Podstawy Elektromagnetyzmu

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Plan

1. Matematyczny aparat teorii pola
2. Podstawowe pojęcia teorii pola elektromagnetycznego
3. Prawa elektrodynamiki (równania Maxwella)
4. Klasyczne warunki brzegowe elektrodynamiki
5. Praca i moc pola elektromagnetycznego (tw. Poyntinga)
6. Potencjały elektrodynamiczne
7. Elektrostatyka
8. Magnetostatyka
9. Pola harmoniczne
10. Pola quasistacjonarne
11. Fale elektromagnetyczne

1. Matematyczny aparat teorii pola

1.1. Algebra wektorów

1.2. Pola skalarne i wektorowe

1.3. Operacje różniczkowe na polach wektorowych

1.4. Operacje całkowe na polach wektorowych

1.5. Całkowe definicje dywergencji i rotacji

1.6. Różniczkowo-całkowe twierdzenia analizy wektorowej

1.1. Algebra wektorów

Do czego potrzebna jest nam algebra wektorów?

Fizyczne wielkości mogą być skalarami lub wektorami (są też inne typy wielkości fizycznych, ale nie będziemy ich potrzebować).

Wielkości skalarne są opisywane liczbą rzeczywistą (czasem zespoloną). Są to np.: masa, energia, temperatura, ciśnienie, ładunek elektryczny, napięcie, natężenie prądu, strumień magnetyczny.

Wielkości wektorowe to takie, które wyróżniają pewien kierunek w przestrzeni. Są to np.: prędkość, przyśpieszenie, siła, pęd, moment siły, moment pędu.

Do opisu pola elektromagnetycznego niezbędne są co najmniej dwa wektory: natężenie pola elektrycznego $\vec{E}$ i indukcja magnetyczna $\vec{B}$.

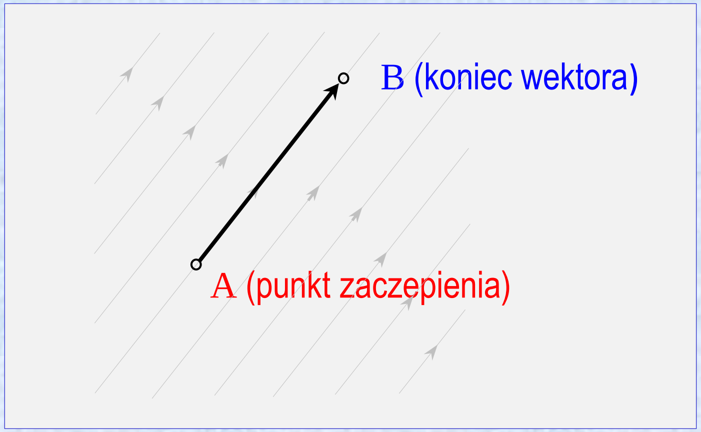
Poza nimi stosuje się też wiele innych wektorów związanych ze zjawiskami elektromagnetycznymi.

1.1. Algebra wektorów

1.1.1. Podstawowe pojęcia

Wektor

- jest to uporządkowana para punktów (definicja geometryczna)



Stosowane oznaczenia:

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \vec{a}, \quad \bar{a}, \quad \boldsymbol{a}$

Cechy wektora:
wartość, kierunek, zwrot, punkt zaczepienia

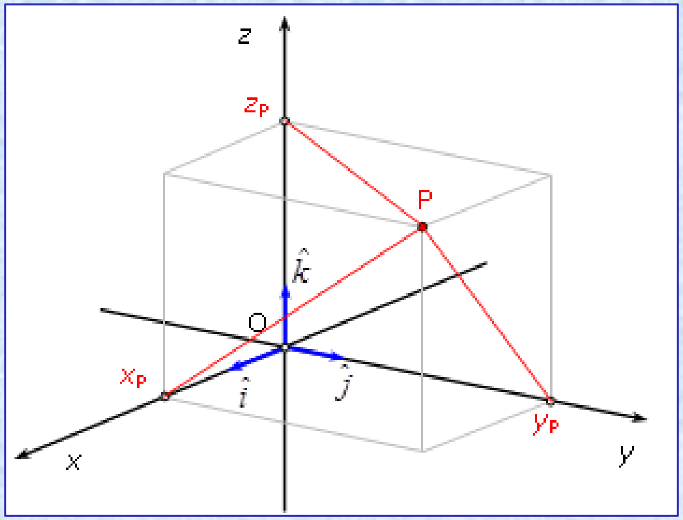
1.1. Algebra wektorów

1.1.1. Podstawowe pojęcia

Współrzędne kartezjańskie wektora

$$\mathrm{A}(x_\mathrm{A}, \quad y_\mathrm{A}, \quad z_\mathrm{A}) \qquad \mathrm{B}(x_\mathrm{B}, \quad y_\mathrm{B}, \quad z_\mathrm{B})$$

