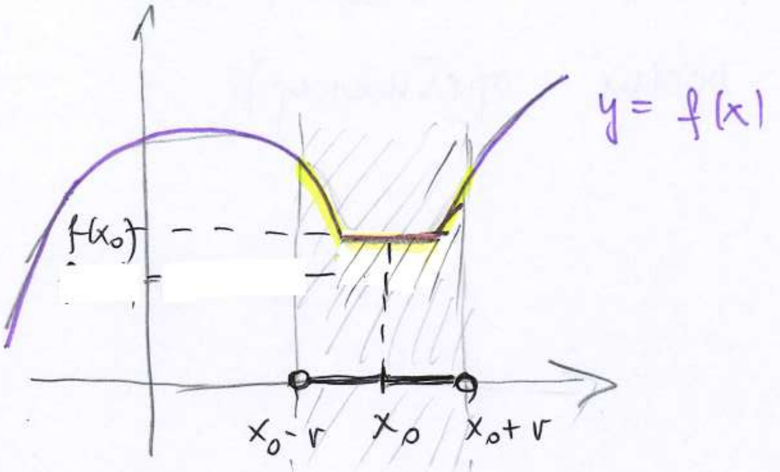
Informatyka, WYKŁAD 6

Badanie funkcji – ekstrema funkcji (lokalne i globalne)

## Definicja

Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne, gdy:

$$\underset{r>0}{\exists} \ \underset{x \in S(x_0, r)}{\forall} \quad f(x_0) \leq f(x)$$

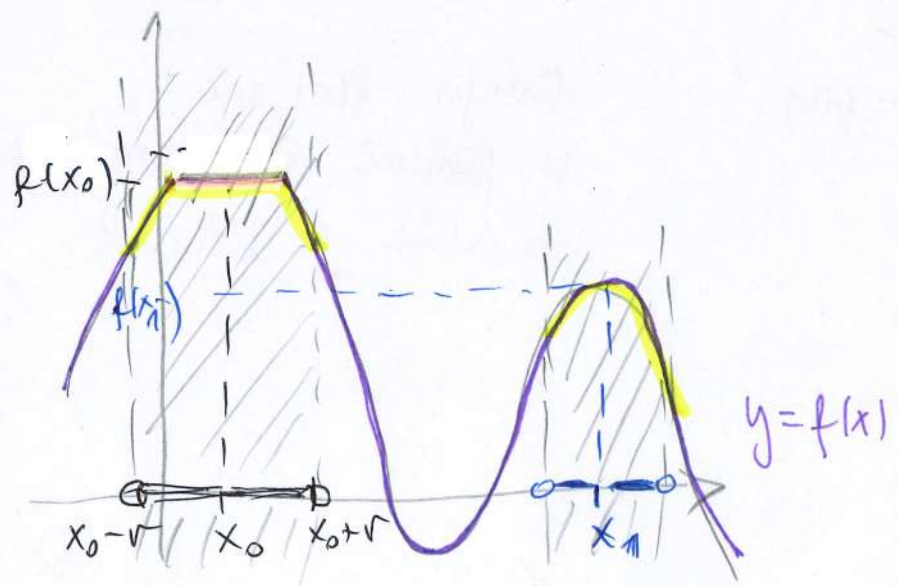



$f(x)$ ma w punkcie $x_0$ minimum lokalne

## Definicja

Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ maksimum lokalne, gdy:

$$\underset{r>0}{\exists} \ \underset{x \in S(x_0, r)}{\forall} \quad f(x) \leq f(x_0).$$



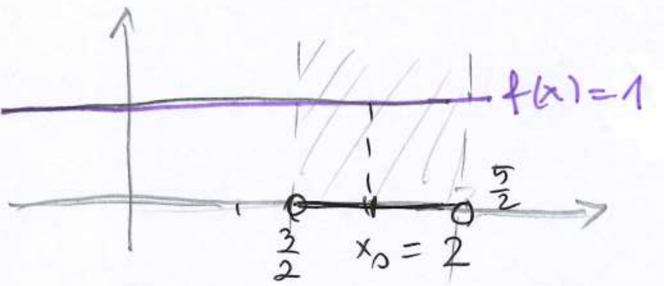

$f(x)$ ma w punktach $x_0, x_1$ maksima lokalne

**Przykład:**

$f(x) \equiv 1$, $x_0 = 2$

tzn.

