 + 3yz - 2 & 4xy\ln(z+1) + 3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\,s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}s \end{bmatrix}$$

$$\iint_S \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}s \end{bmatrix} = \iint_S \begin{bmatrix} -3y \\ 2x \\ 2x - 2y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}s \end{bmatrix} = \iint_S (2x - 2y)\mathrm{d}s = \iint_S (2x - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^3\int_0^2 (2x - 2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^3 \left(x^2 - 2xy\right)\Big|_0^2 \mathrm{d}y = \int_0^3 \left(2^2 - 4y\right)\mathrm{d}y = \left(4y - 2y^2\right)\Big|_0^3 = 12 - 18 = -6$$

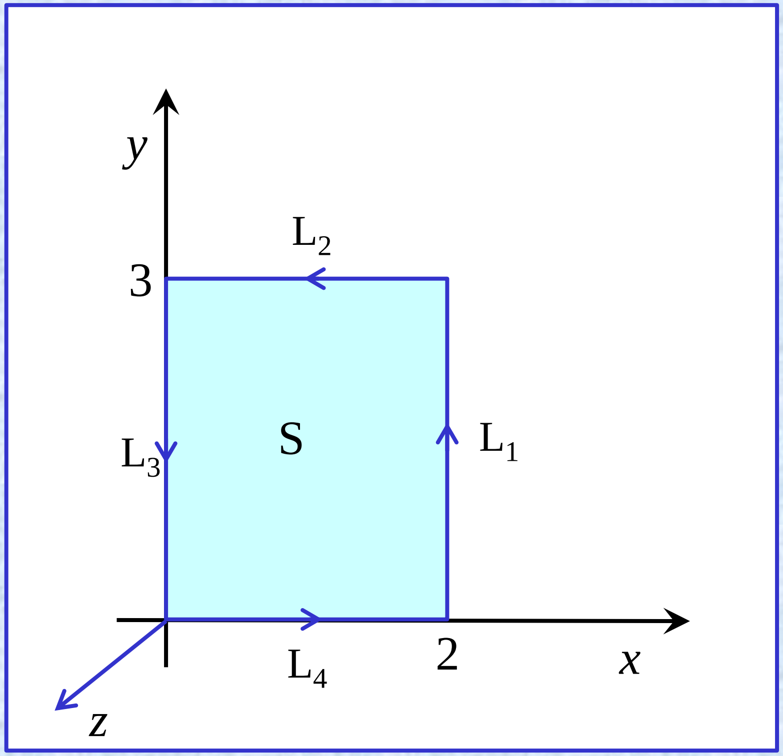


$$\oint_{L}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l}=\int_{L_1}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_1}+\int_{L_2}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2}+\int_{L_3}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_3}+\int_{L_4}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_1=\begin{cases}x=2\\ y=t\\ z=0\\ 0\le t\le 3\end{cases}\qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_1}=\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{bmatrix}\qquad \begin{matrix}\mathrm{d}x=0\cdot\mathrm{d}t=0\\ \mathrm{d}y=1\cdot\mathrm{d}t=\mathrm{d}t\\ \mathrm{d}z=0\cdot\mathrm{d}t=0\end{matrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_1}=\begin{bmatrix}0\\ \mathrm{d}t\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}t\qquad \vec{v}=\begin{bmatrix}2xz+y^2+1\\ x^2+3yz-2\\ 4xy\ln(z+1)+3\end{bmatrix}$$

$$\int_{L_1}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_1}=\int_{L_1}\begin{bmatrix}2xz+y^2+1\\ x^2+3yz-2\\ 4xy\ln(z+1)+3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathrm{d}x\\ \mathrm{d}y\\ \mathrm{d}z\end{bmatrix}=\int_{L_1}\begin{bmatrix}0+t^2+1\\ 2^2+0-2\\ 0+3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\end{bmatrix}\mathrm{d}t=\int_{L_1}(0+2+0)\,\mathrm{d}t=2\int_0^3\mathrm{d}t=2t\Big|_0^3=6$$