Niech: $\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$



Układ współrzędnych kartezjańskich

Współrzędne kartezjańskie wektora:

$$a_x = x_\mathrm{B} - x_\mathrm{A}, \qquad a_y = y_\mathrm{B} - y_\mathrm{A}, \qquad a_z = z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}$$

Notacja: $\vec{a} = [a_x, \quad a_y, \quad a_z]$ lub $\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$

gdzie $\hat{i} = [1, \quad 0, \quad 0]$, $\hat{j} = [0, \quad 1, \quad 0]$, $\hat{k} = [0, \quad 0, \quad 1]$

wektory jednostkowe (wersory) układu kartezjańskiego

1.1. Algebra wektorów

1.1.1. Podstawowe pojęcia

Wartość (moduł, długość, norma euklidesowa) wektora

Niech: $\vec{a} = \left[a_x, \quad a_y, \quad a_z \right]$

$$|\vec{a}| \equiv a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

Ważna własność wartości wektora:

- jest ona niezależna od przyjętego układu współrzędnych (czyli jest niezmiennikiem translacji i obrotów układu)

1.1. Algebra wektorów

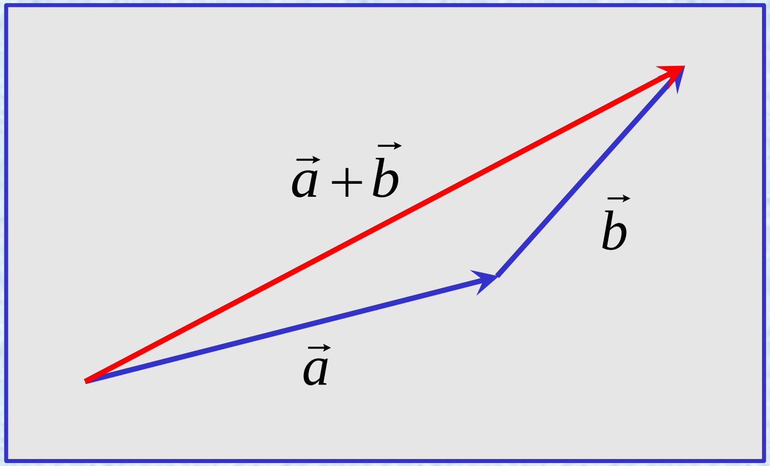
1.1.2. Działania na wektorach

Suma (złożenie)

Niech: $\vec{a} = [a_x, \quad a_y, \quad a_z]$, $\quad \vec{b} = [b_x, \quad b_y, \quad b_z]$