$$f(x) = 1 \quad \forall_{x \in \mathbb{R}}$$




Możemy dobrać $r = \frac{1}{2}$ (lub dowolną inną liczbę – warunek i tak będzie spełniony)

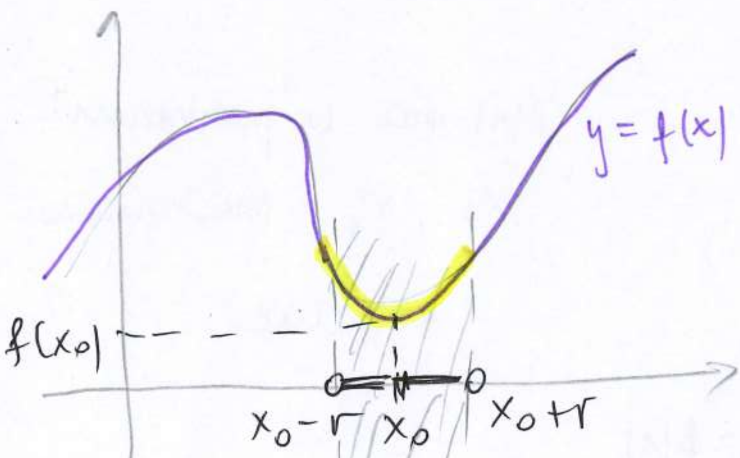
$$f(x_0) = 2$$

$$\forall_{x \in S(x_0, \frac{1}{2})} \quad f(x) = 1$$

**Definicja**

Funkcja $f$ ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ minimum lokalne właściwe, gdy:

$$\exists_{r > 0} \quad \forall_{x \in S(x_0, r)} \quad f(x_0) < f(x)$$




funkcja $f(x)$ ma w punkcie $x_0$ minimum lokalne właściwe

Definicja

Funkcja f ma w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$ maksimum lokalne właściwe, gdy

$$\underset{r>0}{\exists} \ \underset{x \in S(x_0, r)}{\forall} \quad f(x) < f(x_0).$$


funkcja f ma w punkcie $x_0$ maksimum lokalne właściwe

minimum lokalne
maksimum lokalne
minima lokalne właściwe
maksima lokalne właściwe

} ekstrema lokalne

Twierdzenie Fermata (warunek konieczny istnienia ekstremum)

Jeżeli funkcja f ma:

1) ekstremum lokalne w $x_0$
2) pochodną $f'(x_0)$

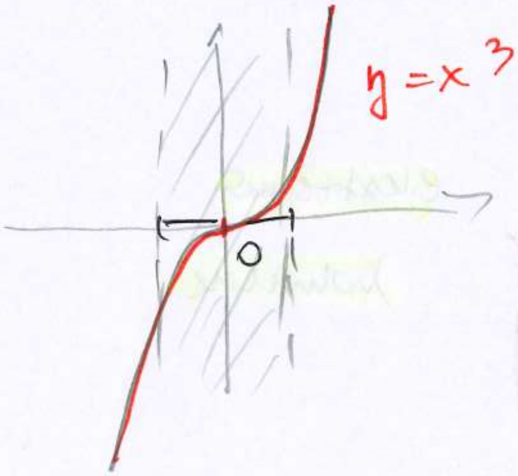
to: $f'(x_0) = 0$.

**UWAGA** Twierdzenie Fermata to implikacja w jedną stronę!!

$$\boxed{\begin{array}{l} f \text{ ma ekstremum lokalne w } x_0 \\ f \text{ ma pochodną } f'(x) \end{array}} \Longrightarrow \boxed{f'(x_0)=0}$$

Implikacja odwrotna NIE JEST prawdziwa.

Weźmy np. $f(x) = x^3$, mamy: $f'(x) = 3x^2$, zatem $f'(0) = 0$ ale $f$ nie ma ekstremum w zerze.