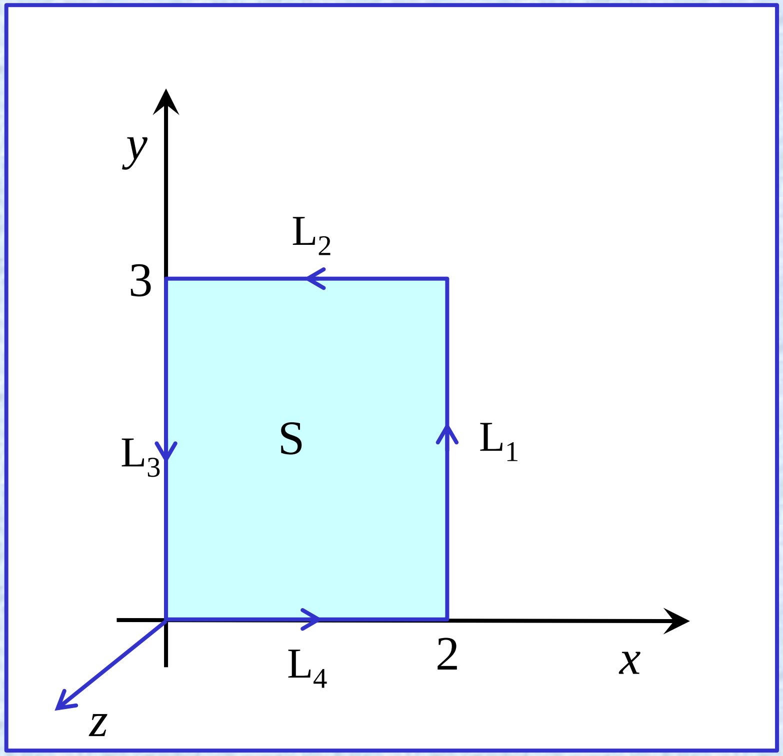


$$\oint_L \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_2 = \begin{cases} x = -t \\ y = 3 \\ z = 0 \\ -2 \le t \le 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= -1\cdot\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= 0\cdot\mathrm{d}t = 0 \\ \mathrm{d}z &= 0\cdot\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \begin{bmatrix} -\mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\int_{L_2}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \int_{L_2}\begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_2}\begin{bmatrix} 0 + 3^2 + 1 \\ (-t)^2 + 0 - 2 \\ 0 + 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t = \int_{L_2}(-9 + 0 + 0)\mathrm{d}t = -9\int_{-2}^{0}\mathrm{d}t = -9t\Big|_{-2}^{0} = -18$$