$$\vec{a} + \vec{b} = [a_x + b_x, \quad a_y + b_y, \quad a_z + b_z]$$

Interpretacja geometryczna



1.1. Algebra wektorów

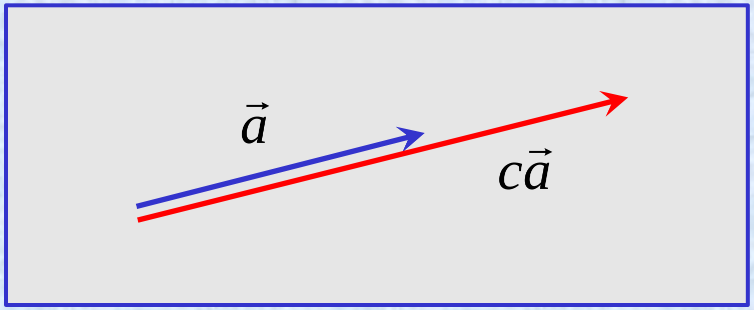
1.1.2. Działania na wektorach

Iloczyn wektora przez liczbę

Niech: $\vec{a} = [a_x, \quad a_y, \quad a_z]$, $c \in \Re$

$$c\vec{a} = [ca_x, \quad ca_y, \quad ca_z]$$

Interpretacja geometryczna



1.1. Algebra wektorów

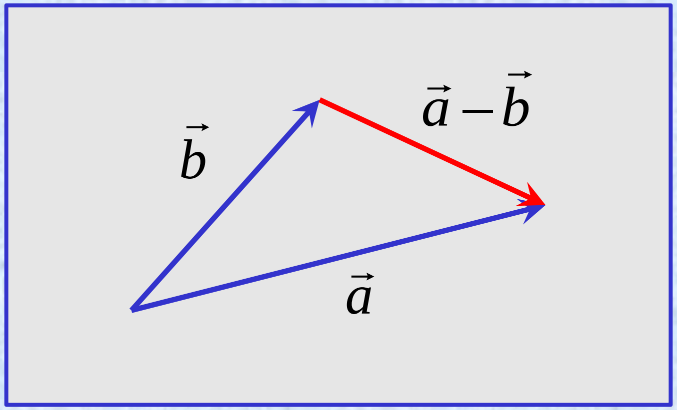
1.1.2. Działania na wektorach

Różnica

Niech: $\vec{a} = [a_x, \quad a_y, \quad a_z]$, $\quad \vec{b} = [b_x, \quad b_y, \quad b_z]$

$$\vec{a} - \vec{b} \equiv \vec{a} + (-1\vec{b}) = [a_x - b_x, \quad a_y - b_y, \quad a_z - b_z]$$

Interpretacja geometryczna



1.1. Algebra wektorów

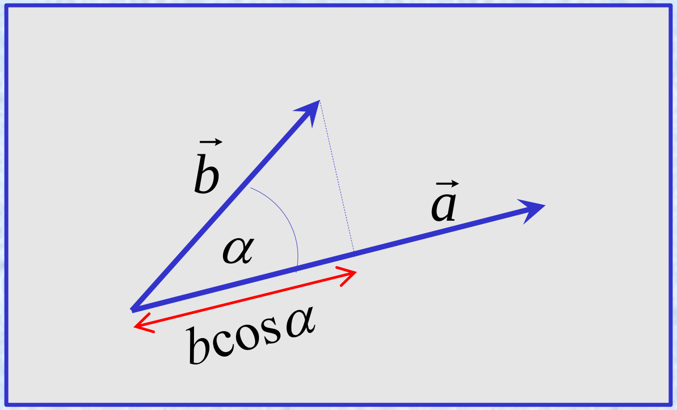
1.1.2. Działania na wektorach

Iloczyn skalarny

Niech: $\vec{a} = [a_x, \quad a_y, \quad a_z]$, $\vec{b} = [b_x, \quad b_y, \quad b_z]$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} \equiv ab\cos\alpha = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Interpretacja geometryczna



