Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski
spawlo@prz.edu.pl

1.3. Operacje całkowe na polach

1.3.1. Całka krzywoliniowa z pola skalarnego

Definicje

2D

$$\int_{\mathrm{L}} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\,l = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta l)_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k, y_k)(\Delta l)_k$$

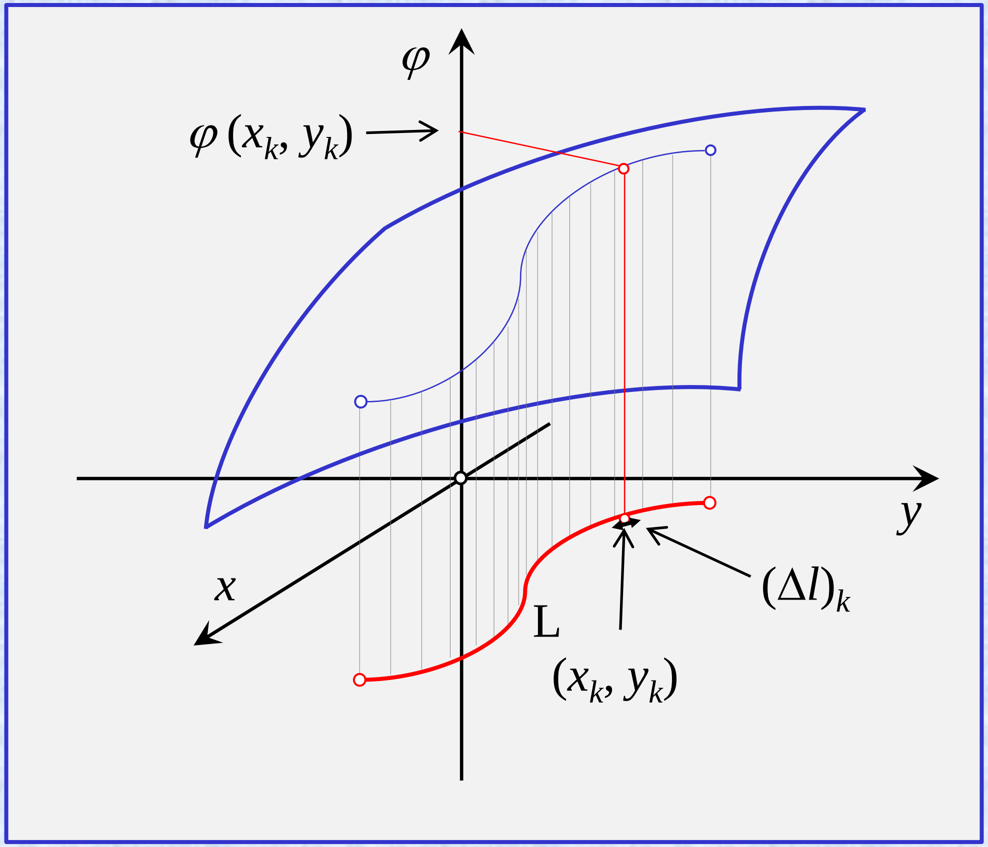
3D

$$\int_{\mathrm{L}} \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}\,l = $$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta l)_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k, y_k, z_k)(\Delta l)_k$$

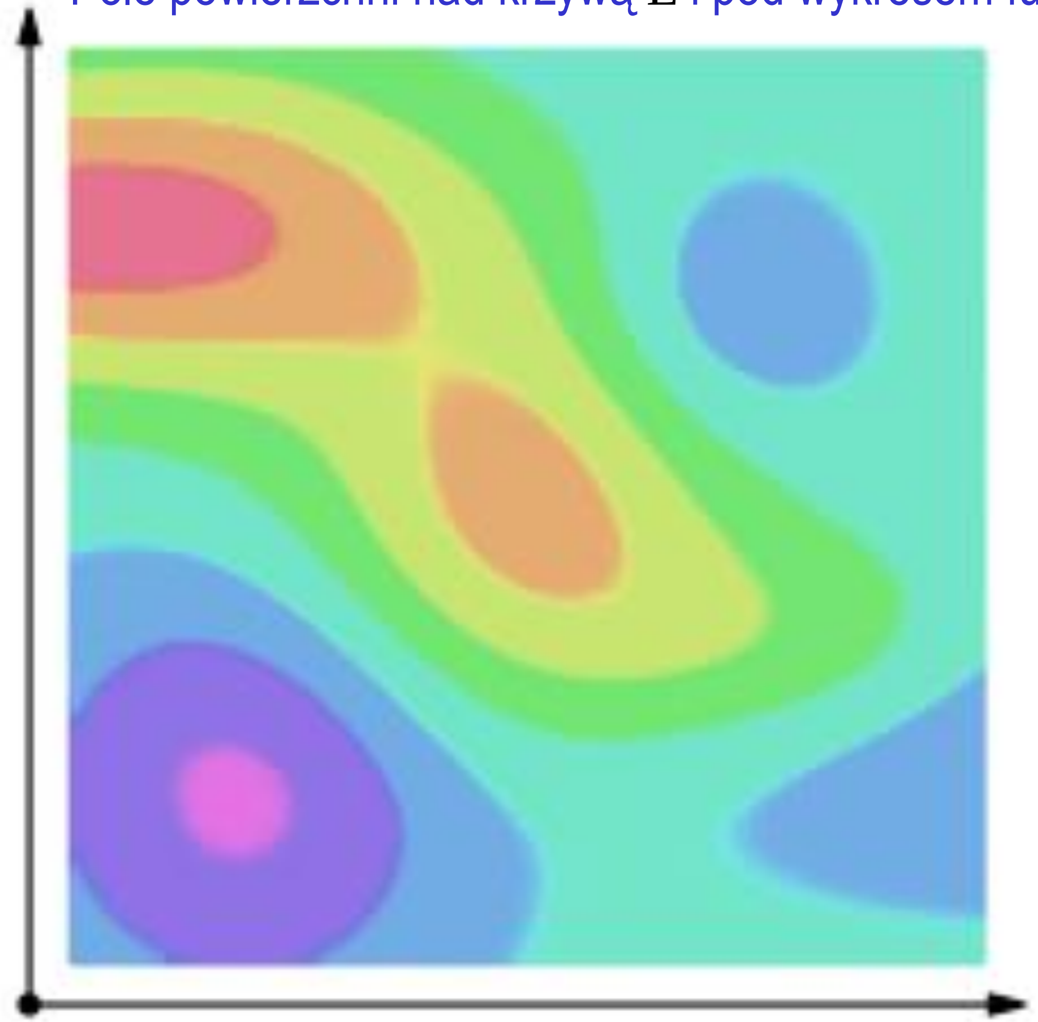
Geometryczna interpretacja w 2D ($\varphi = \varphi\,(x, y)$)

Pole powierzchni nad krzywą L i pod wykresem funkcji



Geometryczna interpretacja w 2D ($\varphi = \varphi(x, y)$)

Pole powierzchni nad krzywą L i pod wykresem funkcji



Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

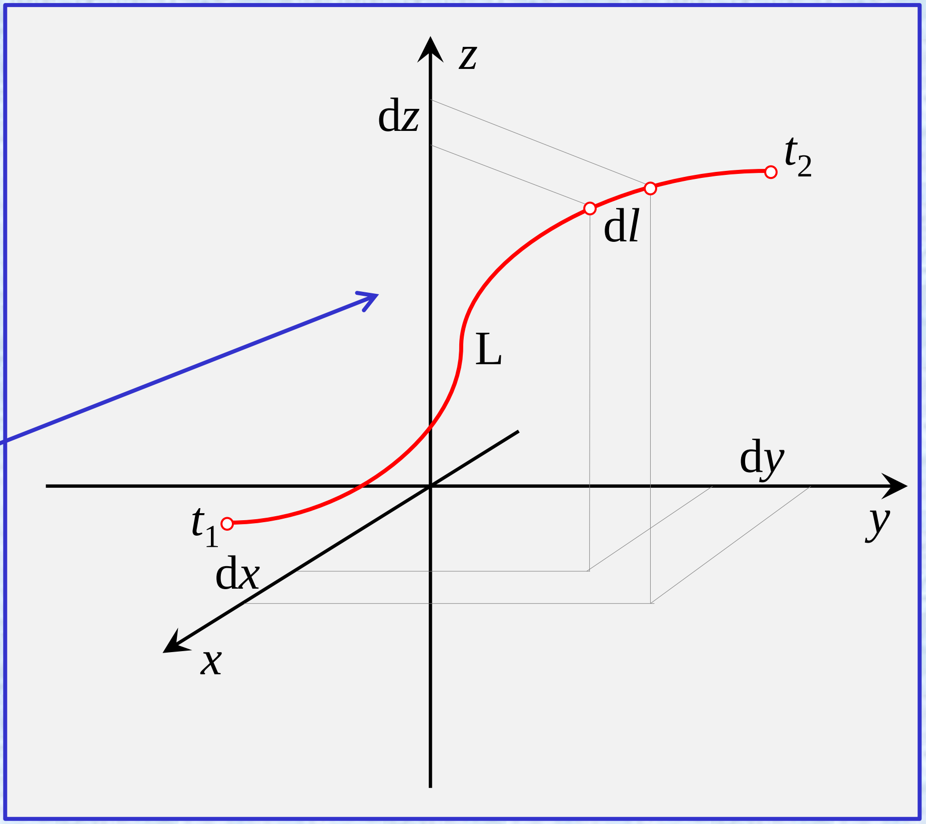
Całka krzywoliniowa z pola skalarnego – obliczanie analityczne