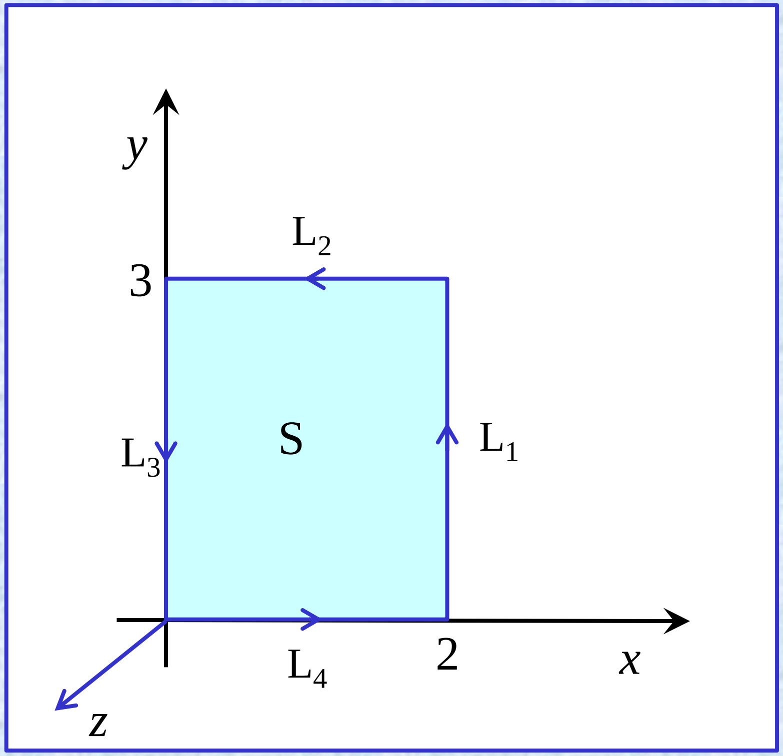


$$\oint_{L} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_3 = \begin{cases} x = 0 \\ y = -t \\ z = 0 \\ -3 \le t \le 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= -0\cdot\mathrm{d}t = 0 \\ \mathrm{d}y &= -1\cdot\mathrm{d}t = -\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= 0\cdot\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathrm{d}t \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\int_{L_3} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = \int_{L_3} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_3} \begin{bmatrix} 0 + (-t)^2 + 1 \\ 0 + 0 - 2 \\ 0 + 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t = \int_{L_3} (0 + 2 + 0)\mathrm{d}t = 2\int_{-3}^{0}\mathrm{d}t = 2t\Big|_{-3}^{0} = 6$$



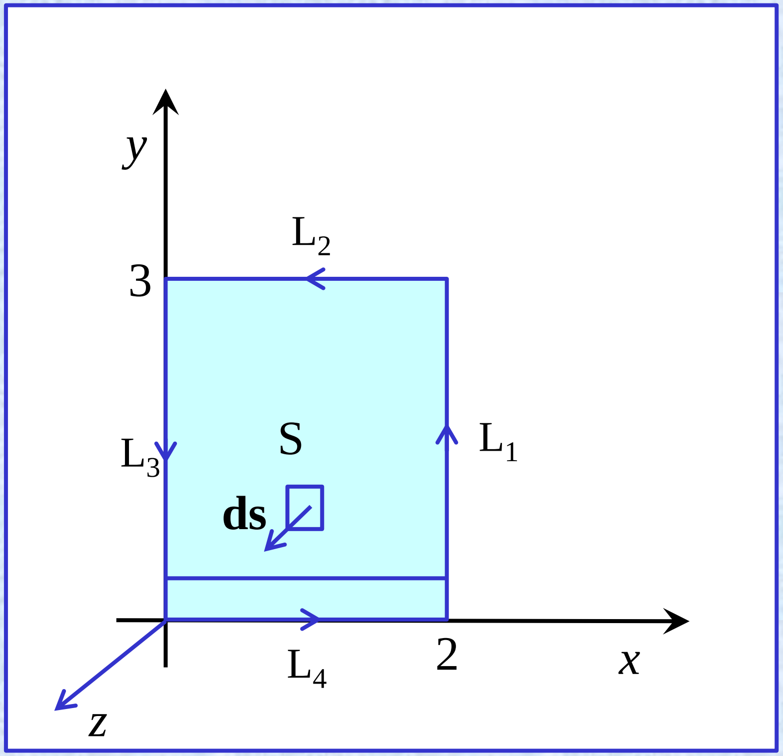
$$\oint_L \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{L_1}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} + \int_{L_2}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} + \int_{L_3}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} + \int_{L_4}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_4}$$

$$L_4 = \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 0 \le t \le 2 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}l_4} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= 1\cdot\mathrm{d}t = \mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= 0\cdot\mathrm{d}t = 0 \\ \mathrm{d}z &= 0\cdot\mathrm{d}t = 0 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l_4} = \begin{bmatrix} \mathrm{d}t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\int_{L_4}\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = \int_{L_4}\begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_4}\begin{bmatrix} 0+0+1 \\ t^2 + 0 - 2 \\ 0+3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\mathrm{d}t = \int_{L_4} 1\,\mathrm{d}t = = t\Big|_0^2 = 2$$

$$\oint_L \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 6 - 18 + 6 + 2 = -4$$



$$\iint\limits_{S} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\, s}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} 2xz + y^2 + 1 \\ x^2 + 3yz - 2 \\ 4xy\ln(z+1) + 3 \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz + y^2 + 1 & x^2 + 3yz - 2 & 4xy\ln(z+1) + 3 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\, s} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}\, s \end{bmatrix}$$

$$\iint\limits_{S} \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}\, s \end{bmatrix} = \iint\limits_{S} \left(0 + 0 + (2x - 2y)\mathrm{d}\, s\right) = \iint\limits_{S} (2x - 2y)\mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y =$$