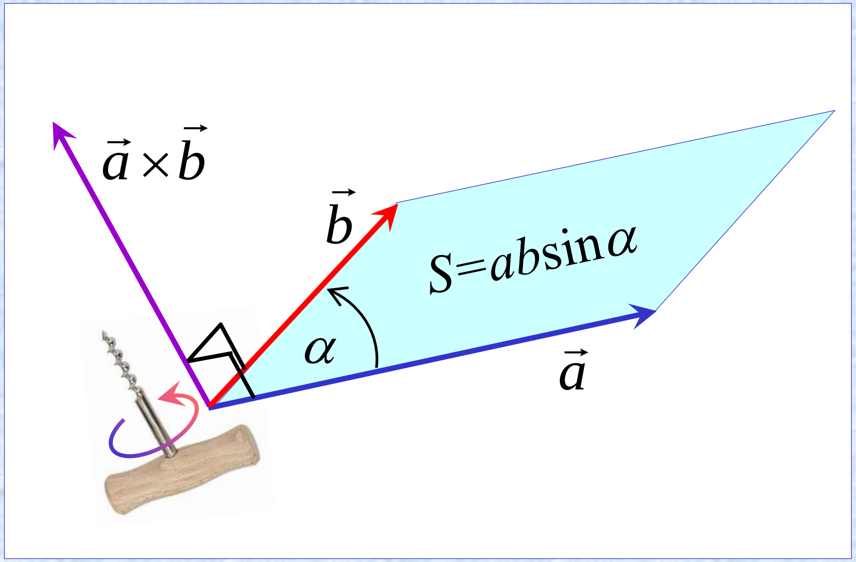
1.1.2. Działania na wektorach

Iloczyn wektorowy

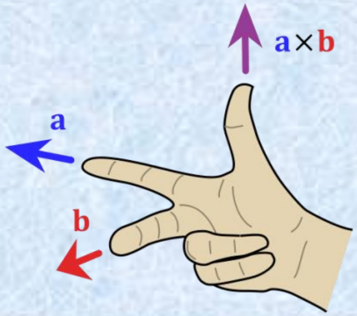
Niech: $\vec{a} = [a_x, \quad a_y, \quad a_z]$, $\quad \vec{b} = [b_x, \quad b_y, \quad b_z]$

Interpretacja geometryczna

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin\alpha$$



1.1. Algebra wektorów

1.1.2. Działania na wektorach

Obliczanie iloczynu wektorowego

Niech: $\vec{a} = [a_x, \quad a_y, \quad a_z]$, $\quad \vec{b} = [b_x, \quad b_y, \quad b_z]$

Metoda rozwinięcia Laplace'a

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{k} =$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)\hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x)\hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{k} = \begin{bmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{bmatrix}$$

1.1. Algebra wektorów

Zadanie

Dane są następujące punkty: A (1,1,3), B (1,-1,2), C (2,3,0).

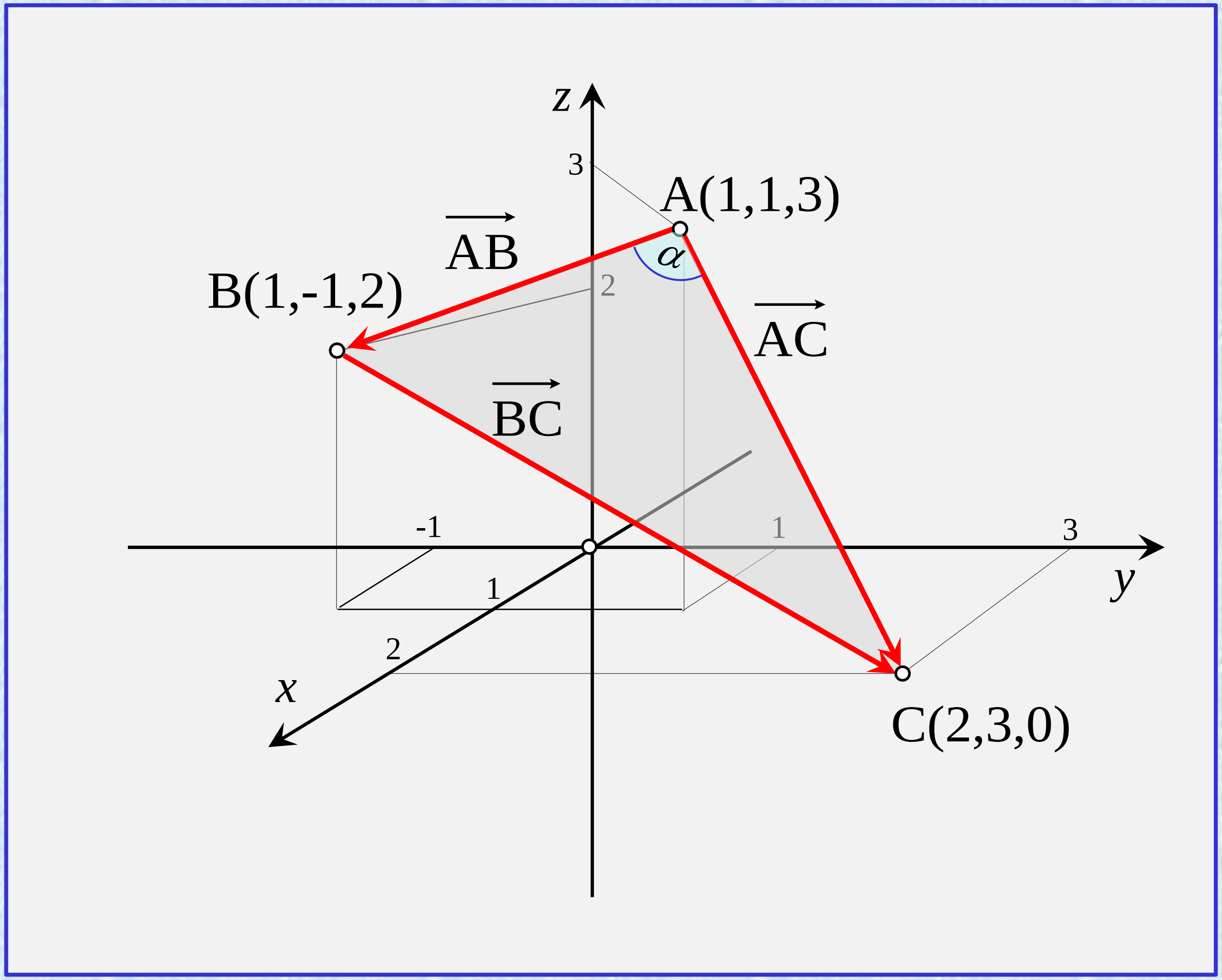
a) Obliczyć współrzędne i moduły wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Wykonać działania: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