**Twierdzenie** (o lokalizacji ekstremów)

Funkcja MOŻE MIEĆ ekstrema lokalne JEDYNIE w punktach, w których $f'$ jest równe zero albo $f'$ nie istnieje.

**Przykład**: W jakich punktach może mieć ekstremum funkcja $f(x) = \ln(|x|+1)$.

$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad |x|+1 > 0$

$$f(x) = \ln(|x|+1) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ \ln(1-x), & x < 0 \end{cases} \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x > 0 \\ ?, & x = 0 \\ \frac{-1}{1-x} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} ?$$

$$f'(0^-) = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\ln(1-\Delta x)}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\frac{1}{1-\Delta x} \cdot (-1)}{1} = \underline{\underline{-1}}$$

$$f'(0^+) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(\Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\ln(\Delta x + 1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x + 1}}{1} = \underline{\underline{1}}$$

$f'(0)$ nie istnieje, zatem:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x+1}, & x > 0 \\ \text{nie ist.}, & x = 0 \\ \frac{-1}{1-x}, & x < 0 \end{cases}$$

Jedynym punktem, w którym $f$ MOŻE MIEĆ ekstremum jest $x_0 = 0$.

**Twierdzenie** (I warunek wystarczający na istnienie ekstremum)

Jeżeli: 1) $f'(x_0)=0$

2) $\underset{r>0}{\exists} \begin{cases} f'(x)>0 \ [<0] & \text{dla każdego } x \in S(x_0^-, r) \\ f'(x)<0 \ [>0] & \text{dla każdego } x \in S(x_0^+, r) \end{cases}$

to $f$ w $x_0$ ma maksimum [minimum] (lokalne właściwe).

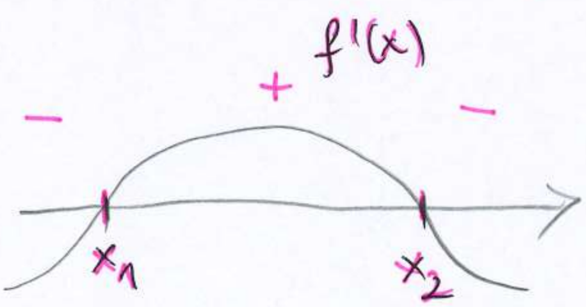
To samo twierdzenie zapisane trochę inaczej:

**Twierdzenie** (I warunek wystarczający na istnienie ekstremum)

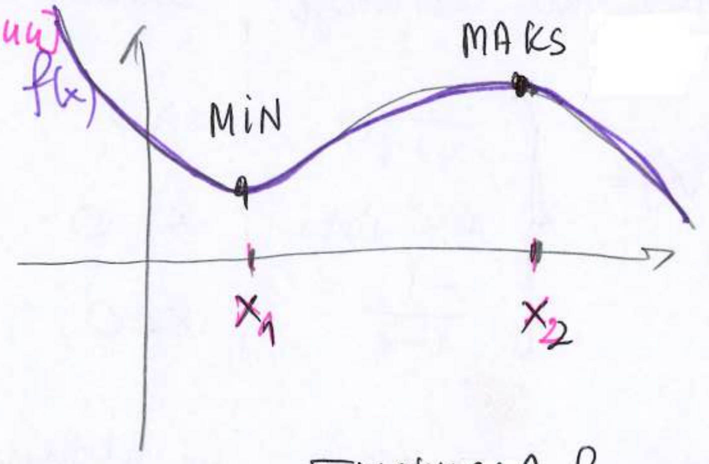
Jeżeli: 1) $f'(x_0)=0$

2) $\underset{r>0}{\exists} \begin{cases} f(x) \text{ rośnie [maleje] na } S(x_0^-, r) \\ f(x) \text{ maleje [rośnie] na } S(x_0^+, r) \end{cases}$

to $f$ ma w $x_0$ maksimum [minimum] (lokalne właściwe).