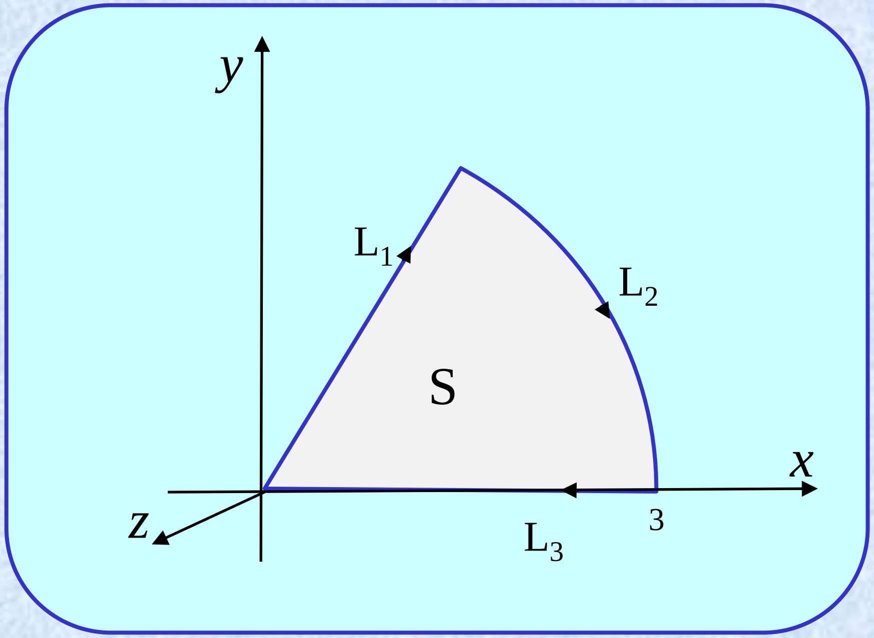
$$= \int_0^3 \left(\int_0^2 (2x - 2y)\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y = \int_0^3 \left(x^2 - 2yx\right)\Big|_0^2 \mathrm{d}\, y = \int_0^3 (4 - 4y)\mathrm{d}\, y = \left(4y - 2y^2\right)\Big|_0^3 =$$

$$= 12 - 18 = -6 \quad (?)$$

1.4.6. Przykład

Dane jest pole wektorowe: $\vec{v} = \left[2xz + y^2, \quad x^2 + 3yz, \quad 4xy\ln(z+1)\right]$

oraz obszar S przedstawiony na rysunku:



Obliczyć (niezależnie) całki:

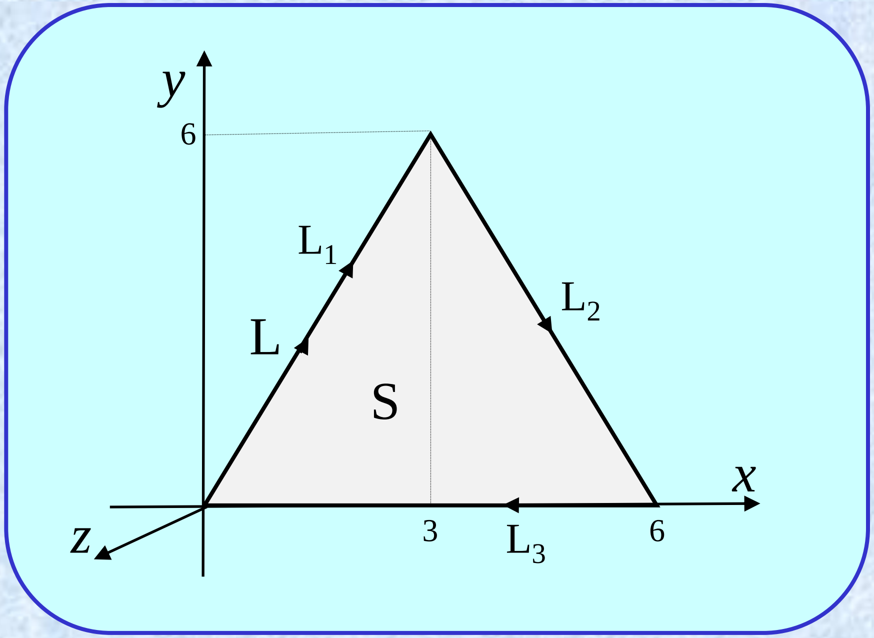
A. $\oint\limits_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$