Parametryczne równania linii

$$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= z'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$

$$\mathrm{d}\,l = \sqrt{(\mathrm{d}\,x)^2 + (\mathrm{d}\,y)^2 + (\mathrm{d}\,z)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}\,t$$



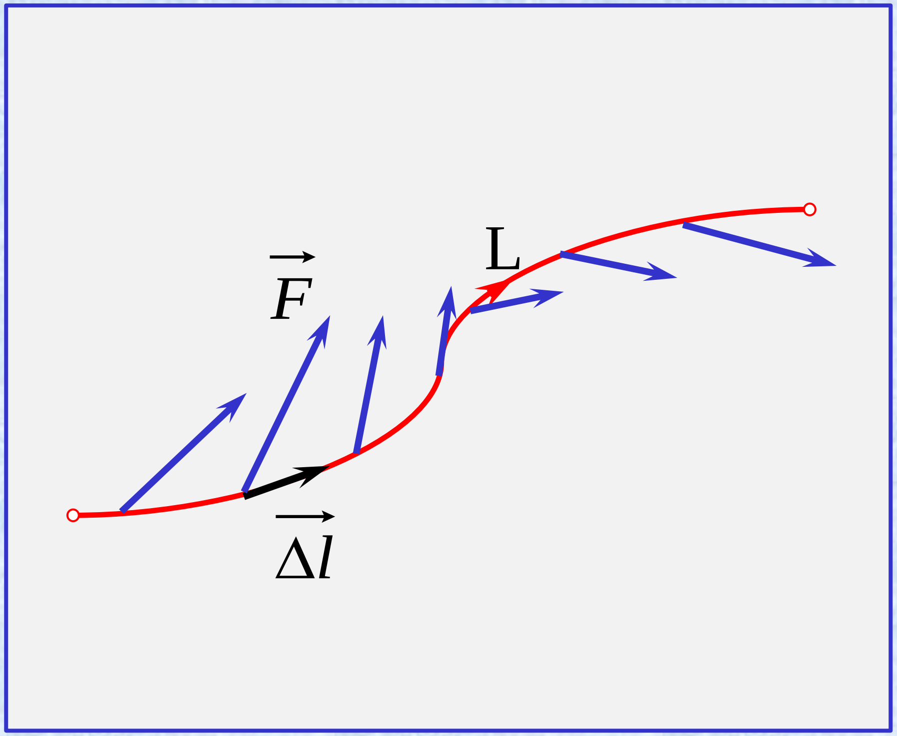
$$\int\limits_{\mathrm{L}} \varphi(x, y, z)\,\mathrm{d}\,l = \int\limits_{t_1}^{t_2} \varphi\left(x(t), y(t), z(t)\right)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2 + \left(y'(t)\right)^2 + \left(z'(t)\right)^2}\,\mathrm{d}\,t$$

1.3.2. Całka krzywoliniowa z pola wektorowego

Przykład - praca:

$$W = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta l)_k\to 0}} \sum_{k=1}^{N} \vec{F}(x_k, y_k, z_k)\cdot\left(\overrightarrow{\Delta l}\right)_k =$$

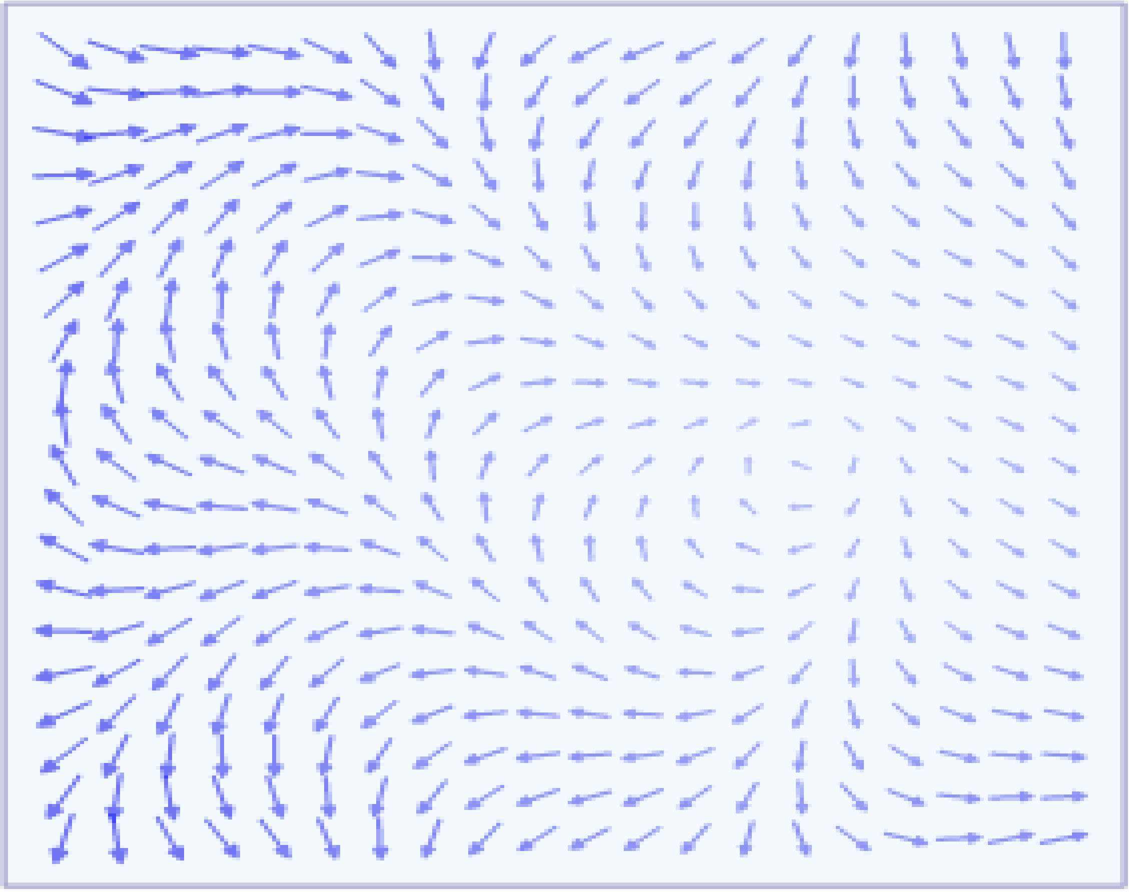
$$= \int_{\mathrm{L}} \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$$



Ważne:

$\overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$ jest styczny do L !

Całka krzywoliniowa z pola wektorowego – interpretacja (praca)