POCHODNA FUNKCJI f




FUNKCJA f

**Przykład** Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$f(x) = \frac{x}{1+x^2}$$

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(1+x^2) - x\cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{x^2+1-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

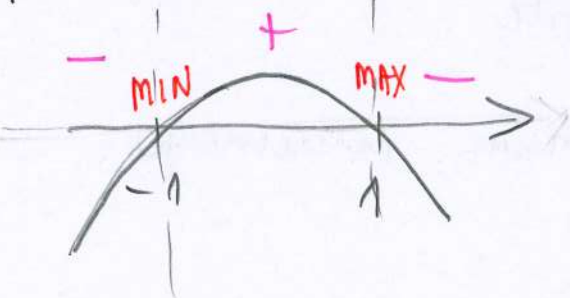
$D_{f'} = \mathbb{R}$

szukamy punktów "podejrzanych" o ekstrema:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0 \iff 1-x^2 = 0 \iff$$

$(\underline{\underline{x=1}} \vee \underline{\underline{x=-1}})$ punkty podejrzane o ekstremum

sprawdzamy podejrzenie, czyli badamy znaki pochodnej:




$$f'(x) > 0 \iff \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0 \iff$$

$$1-x^2 > 0 \iff x \in (-1, 1)$$

$$f'(x) < 0 \iff \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} < 0 \iff$$

$$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

| $x$ | $(-\infty, -1)$ | $-1$ | $(-1, 1)$ | $1$ | $(1, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | MIN | ↗ | MAX | ↘ |

„Przy okazji" mamy też monotoniczność funkcji.

## Twierdzenie (II warunek wystarczający na istnienie ekstremum)

Jeżeli: 1) $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

2) $f^{(n)}(x_0) < 0$ [>0]

3) $n$ jest parzyste

to $f$ w $x_0$ ma maksimum lokalne właściwe.
[minimum]

## Twierdzenie

Jeżeli: 1) $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$

2) $f^{(n)}(x_0) \neq 0$

3) $n$ jest nieparzyste

to $f$ w $x_0$ nie ma ekstremum lokalnego.

**Przykład** Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$f(x) = (x-5)e^x$$

$D_f = \mathbb{R}$

$f'(x) = e^x + (x-5)e^x = (1+x-5)e^x = (x-4)e^x$

$D_{f'} = \mathbb{R}$

$f'(x) = 0 \iff (x-4)e^x = 0 \iff x = 4$

$f''(x) = e^x + (x-4)e^x = (1+x-4)e^x = (x-3)e^x$

$f''(4) = (4-3)e^4 = e^4 > 0$

$n = 2$ - parzyste

zatem $f$ ma w punkcie $x_0 = 4$ minimum lokalne właściwe, czyli

$f_{min}(4) = -e^4$

Przykład: Wyznaczyć ekstrema funkcji

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

$D_f = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot -\frac{2x}{x^4} & , x \neq 0 \\ \text{obl. z def} & , x = 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \frac{+2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Obliczamy $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{2}{(\Delta x)^3} \cdot e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{1} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{(\Delta x)^3}$$ gorzej niż było, nie tędy droga,

jeszcze raz próbujemy obl. $f'(0)$:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot e^{-\frac{1}{(\Delta x)^2}} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \frac{1}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{\Delta x} \to \pm\infty}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \to \infty} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{+\frac{1}{\cancel{(\Delta x)^2}}}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{+2}{(\Delta x)^{\cancel{3}\,1}}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}} \cdot \frac{2}{\Delta x}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2e^{\frac{1}{(\Delta x)^2}}}$$

$$= \frac{0}{2 \cdot e^{\infty}} = \frac{0}{\infty} = 0$$

Czyli jedynym punktem podejrzanym o istnienie ekstremum jest $x_0 = 0$.

sprawdźmy to podejrzenie:

dla $x < 0$ mamy: $f'(x) = \underbrace{\frac{2}{\underbrace{x^3}_{<0}}}_{<0} \underbrace{e^{-\frac{1}{x^2}}}_{>0} < 0$

dla $x > 0$ mamy: $f'(x) = \frac{2}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} > 0$

| $x$ | $(-\infty, 0)$ | $0$ | $(0, \infty)$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | MIN | $\nearrow$ |