c) Obliczyć $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ i kat α między tymi wektorami

d) Obliczyć $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Udowodnić prostopadłość obliczonego wektora do wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Obliczyć pole powierzchni trójkąta ΔABC.

Ilustracja zadania



a) Obliczyć współrzędne i moduły wektorów $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \ \overrightarrow{\mathrm{BC}}, \ \overrightarrow{\mathrm{AC}}$

A (1,1,3), B (1,-1,2), C (2,3,0).

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)_x = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}} = 1-1=0$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)_y = y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}} = -1-1=-2$$

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)_z = z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} = 2-3=-1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = [0, \quad -2, \quad -1] = 0\hat{i} - 2\hat{j} - 1\hat{k} = -2\hat{j} - \hat{k}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = [2-1, \quad 3-(-1), \quad 0-2] = [1, \quad 4, \quad -2]$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = [1, \quad 2, \quad -3]$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

b) Wykonać działania: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC},\quad 5\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{AB}=[0,\quad -2,\quad -1]\qquad \overrightarrow{BC}=[1,\quad 4,\quad -2]\qquad \overrightarrow{AC}=[1,\quad 2,\quad -3]$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=[0+1,\quad -2+4,\quad -1-2]=[1,\quad 2,\quad -3]$$

$$5\overrightarrow{AB}=5[0,\quad -2,\quad -1]=[5\cdot 0,\quad 5\cdot(-2),\quad 5\cdot(-1)]=[0,\quad -10,\quad -5]$$

$$\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=[1-0,\quad 2-(-2),\quad -3-(-1)]=[1,\quad 4,\quad -2]$$

c) Obliczyć $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ i kąt α między tymi wektorami

$$\overrightarrow{AB} = [0, \quad -2, \quad -1]$$

$$\overrightarrow{AC} = [1, \quad 2, \quad -3]$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\alpha$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left(\overrightarrow{AB}\right)_x \left(\overrightarrow{AC}\right)_x + \left(\overrightarrow{AB}\right)_y \left(\overrightarrow{AC}\right)_y + \left(\overrightarrow{AB}\right)_z \left(\overrightarrow{AC}\right)_z$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = -1$$

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{70}} = -0{,}1195$$

$$\alpha = \arccos\left(-0{,}1195\right) = 96{,}9^{\circ}$$

d) Obliczyć $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Udowodnić prostopadłość obliczonego wektora do wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$.

Obliczyć pole powierzchni trójkąta ΔABC.

$$\overrightarrow{AB} = [0, \quad -2, \quad -1]$$

$$\overrightarrow{AC} = [1, \quad 2, \quad -3]$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [0, \quad -2, \quad -1] \times [1, \quad 2, \quad -3] = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$$

1.1. Algebra wektorów

Zadanie do samodzielnego rozwiązania

Dane są następujące punkty: A (2,-3,1), B (3,4,2), C (5,1,-2).

a) Obliczyć współrzędne i moduły wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

b) Wykonać działania: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$, $5\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

c) Obliczyć $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ i kat α między tymi wektorami

d) Obliczyć $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$. Udowodnić prostopadłość obliczonego wektora do wektorów $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$. Obliczyć pole powierzchni trójkąta ΔABC.