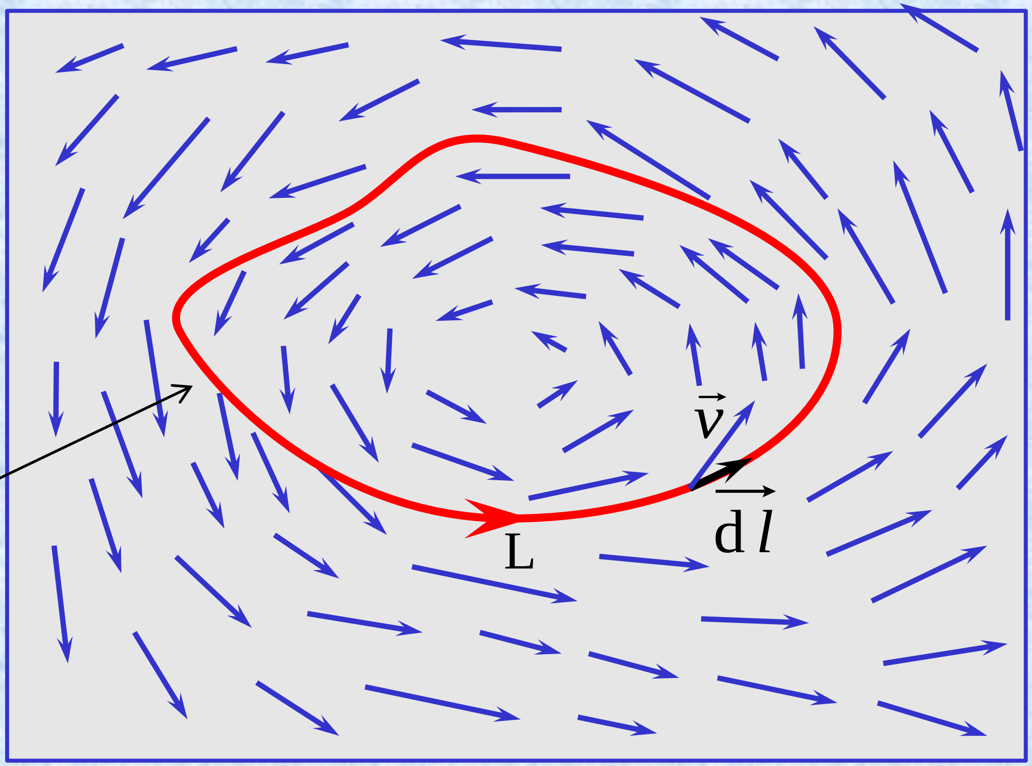


Źródło: https://en.wikipedia.org/wiki/Line_integral

Cyrkulacja

$$\oint_L \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\,l}$$

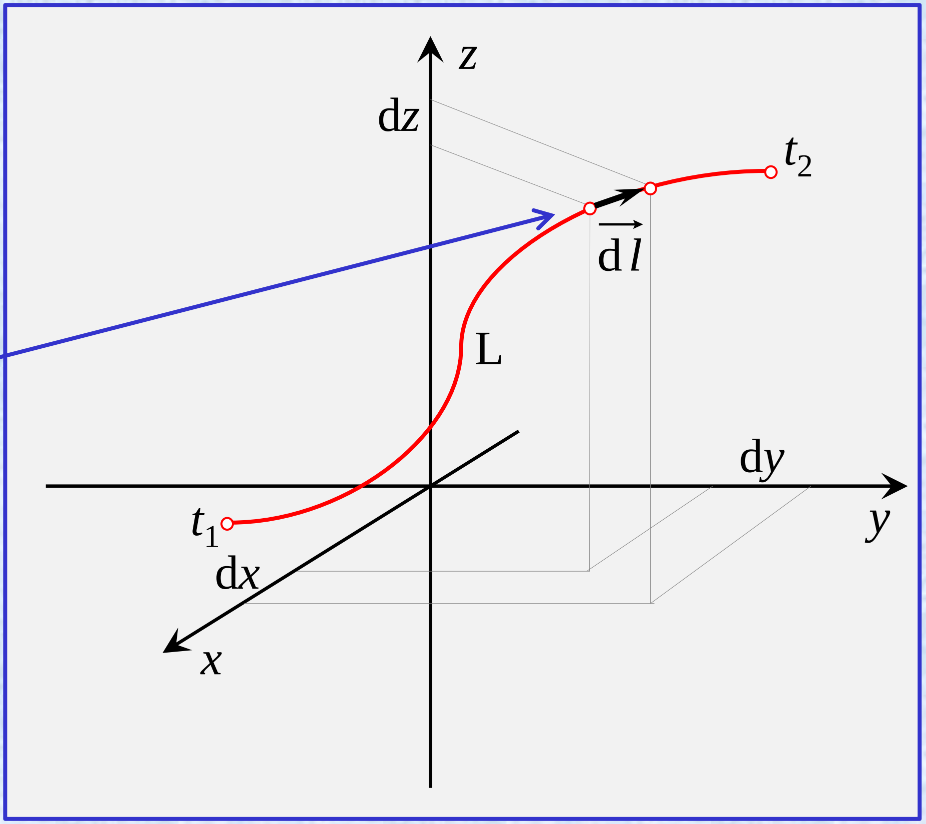
L jest krzywą zamkniętą



Całka krzywoliniowa z pola wektorowego – obliczanie analityczne

Parametryczne równania linii

$$L:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \\ t_1 \le t \le t_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= z'(t)\mathrm{d}t \end{aligned}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = [\mathrm{d}x, \quad \mathrm{d}y, \quad \mathrm{d}z] = $$

$$= [x'(t), \quad y'(t), \quad z'(t)]\ \mathrm{d}t$$

$$\vec{F} = [F_x(x,y,z), \quad F_y(x,y,z), \quad F_z(x,y,z)]$$

$$\int_{L} \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{t_1}^{t_2}\Big(F_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)x'(t) + F_y\big(x(t),y(t),z(t)\big)y'(t) + F_z\big(x(t),y(t),z(t)\big)z'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

1.3.3. Całka powierzchniowa z pola skalarnego

Definicje

2D

$$\iint\limits_S \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta s)_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k, y_k)(\Delta s)_k$$

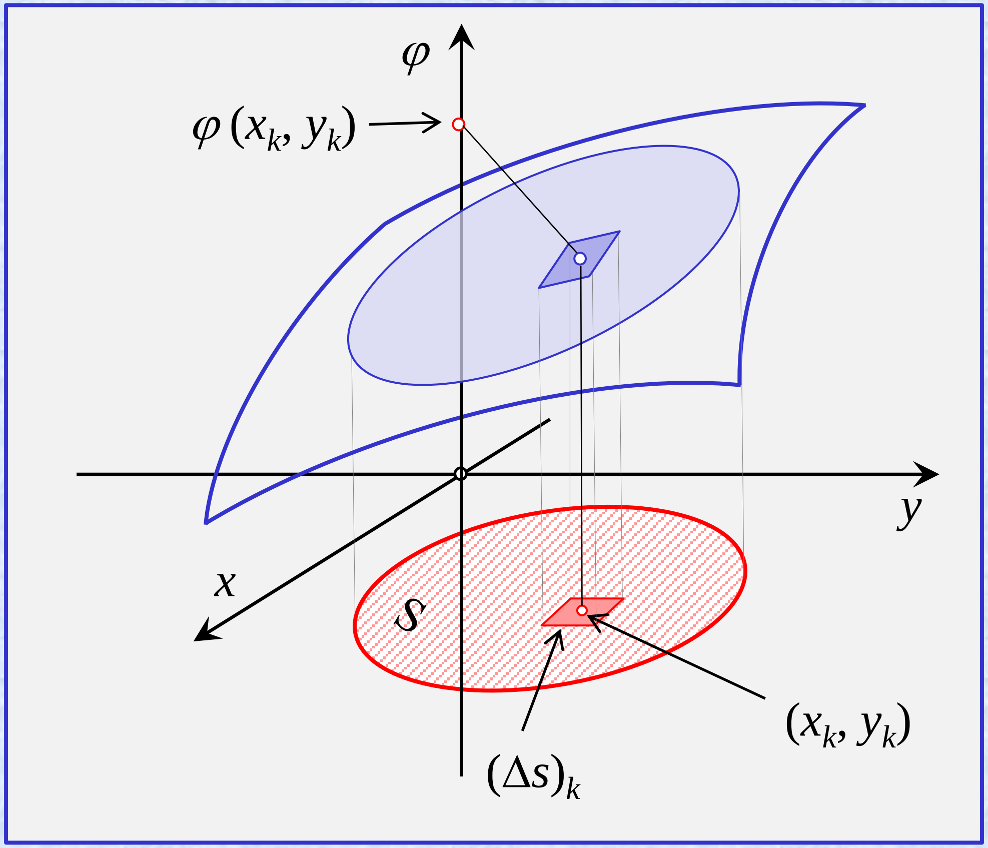
3D

$$\iint\limits_S \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta s)_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k, y_k, z_k)(\Delta s)_k$$

Geometryczna interpretacja w 2D ($\varphi = \varphi(x, y)$)