B. $\iint\limits_{S} \overrightarrow{(\mathrm{rot}\vec{v})} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$

1.4.6. Przykład

Dane jest pole wektorowe: $\vec{v} = \left[2xz + y^2, \quad x^2 + 3yz, \quad 4xy\ln(z+1)\right]$

oraz obszar S przedstawiony na rysunku:



Obliczyć (niezależnie) całki:

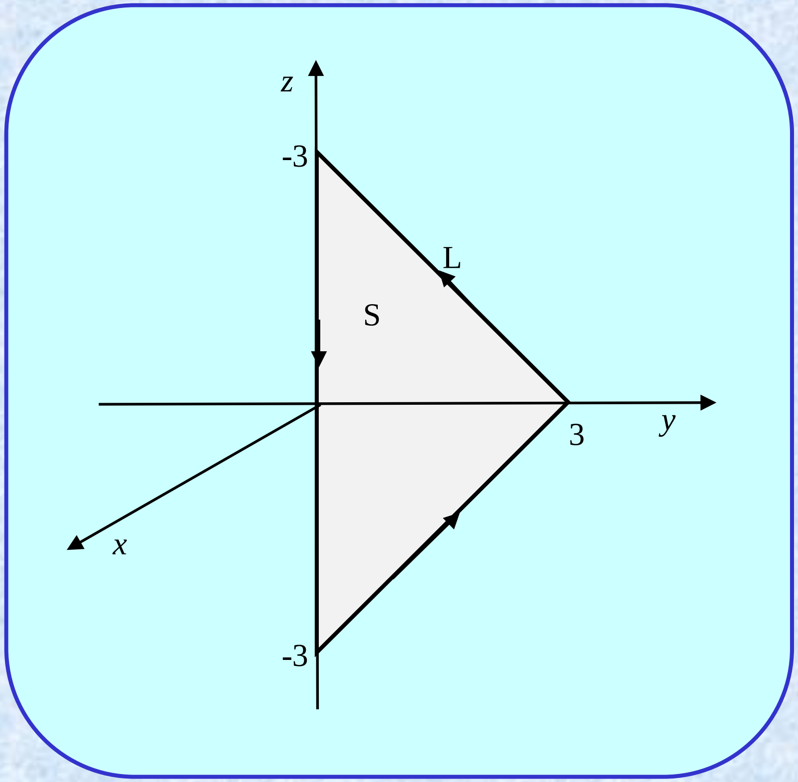
A. $\oint\limits_L \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$

B. $\iint\limits_S \left(\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Dane jest pole wektorowe: $\vec{v} = \left[3x + 2y - z, \quad 2x + y - yz, \quad yz^2 + 3x^2\right]$

oraz obszar S przedstawiony na rysunku:



Obliczyć (niezależnie) całki:

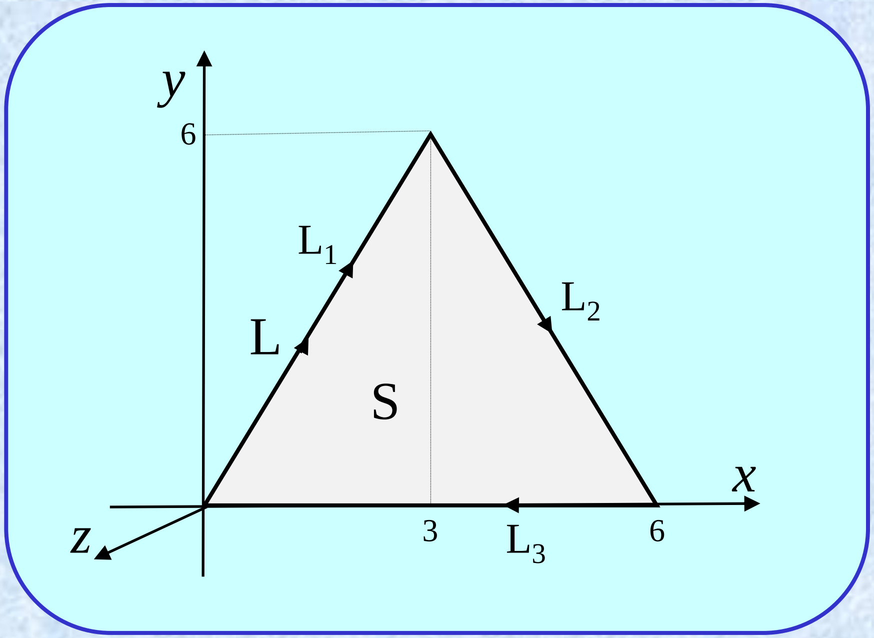
A. $\oint\limits_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$