$f$ ma w punkcie $x_0 = 0$ minimum lokalne właściwe

$f_{min}(0) = 0$

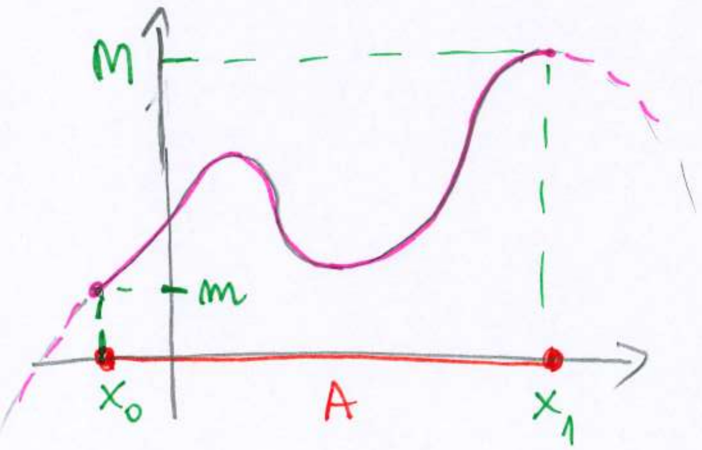
# Wartość największa i wartość najmniejsza funkcji na zbiorze

**Definicja** Liczba $m \in \mathbb{R}$ jest wartością najmniejszą funkcji $f$ na zbiorze $A \subset D_f$, gdy:

$$\exists_{x_0 \in A}\ f(x_0) = m \quad i \quad \forall_{x \in A}\ m \le f(x).$$

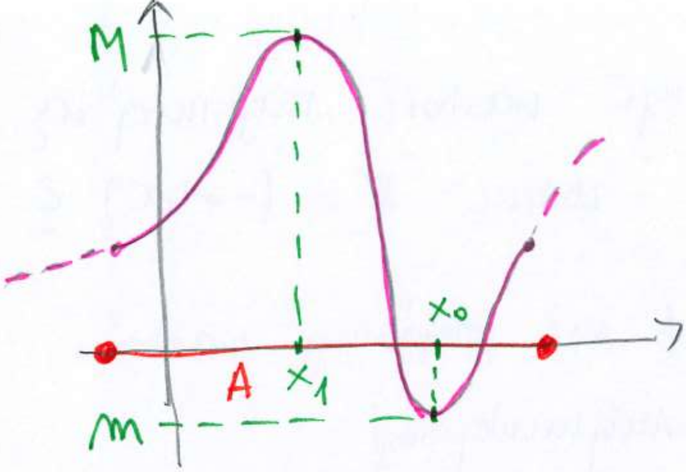
**Definicja** Liczba $M \in \mathbb{R}$ jest wartością największą funkcji $f$ na zbiorze $A \subset D_f$, gdy:

$$\exists_{x_1 \in A}\ f(x_1) = M \quad i \quad \forall_{x \in A}\ f(x) \le M.$$




$m$ – wartość najmniejsza funkcji na zbiorze $A$

$M$ – wartość największa funkcji na zbiorze $A$

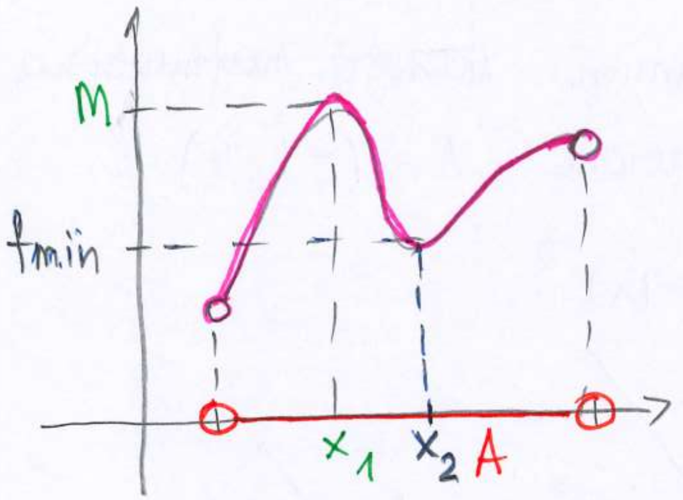



m – wartość najmniejsza funkcji f na zbiorze A

m – jest też wartością minimum

M – wartość największa funkcji f na zbiorze A

M – jest też wartością maksimum




f nie przyjmuje na zbiorze A wartości najmniejszej

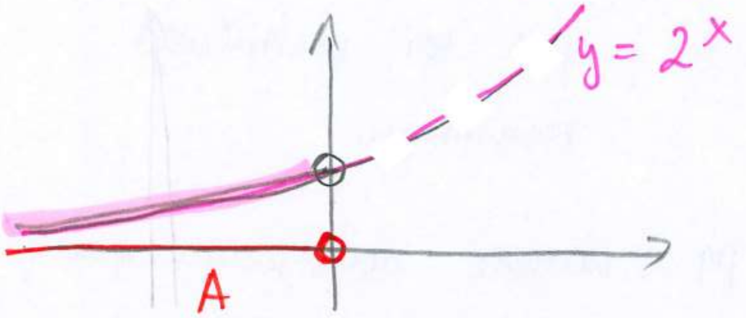
M – wartość największa funkcji f na zbiorze A

M – jest też wartością maksimum

Ponadto w punkcie $x_2$ funkcja f osiąga minimum, ale oczywiście nie jest to wartość najmniejsza.

wartość najmniejsza funkcji na zbiorze
wartość największa funkcji na zbiorze
} ekstrema globalne funkcji

Czy funkcja $f(x) = 2^x$ przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą na zbiorze $A = (-\infty, 0)$ ?



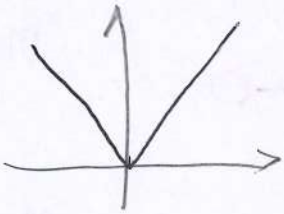

f nie przyjmuje wartości najmniejszej

f nie przyjmuje wartości największej

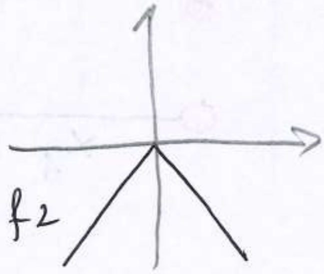
Czy funkcja $f(x) = 2 - |x|$ przyjmuje wartość najmniejszą oraz wartość największą na zbiorze $A = (-1, 4)$ ?

Jak narysować wykres $f(x) = 2 - |x|$ ?