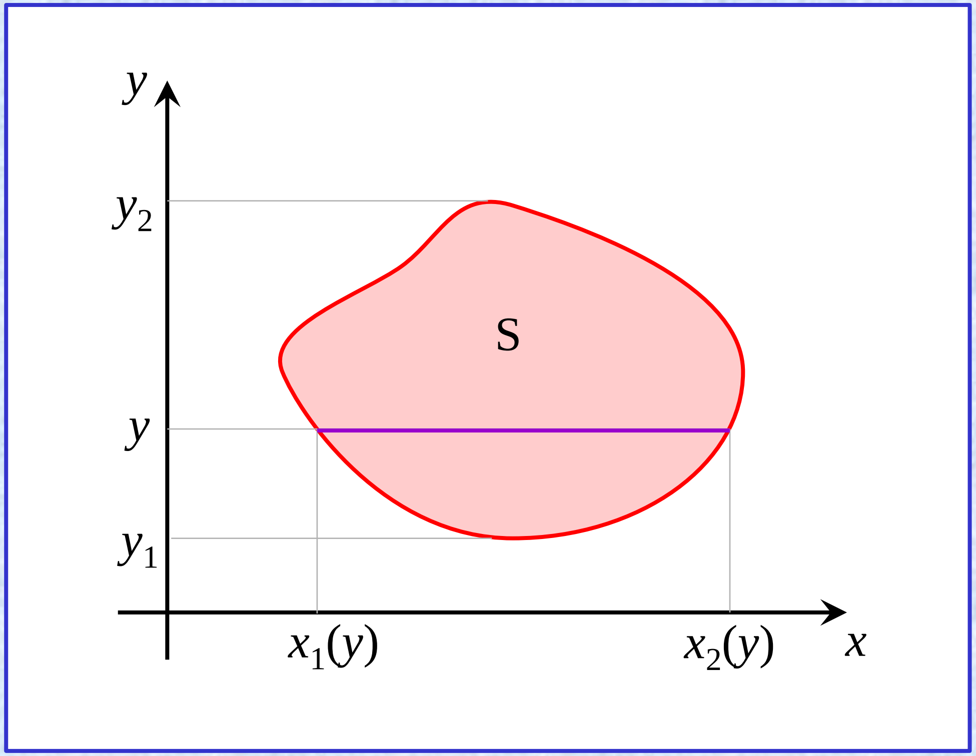
Objętość obszaru nad powierzchnią S i pod wykresem funkcji



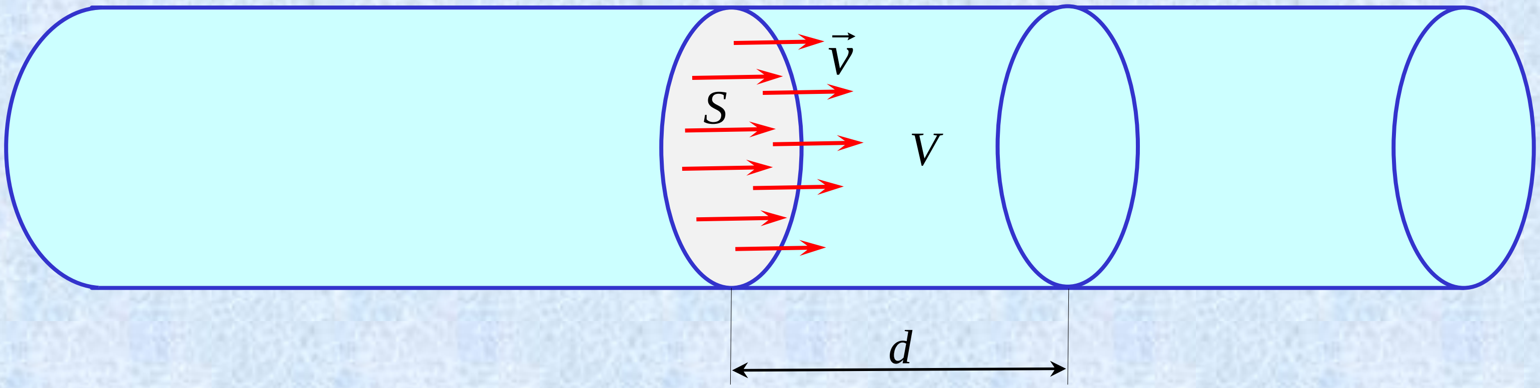
Całka powierzchniowa z pola skalarnego – obliczanie analityczne

2D

$$\iint\limits_{S} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\,s = \int\limits_{y_1}^{y_2}\left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \varphi(x,y)\,\mathrm{d}\,x\right)\mathrm{d}\,y$$



1.3.4. Całka powierzchniowa z pola wektorowego (strumień)



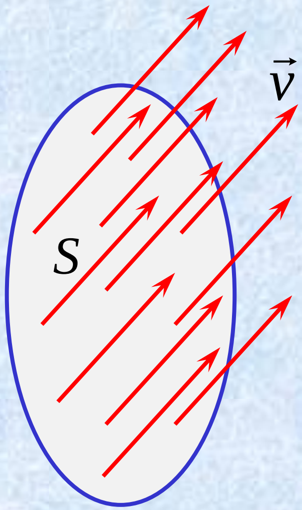
$$\Phi = \frac{V}{t}$$

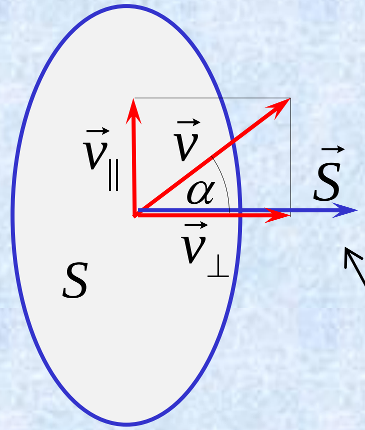
$$V = Sd$$

$$d = vt$$

$$\Phi = \frac{Sd}{t} = \frac{Svt}{t} = vS$$

1.3.4. Całka powierzchniowa z pola wektorowego (strumień)





$$\Phi = v_{\perp} S$$

$$v_{\perp} = v \cos\alpha$$

$$\Phi = vS\cos\alpha$$

Wprowadzamy wektor:

$$\vec{S} \perp S$$

$$\left|\vec{S}\right| = S$$

$$\Phi = \vec{v} \cdot \vec{S}$$

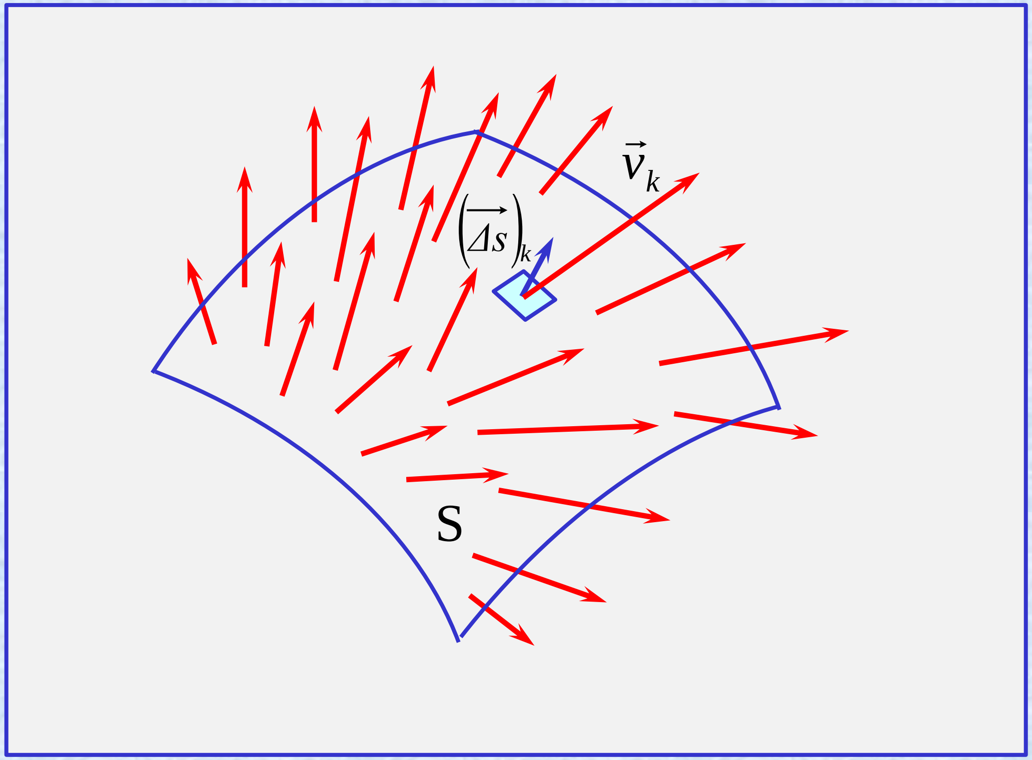
1.3.4. Całka powierzchniowa z pola wektorowego (strumień)

$$\Phi = \lim_{\substack{N \to \infty \\ (\Delta s)_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} \vec{v}(x_k, y_k, z_k) \cdot \left(\overrightarrow{\Delta s}\right)_k$$

$$\Phi = \iint_S \vec{v} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\, s}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}\, s} \perp \mathrm{S}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{d}\, s}\right| = \mathrm{d}\, s$$