B. $\iint\limits_{S} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$

1.4.6. Przykład

Dane jest pole wektorowe: $\vec{v} = \left[2xz + y^2, \quad x^2 + 3yz, \quad 4xy\ln(z+1)\right]$

oraz obszar S przedstawiony na rysunku:



Obliczyć (niezależnie) całki:

A. $\oint\limits_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$

B. $\iint\limits_{S} \overrightarrow{(\mathrm{rot}\vec{v})} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$

A. Obliczanie cyrkulacji

Ponieważ krzywa L składa się z trzech odcinków, rozbijamy tę całkę na trzy osobne całki:

$$\oint_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l} = \int_{L_1} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l_1} + \int_{L_2} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l_2} + \int_{L_3} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l_3}$$

Zapisujemy parametryczne równania odcinków krzywej L zwracając szczególną uwagę na to, żeby parametr t rósł zgodnie z jej kierunkiem:

$$L_1 : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 0 \\ 0 \le t \le 3 \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 12 \\ z = 0 \\ 3 \le t \le 6 \end{cases} \qquad L_3 : \begin{cases} x = -t \\ y = 0 \\ z = 0 \\ -6 \le t \le 0 \end{cases}$$

!

!

Obliczamy współrzędne wektora $\overrightarrow{\mathrm{d}l}$:

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = [\mathrm{d}x,\quad \mathrm{d}y,\quad \mathrm{d}z] \qquad \mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y = y'(t)\,\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}z = z'(t)\,\mathrm{d}t$$

Dla L_1: $\mathrm{d}x = 1\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}z = 0$, czyli: $\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = [\mathrm{d}t,\quad 2\mathrm{d}t,\quad 0] = [1,\quad 2,\quad 0]\mathrm{d}t$

Dla L_2: $\mathrm{d}x = 1\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y = -2\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}z = 0$, czyli: $\overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = [\mathrm{d}t,\quad -2\mathrm{d}t,\quad 0] = [1,\quad -2,\quad 0]\mathrm{d}t$

Dla L_3: $\mathrm{d}x = -1\mathrm{d}t,\quad \mathrm{d}y = 0,\quad \mathrm{d}z = 0$, czyli: $\overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = [-\mathrm{d}t,\quad 0,\quad 0] = [-1,\quad 0,\quad 0]\mathrm{d}t$

Podstawiamy $\vec{v}$ i $\overrightarrow{\mathrm{d}l_1}$ do pierwszej całki i obliczmy ją:

$$\int_{L_1} \vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l_1} = \int_{L_1} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 \\ x^2 + 3yz \\ 4xy\ln(z+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_1} \begin{bmatrix} 2t\cdot 0 + (2t)^2 \\ t^2 + 3\cdot 2t\cdot 0 \\ 4\cdot t\cdot 2t\cdot\ln(0+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^3 \left(4t^2 + 2t^2 + 0\right)\mathrm{d}t = \int_0^3 6t^2\,\mathrm{d}t = 6\cdot\frac{1}{3}t^3\Big|_0^3 = 2\cdot 3^3 = 54$$