$f_1(x) = |x|$

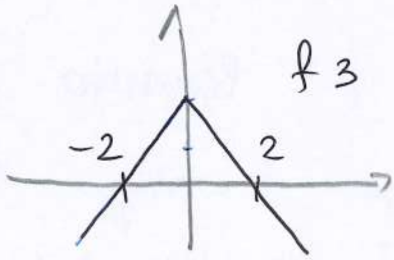


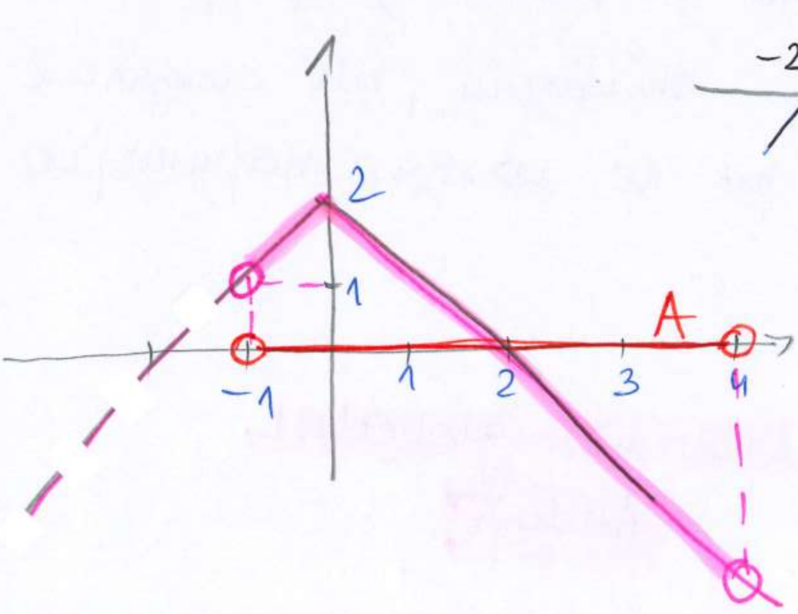

$f_2(x) = -f_1(x) = -|x|$




$f_3(x) = f_2(x) + 2 = -|x| + 2 =$

$= 2 - |x|$




f nie przyjmuje wartości najmniejszej na A

f przyjmuje wartość największą $M = 2$ na zbiorze A (dla $x = 0$)

# Algorytm szukania ekstremów globalnych na przedziale

Niech funkcja $f$ będzie ciągła na $[a,b]$ i niech ma pochodną (właściwą lub niewłaściwą) prawie wszędzie na $[a,b]$.

czyli na $[a,b]$ z wyjątkiem skończonej ilości punktów tego przedziału

1. rozwiązujemy równanie $f'(x)=0$ na przedziale $(a,b)$ rozwiązania te oznaczamy: $c_1, c_2, \ldots, c_n$
2. znajdujemy punkty, w których $f'(x)$ [pochodna właściwa] nie istnieje, punkty te oznaczamy: $d_1, d_2, \ldots, d_m$
3. obliczamy wartości funkcji $f$:
   - w punktach $c_1, c_2, \ldots, c_n$
   - w punktach $d_1, d_2, \ldots, d_m$
   - w punktach $a, b$ (czyli na końcach przedziału $[a,b]$)
4. spośród liczb:

$$f(a), f(b), f(c_1), \ldots, f(c_n), f(d_1), \ldots, f(d_m)$$

wybieramy liczbę najmniejszą i największą. Otrzymujemy w ten sposób wartości najmniejszą $m$ i największą $M$ funkcji $f$ na $[a,b]$.

**Przykład:** Znaleźć ekstrema globalne funkcji

$f(x) = x^3 \cdot |x+2|$ na przedziale $[-4, 1]$.

$$f(x) = \begin{cases} x^3(x+2), & x \in (-2, 1] \\ 0, & x = -2 \\ -x^3(x+2), & x \in [-4, -2) \end{cases} = \begin{cases} -x^3(x+2), & x \in [-4,-2) \\ 0, & x = -2 \\ x^3(x+2), & x \in (-2, 1] \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -x^4 - 2x^3, & x \in [-4,-2) \\ 0, & x = -2 \\ x^4 + 2x^3, & x \in (-2,1] \end{cases}$$

1.

$$f'(x) = \begin{cases} -4x^3 - 6x^2, & x \in [-4,-2) \\ ? \\ 4x^3 + 6x^2, & x \in (-2, 1] \end{cases}$$

$$f'(-2): \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(\Delta x - 2)^3(\Delta x - 2 + 2) - 0}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{-(\Delta x - 2)^3 \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = 8$$

$$\lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(-2+\Delta x) - f(-2)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x - 2)^3(\Delta x - 2 + 2) - 0}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{(\Delta x - 2)^3 \cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}} = -8$$

$f'(-2)$ nie istnieje $\qquad \boxed{d_1 = -2}$

$-4x^3 - 6x^2 = \underbrace{-x^2(4x+6)}_{w\ [-4,-2)}$ — nie ma tu punktów $c$

$0 \quad -\frac{3}{2}$

$4x^3 + 6x^2 = \underbrace{x^2(4x+6)}_{w\ (-2, 1]}$ — mamy $\boxed{c_1 = 0, \ c_2 = -\frac{3}{2}}$

$0 \quad -\frac{3}{2}$

$f(c_1) = f(0) = 0$

$f(c_2) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{27}{16}$

$f(d_1) = f(-2) = 0$

$f(a) = f(-4) = -64 \cdot |-2| = \underline{\underline{-128}} = m$

$f(b) = f(1) = \underline{\underline{3}} = M$

<u>Odp</u> $m = -128 = f(-4)$

$M = 3 = f(1)$