Całka powierzchniowa z pola wektorowego – obliczanie analityczne

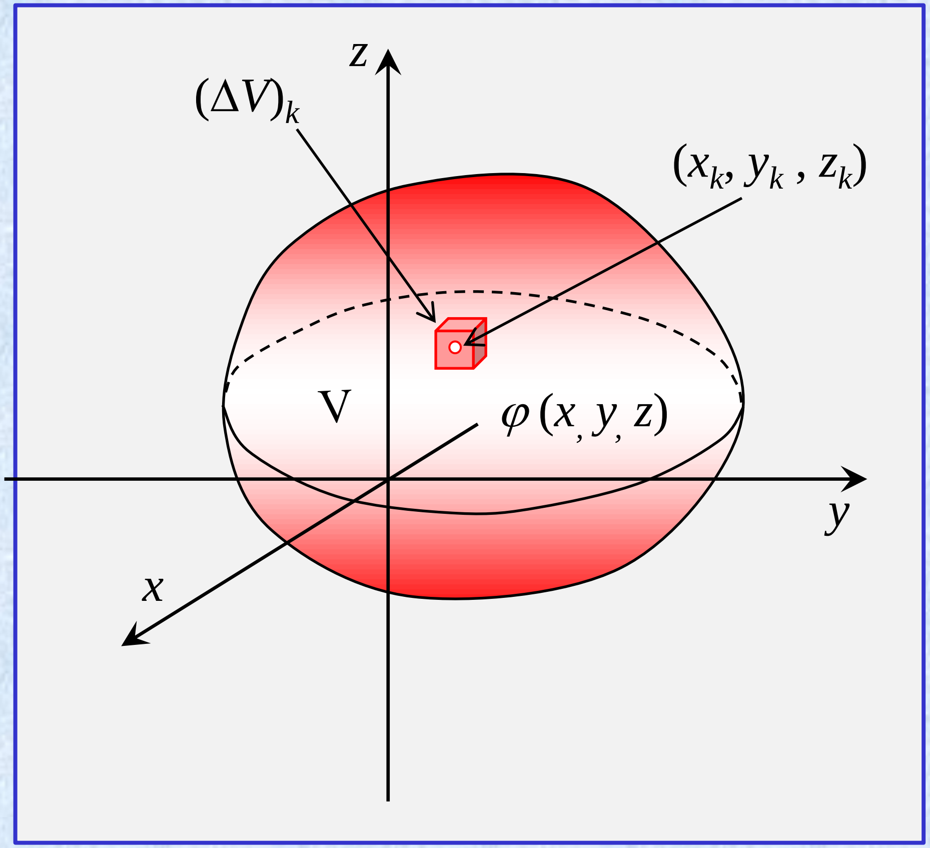
$$\overrightarrow{\mathrm{d}\, s} = \left[\mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, z, \quad \mathrm{d}\, z\, \mathrm{d}\, x, \quad \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y\right]$$

$$\iint\limits_{S} \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\, s} =$$

$$= \iint\limits_{S} \left(F_x(x, y, z)\, \mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, z + F_y(x, y, z)\, \mathrm{d}\, z\, \mathrm{d}\, x + F_z(x, y, z)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, y\right)$$

1.3.5. Całka objętościowa z pola skalarnego

$$\iiint\limits_V \varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}V = \lim_{\substack{N\to\infty \\ (\Delta v)_k \to 0}} \sum_{k=1}^{N} \varphi(x_k, y_k, z_k)(\Delta V)_k$$



Fizyczne interpretacje

1. Masa ciała o gęstości masowej $\rho_m(x,y,z)$

$$m = \iiint\limits_V \rho_m(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

2. Ładunek elektryczny zgromadzony w obszarze V o gęstości $\rho_e(x,y,z)$

$$Q = \iiint\limits_V \rho_e(x,y,z)\,\mathrm{d}V$$

1.3.6. Całki z funkcji skalarnych stałych

Niech $\varphi(x, y, z) = 1$.

Wówczas:

$$\int\limits_{L} \mathrm{d}\,l = L \longleftarrow$$ długość krzywej L

$$\iint\limits_{S} \mathrm{d}\,s = S \longleftarrow$$ pole powierzchni S

$$\iiint\limits_{V} \mathrm{d}V = V \longleftarrow$$ objętość obszaru V

Całka krzywoliniowa z pola skalarnego – przykład 1

Obliczyć całkę krzywoliniową z funkcji (pola skalarnego) $\varphi(x,y,z)=4x+3yz$

po paraboli $y=x^2,\quad z=0$ dla $0\le x\le 1$

$$L:\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=0 \\ 0\le t\le 1\end{cases}\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}x &= x'(t)\,\mathrm{d}t = 1\,\mathrm{d}t=\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}y &= y'(t)\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}z &= z'(t)\,\mathrm{d}t = 0\,\mathrm{d}t = 0\end{aligned}$$

$$\mathrm{d}l=\sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2}=\sqrt{(\mathrm{d}t)^2+(2t\,\mathrm{d}t)^2+0^2}=$$
$$=\sqrt{(\mathrm{d}t)^2+4t^2(\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{(1+4t^2)(\mathrm{d}t)^2}=\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t$$

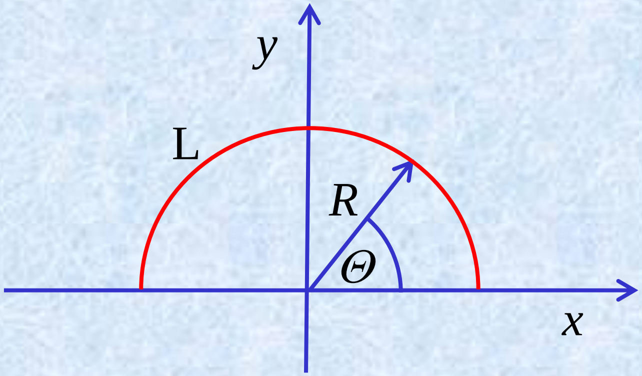
$$\int_L\varphi(x,y,z)\,\mathrm{d}l=\int_L(4x+3yz)\,\mathrm{d}l=\int_0^1\left(4t+3t^2\cdot 0\right)\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t=\int_0^1 4t\sqrt{1+4t^2}\,\mathrm{d}t=$$

$$=\left|\begin{array}{l} u=\sqrt{1+4t^2} \\ \mathrm{d}u=\dfrac{4t}{\sqrt{1+4t^2}}\mathrm{d}t \\ \mathrm{d}u=\dfrac{4t}{u}\mathrm{d}t \\ t\,\mathrm{d}t=\dfrac{1}{4}u\,\mathrm{d}u \\ t=0\Rightarrow u=1 \\ t=1\Rightarrow u=\sqrt{5}\end{array}\right|=4\int_1^{\sqrt{5}}\frac{1}{4}u^2\,\mathrm{d}u=\frac{1}{3}u^3\Big|_1^{\sqrt{5}}=\frac{1}{3}\left(\left(\sqrt{5}\right)^3-1\right)$$

Całka krzywoliniowa z pola skalarnego – przykład

Obliczyć całkę krzywoliniową z funkcji (pola skalarnego): $\varphi(x, y, z) = 2x + 3y - 5z + 4$

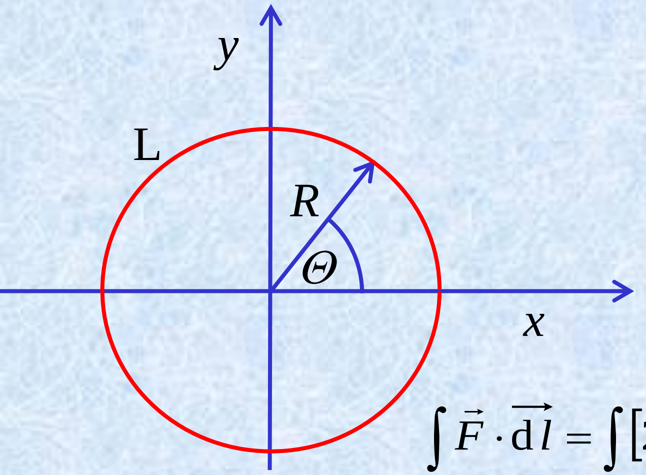
po półokręgu o promieniu $R = 2$ i środku leżącym w początku układu współrzędnych.