1.1. Algebra wektorów

Rozwiązanie

a) Obliczyć współrzędne wektorów $\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{BC}, \ \overrightarrow{AC}$.

A(1,1,3), B(1,-1,2), C(2,3,0)

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, \quad y_B - y_A, \quad z_B - z_A] = [1-1, \quad -1-1, \quad 2-3] =$$
$$= [0, \quad -2, \quad -1]$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

Podobnie: $\overrightarrow{BC} = [1, \quad 4, \quad -2], \quad \left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{21}$

$\overrightarrow{AC} = [1, \quad 2, \quad -3], \quad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{14}$

1.1. Algebra wektorów

b) Wykonać działania: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}, \quad 5\overrightarrow{AC}, \quad \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AB} = [0, \quad -2, \quad -1], \qquad \overrightarrow{BC} = [1, \quad 4, \quad -2], \qquad \overrightarrow{AC} = [1, \quad 2, \quad -3]$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = [0+1, \quad -2+4 \quad -1-2] = [1, \quad 2 \quad -3] \quad (= \overrightarrow{AC})$$

$$5\overrightarrow{AC} = 5[1, \quad 2 \quad -3] = [5 \cdot 1, \quad 5 \cdot 2 \quad 5 \cdot (-3)] = [5, \quad 10 \quad -15]$$

$$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = [1-0, \quad 2-(-2) \quad -3-(-1)] = [1, \quad 4 \quad -2] \quad (= \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=[0,\quad -2,\quad -1]\cdot[1,\quad 2,\quad -3]=0\cdot 1+(-2)\cdot 2+(-1)\cdot(-3)=-4+3=-1$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|\cos\alpha$$

$$\arccos(-0{,}11952)=96{,}86$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=[0,\quad -2,\quad -1]\times[1,\quad 2,\quad -3]=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & -2 & -1\\ 1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 2 & -3\end{vmatrix}\hat{i}-\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\hat{j}+\begin{vmatrix}0 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}\hat{k}=$$

$$=8\hat{i}-1\hat{j}+2\hat{k}=[8,\quad -1,\quad 2]$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)==[0,\quad -2,\quad -1]\cdot[8,\quad -1,\quad 2]=0$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\left(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right)==[1,\quad 2,\quad -3]\cdot[8,\quad -1,\quad 2]=8-2-6=0$$

$$S_{\Delta}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{\sqrt{69}}{2}$$

1.1. Algebra wektorów

c) Obliczyć $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ i kat α między tymi wektorami

$$\overrightarrow{AB} = [0, \quad -2, \quad -1], \qquad \overrightarrow{AC} = [1, \quad 2, \quad -3]$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) = -1$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right| \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \left|\overrightarrow{AC}\right|} = \frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{70}} \approx -0.1195$$

$$\alpha = \arccos(-0.1195) \approx 97^{o}$$

1.1. Algebra wektorów

d) Obliczyć $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = [0, \quad -2, \quad -1], \qquad \overrightarrow{AC} = [1, \quad 2, \quad -3]$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \hat{k} = 8\hat{i} - 1\hat{j} + 2\hat{k} =$$

$$= [8, \quad -1, \quad 2]$$

1.1. Algebra wektorów

d) (…) . Udowodnić prostopadłość obliczonego wektora do wektorów $\overrightarrow{AB}, \ \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB} = [0, \quad -2, \quad -1], \ \overrightarrow{AC} = [1, \quad 2, \quad -3], \qquad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = [8, \quad -1, \quad 2]$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) = [0, \quad -2, \quad -1] \cdot [8, \quad -1, \quad 2] = 0 \cdot 8 + (-2) \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 = 0$$

Wniosek: $\overrightarrow{AB} \perp \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right)$

$$\overrightarrow{AC} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) = [1, \quad 2, \quad -3] \cdot [8, \quad -1, \quad 2] = 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) + (-3) \cdot 2 = 0$$

Wniosek: $\overrightarrow{AC} \perp \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right)$

1.1. Algebra wektorów

d) (…) Obliczyć pole powierzchni trójkąta $\Delta \mathrm{ABC}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \begin{bmatrix} 8, & -1, & 2 \end{bmatrix}$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \times \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{8^2 + (-1)^2 + 2^2} = \frac{1}{2}\sqrt{69} \approx 4{,}153$$