Analogicznie obliczamy pozostałe całki:

$$\int_{L_2} \vec{v}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_2} = \int_{L_1} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 \\ x^2 + 3yz \\ 4xy\ln(z+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_1} \begin{bmatrix} (-2t+12)^2 \\ t^2 \\ 4\cdot t\cdot(-2t+12)\cdot\ln(0+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \int_3^6 \left(4t^2 - 48t + 144 - 2t^2 + 0\right)\mathrm{d}t =$$

$$= \int_3^6 \left(2t^2 - 48t + 144\right)\mathrm{d}t = \left(\frac{2}{3}t^3 - 24t^2 + 144t\right)\Bigg|_3^6 = (144 - 864 + 864) - (18 - 216 + 432) = -90$$

$$\int_{L_3} \vec{v}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l_3} = \int_{L_3} \begin{bmatrix} 2xz + y^2 \\ x^2 + 3yz \\ 4xy\ln(z+1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix} = \int_{L_3} \begin{bmatrix} 0 \\ (-t)^2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^3 0\,\mathrm{d}t = 0$$

I ostatecznie:

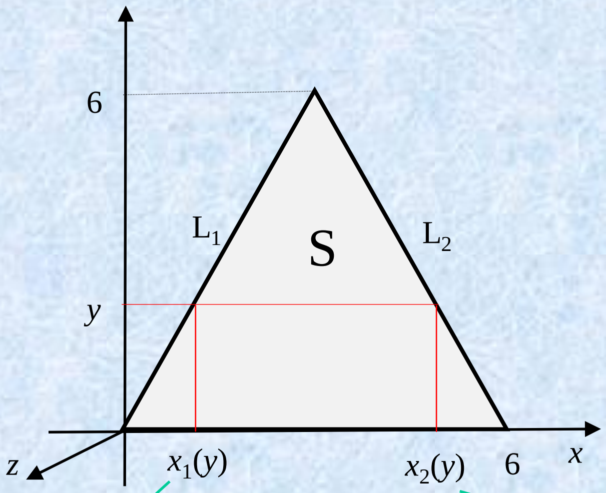
$$\oint_{L} \vec{v}\cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = 54 - 90 + 0 = -36$$

B. Obliczanie strumienia rotacji

Obliczamy rotację

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y}(4xy\ln(z+1)) - \frac{\partial}{\partial z}\left(x^2+3yz\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(2xz+y^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}(4xy\ln(z+1)) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+3yz\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2xz+y^2\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix}$$

Określamy granice całki powierzchniowej



$$S: \begin{cases} \frac{1}{2}y \le x \le -\frac{1}{2}y+6 \\ 0 \le y \le 6 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$L_1 : y = 2x \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}y \qquad L_2 : y = -2x + 12 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}y + 6$$

Określamy współrzędna wektora $\overrightarrow{\mathrm{d}s}$

$\overrightarrow{\mathrm{d}s} = [\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z, \quad \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$ ale na powierzchni S: $z = 0$, czyli $\mathrm{d}z=0$, zatem:

$\overrightarrow{\mathrm{d}s} = [0, \quad 0, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$ (należy zwrócić uwagę, że $\overrightarrow{\mathrm{d}s} \perp \mathrm{S}$, bo jest skierowany równolegle do osi OZ)

Obliczamy całkę powierzchniową

$$\iint_{\mathrm{S}} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{\mathrm{S}} \begin{bmatrix} 4x\ln(z+1) - 3y \\ 2x - 4y\ln(z+1) \\ 2x - 2y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{bmatrix} = \iint_{\mathrm{S}} (2x-2y)\cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{y_1}^{y_2} \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} (2x-2y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^6 \left(\int_{\frac{1}{2}y}^{-\frac{1}{2}y+6} (x-y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 2\int_0^6 \left(\left(\frac{1}{2}x^2 - yx \right)\Bigg|_{\frac{1}{2}y}^{-\frac{1}{2}y+6} \right) \mathrm{d}y = 2\int_0^6 \left(\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}y + 6 \right)^2 - y\left(-\frac{1}{2}y + 6 \right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}y \right)^2 + y\cdot\frac{1}{2}y \right) \mathrm{d}y =$$

$$= 2\int_0^6 \left(\frac{1}{8}y^2 - 3y + 18 + \frac{1}{2}y^2 - 6y - \frac{1}{8}y^2 + \frac{1}{2}y^2 \right) \mathrm{d}y = 2\int_0^6 \left(y^2 - 9y + 18 \right) \mathrm{d}y = 2\left(\frac{1}{3}y^3 - \frac{9}{2}y^2 + 18y \right)\Bigg|_0^6 = 2(72 - 162 + 108) = 36$$