Obliczyć cyrkulację z funkcji wektorowej (pola wektorowego):

$$\vec{F} = \left[2xy + z, \quad 3x - 4yz, \quad z\sin xy\right]$$

po okręgu o promieniu $R = 2$ i środku leżącym w początku układu współrzędnych.



$$L: \begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \\ z = 0 \\ -\pi \le \theta \le \pi \end{cases}$$

$$\mathrm{d}x = x'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = -R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}y = y'(\theta)\,\mathrm{d}\theta = R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}z = 0$$

$$\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \left[-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad 0\right]$$

$$\int_L \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_L \left[2xy + z, \quad 3x - 4yz, \quad z\sin xy\right]\cdot\left[-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad 0\right] =$$

$$= \int_L \left[2R^2\cos\theta\sin\theta, \quad 3R\cos\theta, \quad 0\right]\cdot\left[-R\sin\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad 0\right] =$$

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(-2R^3\sin^2\theta\cos\theta + 3R^2\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\theta$$

$$\int \sin^2\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta = \left|\begin{matrix} u = \sin\theta \\ \mathrm{d}u = \cos\theta\,\mathrm{d}\theta \end{matrix}\right| = \int u^2\,\mathrm{d}u = \frac{1}{3}u^3 + C = \frac{1}{3}\sin^3\theta + C$$

$$\int \cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta =$$

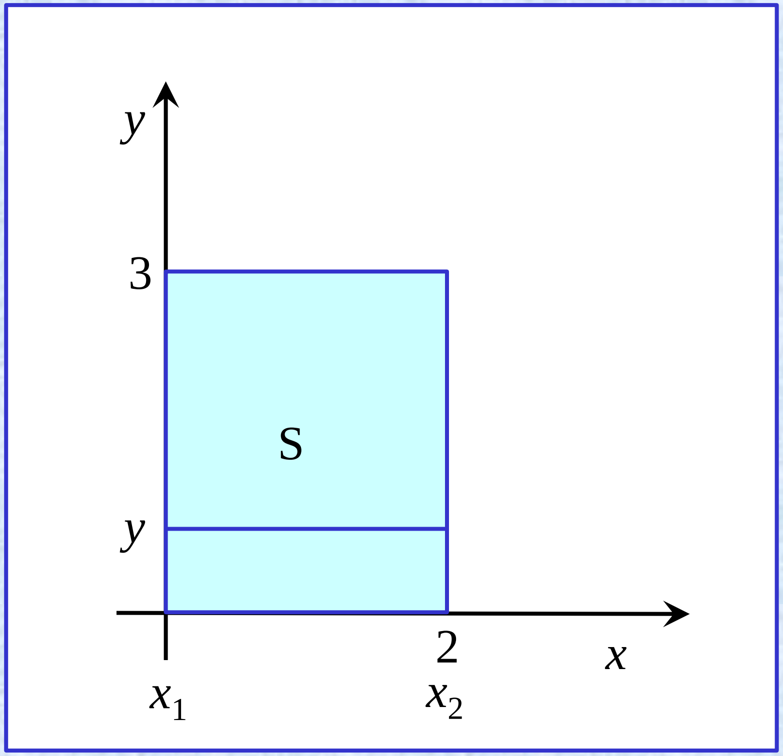
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{1}{2}\left(1 + \cos 2\theta\right)$$

Zadanie 1 - całka powierzchniowa z pola skalarnego po obszarze prostokątnym

$$\varphi(x,y)=2x^2+3xy-y^2$$

$$S:\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le 3\end{cases}$$



$$\iint_S \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s=\int_0^3\left(\int_0^2\left(2x^2+3xy-y^2\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2y-xy^2\right)\Bigg|_0^2\,\mathrm{d}y=$$

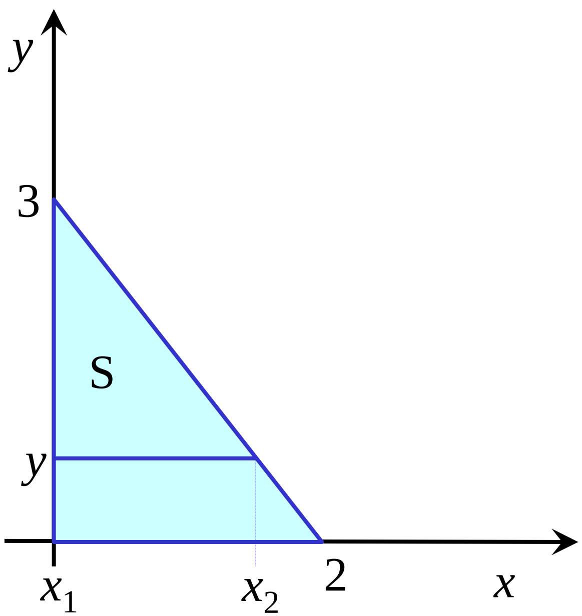
$$=\int_0^3\left(\frac{2}{3}2^3+\frac{3}{2}2^2y-2y^2\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{16}{3}+6y-2y^2\right)\mathrm{d}y=\left(\frac{16}{3}y+3y^2-\frac{2}{3}y^3\right)\Bigg|_0^3=$$

$$=\frac{16}{3}\cdot 3+3\cdot 3^2-\frac{2}{3}\cdot 3^3=16+27-18=25$$

Zdanie 2 - całka powierzchniowa z pola skalarnego po obszarze trójkątnym

$$\varphi(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2$$



$$S: \begin{cases} 0 \le x \le -\dfrac{2}{3} y + 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

$$y = ax + b$$

$$y = -\frac{3}{2} x + 3$$

$$\frac{3}{2} x = 3 - y$$

$$x = \frac{2}{3}(3 - y) = -\frac{2}{3} y + 2$$

$$\iint_S \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_0^3 \left(\int_0^{-\frac{2}{3}y+2} \left(2x^2 + 3xy - y^2\right) \mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y =$$

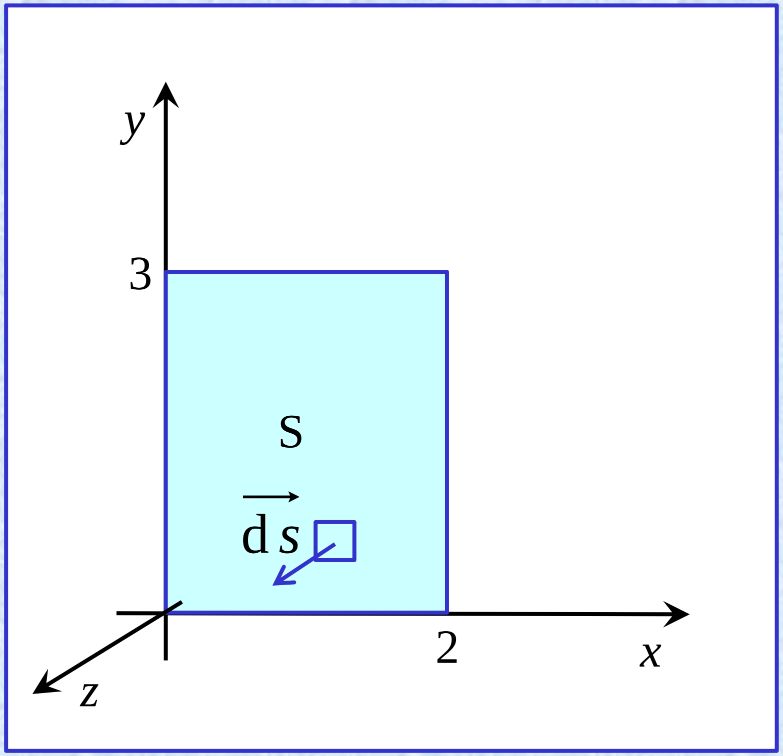
$$= \int_0^3 \left(\frac{2}{3} x^3 + \frac{3}{2} x^2 y - xy^2 \right) \Bigg|_0^{-\frac{2}{3}y+2} \mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}y + 2\right)^3 + \frac{3}{2}\left(-\frac{2}{3}y+2\right)^2 y - \left(-\frac{2}{3}y+2\right) y^2 \right) \mathrm{d}y =$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = -\dfrac{2}{3} y + 2 \\ \mathrm{d}t = -\dfrac{2}{3} \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}y = -\dfrac{3}{2} \mathrm{d}t \end{array} \right| = -\frac{3}{2} \int_2^0 \left(\frac{2}{3} t^3 + \frac{3}{2} t^2 \left(-\frac{3}{2} t + 3 \right) - t \left(-\frac{3}{2} t + 3 \right)^2 \right) \mathrm{d}t = \ldots$$

Zadanie 3 – obliczanie strumienia pola wektorowego przez powierzchnię prostokąta

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} xy - z \\ x^2 - 2yz \\ 3xz + y^2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{S}: \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \\ z = 0 \end{cases} \qquad \overrightarrow{\mathrm{d}s} = [0, \quad 0, \quad \mathrm{d}s] = [0, \quad 0, \quad \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y]$$



$$\iint_{\mathrm{S}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}s} = \iint_{\mathrm{S}} \begin{bmatrix} xy - z \\ x^2 - 2yz \\ 3xz + y^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \end{bmatrix} =$$

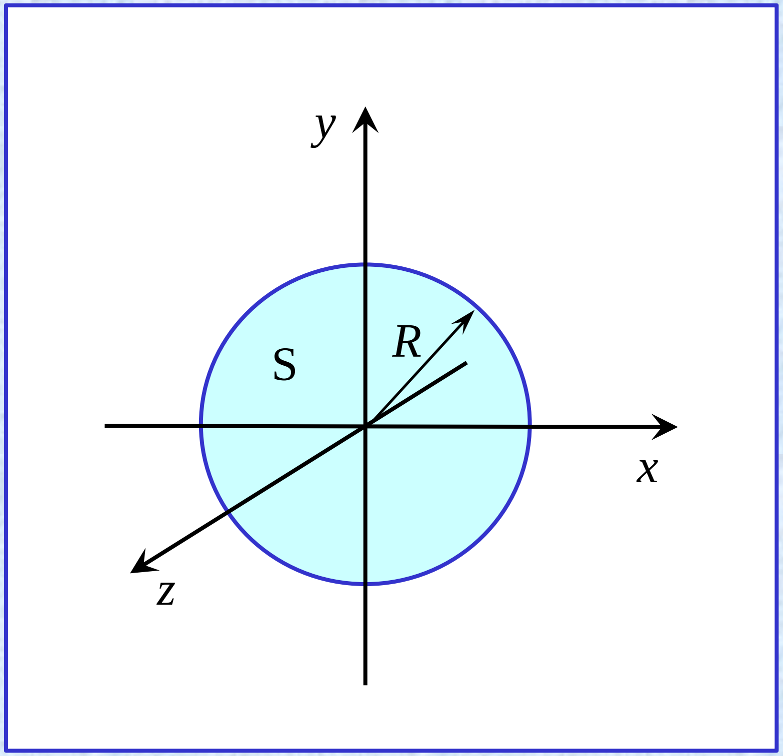
$$= \iint_{\mathrm{S}} \left((xy - z) \cdot 0 + \left(x^2 - 2yz\right) \cdot 0 + \left(3xz + y^2\right) \cdot \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right) =$$

$$= \int_0^3 \int_0^2 \left(3x \cdot 0 + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 \int_0^2 y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^3 y^2 x \Big|_0^2 \,\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^3 2y^2\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3} y^3 \Big|_0^3 = 18$$

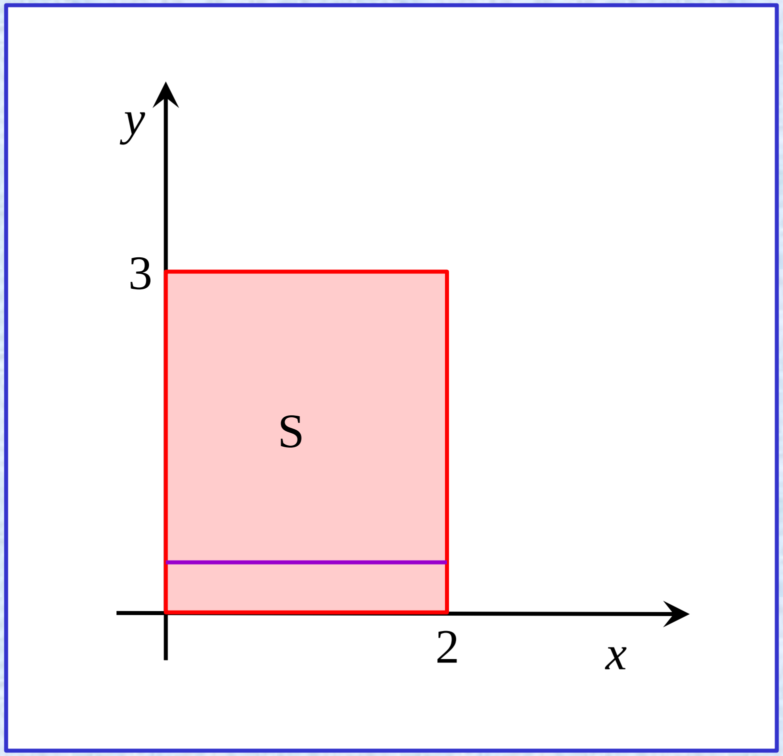
Zadanie 4 – obliczanie strumienia pola wektorowego przez powierzchnię koła

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} xy - z \\ x^2 - 2yz \\ 3xz + y^2 \end{bmatrix}$$



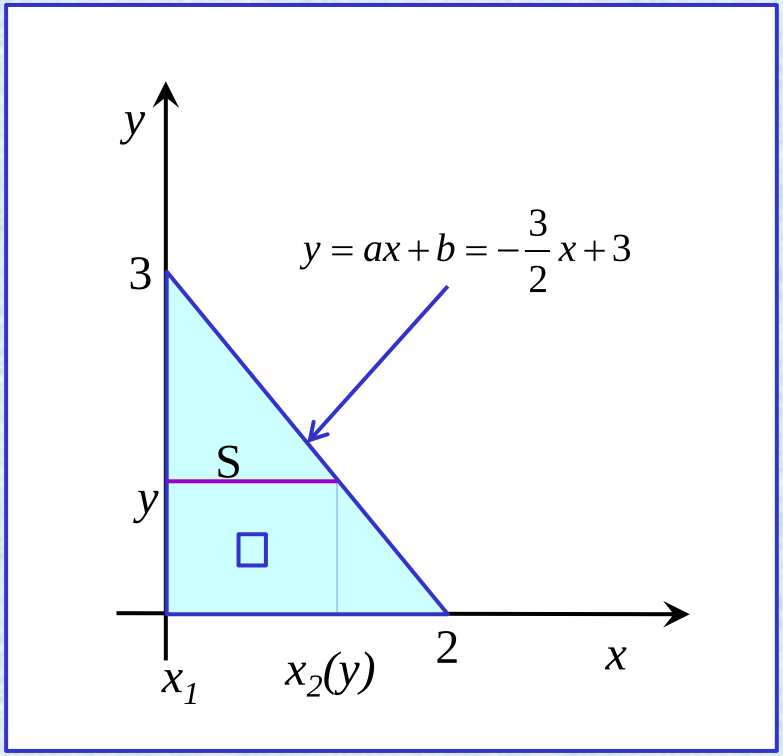
Całka powierzchniowa z pola skalarnego – przykład

$$\varphi(x, y) = 2x + 4y - xy$$



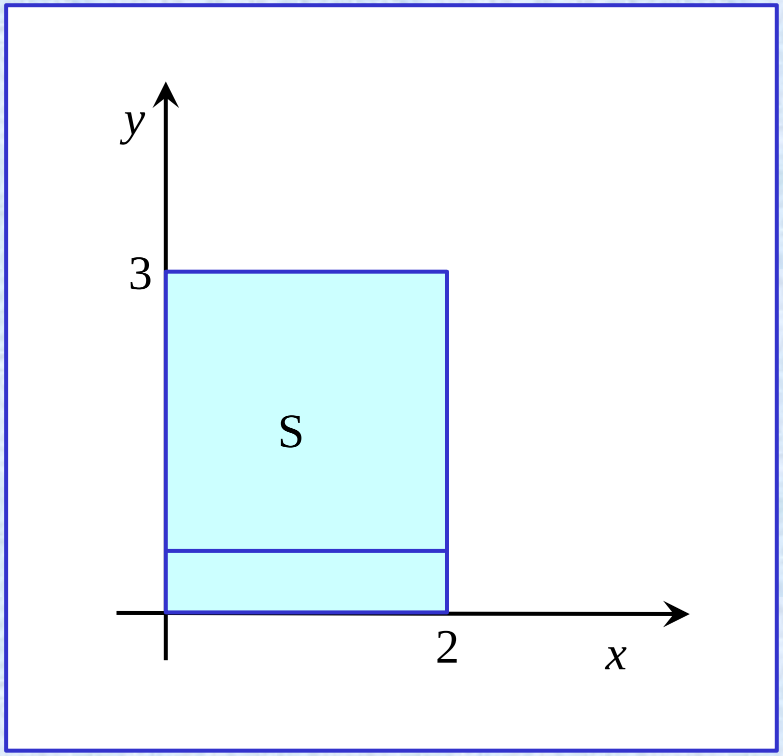
Całka powierzchniowa z pola skalarnego – przykład

$$\varphi(x, y) = 2x + 4y - xy$$



Całka powierzchniowa z pola skalarnego – przykład

$$\varphi(x,y) = 2x^2 + 3xy - y^2$$



$$S:\begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \end{cases}$$

$$\iint_S \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s = \iint_S \left(2x^2 + 3xy - y^2\right)\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^2 \left(2x^2 + 3xy - y^2\right)\mathrm{d}x \right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}yx^2 - y^2 x \right)\Bigg|_0^2 \mathrm{d}y =$$