Odpowiedź

$$\oint_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l} = 36 \qquad \iint_{S} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s} = -36$$

Komentarz

Jak widać całki te nie są równe, co może się wydawać sprzeczne z twierdzeniem Stokesa. Należy jednak zwrócić uwagę, że obliczaliśmy te całki niezależnie i nie zwracaliśmy uwagi na zgodność wektorów $\overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$ i $\overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$ z regułą korkociągu. Zauważmy, że obracając korkociąg zgodnie z kierunkiem krzywej L (patrz rysunek) będzie się on przesuwał przeciwnie do osi OZ, a wektor $\overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$ jest skierowany zgodnie z nią (ma dodatnią współrzędną z-ową, bo różniczki $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ są z definicji dodatnie). Chcąc otrzymać pełną zgodność z twierdzeniem Stokesa należało więc odwrotnie zorientować powierzchnię S, tzn. przy obliczaniu drugiej całki przyjąć

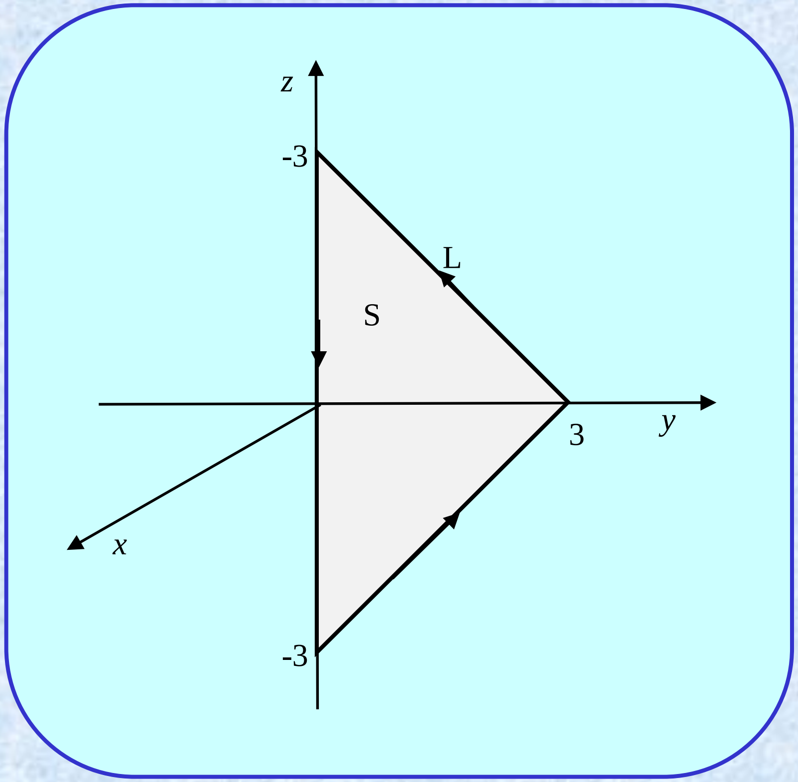
$$\overrightarrow{\mathrm{d}\,s} = [0, \quad 0, \quad -\mathrm{d}\,x\,\mathrm{d}\,y]$$

To oczywiście zmieniłoby znak strumienia rotacji i wynik byłby taki sam jak dla cyrkulacji.

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Dane jest pole wektorowe: $\vec{v} = \left[3x + 2y - z, \quad 2x + y - yz, \quad yz^2 + 3x^2\right]$

oraz obszar S przedstawiony na rysunku:



Obliczyć (niezależnie) całki:

A. $\oint\limits_{L} \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$

B. $\iint\limits_{S} (\overrightarrow{\mathrm{rot}\vec{v}}) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,s}$