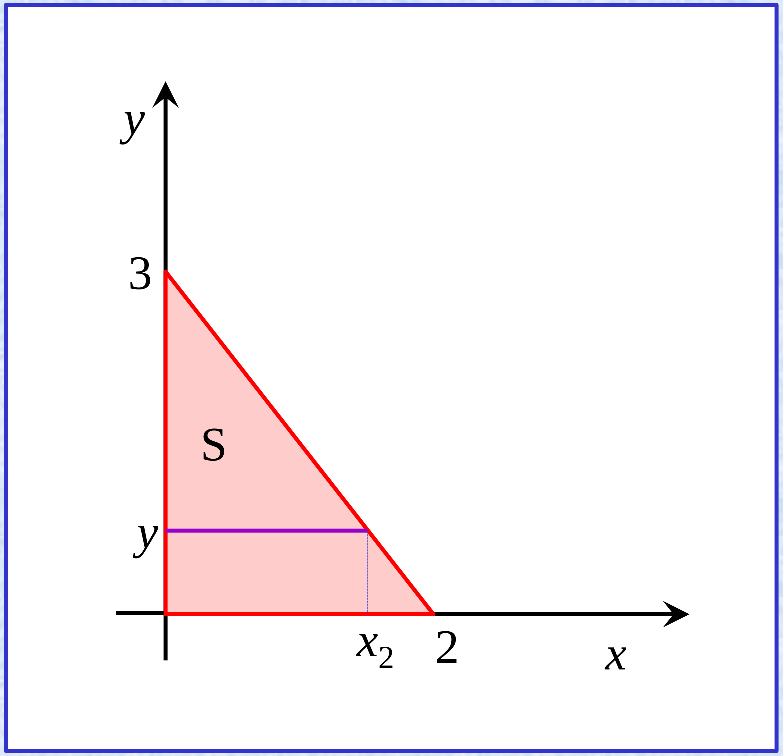
$$= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}2^3 + \frac{3}{2}y\cdot 2^2 - y^2\cdot 2 \right)\mathrm{d}y =$$

$$= \int_0^3 \left(\frac{16}{3} + 6y - 2y^2 \right)\mathrm{d}y = \left(\frac{16}{3}y + 3y^2 - \frac{2}{3}y^3 \right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{16}{3}3 + 3\cdot 3^2 - \frac{2}{3}\cdot 3^3 - 0 + 0 - 0 = 16 + 27 - 18 = 25$$

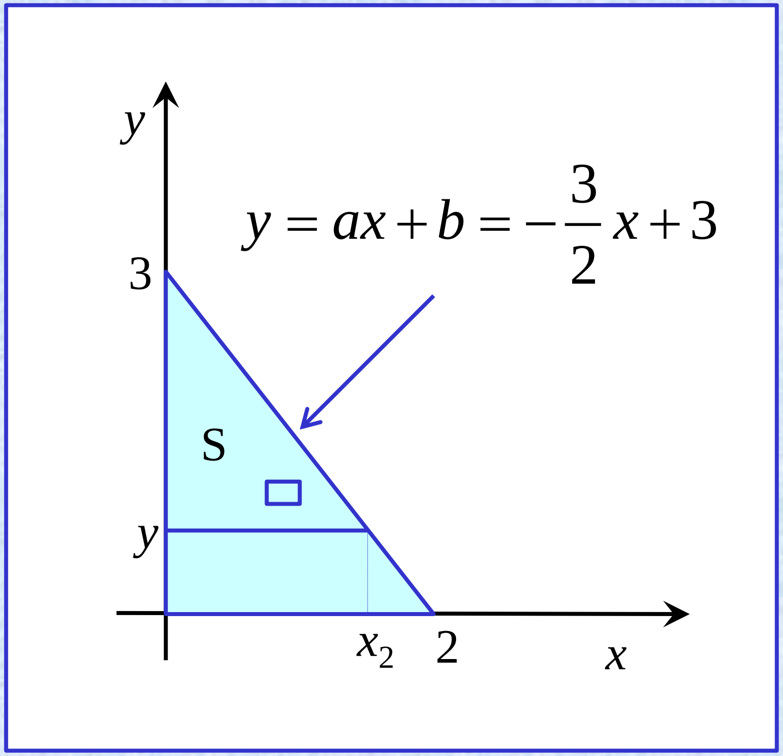
Całka powierzchniowa z pola skalarnego – przykład

$$\varphi(x,y)=2x+4y-xy$$



Całka powierzchniowa z pola skalarnego – przykład

$$\varphi(x,y)=2x^2+3xy-y^2$$



$$-\frac{3}{2}x+3=y$$

$$-\frac{3}{2}x=y-3$$

$$x=-\frac{2}{3}y+2$$

$$S:\begin{cases}0\le x\le -\frac{2}{3}y+2\\ 0\le y\le 3\end{cases}$$

$$\iint_S \varphi(x,y)\,\mathrm{d}s=\iint_S\left(2x^2+3xy-y^2\right)\mathrm{d}s=$$

$$=\int_0^3\left(\int_0^{-\frac{2}{3}y+2}\left(2x^2+3xy-y^2\right)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}yx^2-y^2x\right)\Bigg|_0^{-\frac{2}{3}y+2}\mathrm{d}y=$$

$$=\int_0^3\left(\frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}y+2\right)^3+\frac{3}{2}y\cdot\left(-\frac{2}{3}y+2\right)^2-y^2\cdot\left(-\frac{2}{3}y+2\right)\right)\mathrm{d}y=$$

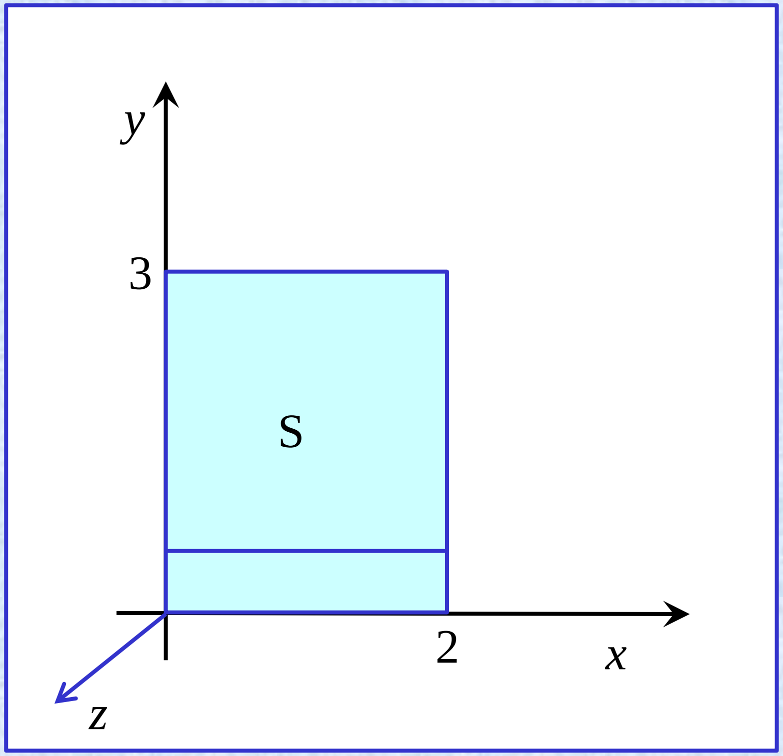
$$\int_0^3 \frac{2}{3}\left(-\frac{2}{3}y+2\right)^3 \mathrm{d}y = \left| \begin{array}{c} u=-\frac{2}{3}y+2 \\ \mathrm{d}u=-\frac{2}{3}\mathrm{d}y \\ \mathrm{d}y=-\frac{3}{2}\mathrm{d}u \\ y=0 \Rightarrow u=2 \\ y=3 \Rightarrow u=0 \end{array} \right| = \frac{2}{3}\int_2^0 u^3\left(-\frac{3}{2}\right)\mathrm{d}u = -\frac{1}{4}u^4\Big|_2^0 =$$

$$= 0-\left(-\frac{1}{4}2^4\right) = 4$$

Całka powierzchniowa z pola wektorowego – przykład

$$\vec{V} = \begin{bmatrix} xy - z \\ x^2 - 2yz \\ 3xz + y^2 \end{bmatrix} \qquad \mathrm{S} : \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le 3 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\iint\limits_{\mathrm{S}} \vec{V} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}\, s}$$



$$\overrightarrow{\mathrm{d}\, s} = [0, \quad 0, \quad \mathrm{d}s]$$

$$\iint\limits_{\mathrm{S}} \begin{bmatrix} xy - z \\ x^2 - 2yz \\ 3xz + y^2 \end{bmatrix} \cdot [0, \quad 0, \quad \mathrm{d}s] = \iint\limits_{\mathrm{S}} \left(0 + 0 + \left(3xz + y^2\right)\mathrm{d}s\right) = \iint\limits_{\mathrm{S}} y^2 \mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^2 y^2 \,\mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y = \int_0^3 \left(y^2 \int_0^2 \mathrm{d}\, x \right) \mathrm{d}\, y =$$