Różniczka funkcji

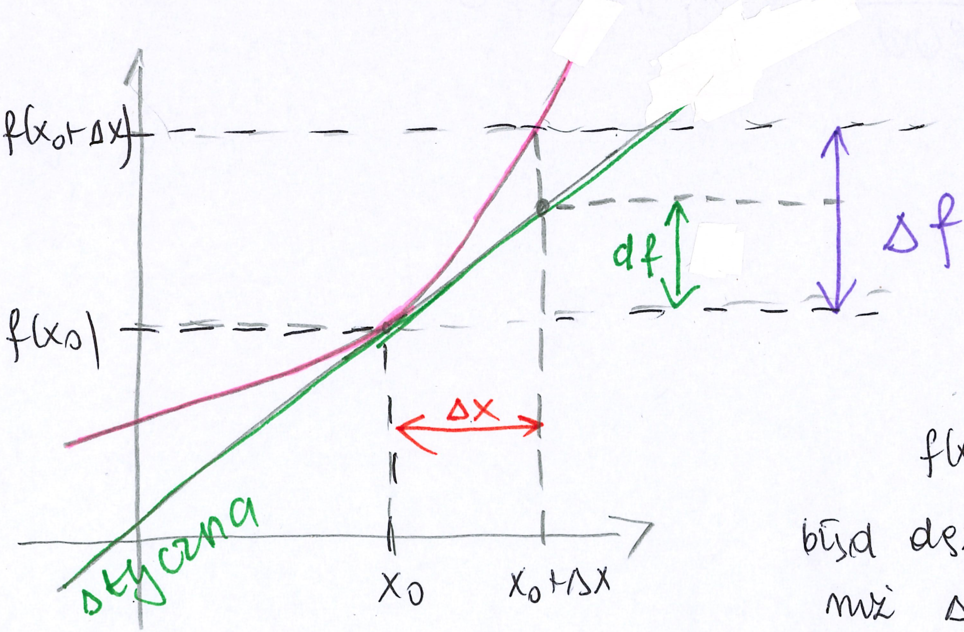
Definicja Załóżmy, że funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0. Różniczką funkcji f w punkcie x_0 nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(\Delta x) = f'(x_0)\cdot \Delta x .$$

Zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych

Jeśli f ma pochodną właściwą w punkcie x_0, to

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot \Delta x .$$



$\Delta f = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$

przyrost funkcji zastępujemy jej różniczką:

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot \Delta x$$

błąd dąży do zera szybciej niż Δx, tzn.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = 0$$

Przykład: Oblicz przybliżoną wartość wyrażenia

$$\sqrt[4]{15{,}96}$$

$f(x) = \sqrt[4]{x}$

$x_0 = 16$

$\Delta x = -0{,}04$

$$f(16 - 0{,}04) \approx f(16) + f'(16) \cdot (-0{,}04) =$$

$$= \sqrt[4]{16} + \frac{1}{4\sqrt[4]{16^3}} \cdot (-0{,}04) =$$

$$= 2 + \frac{1}{\cancel{4} \cdot 2^3} \cdot \left(-\frac{\cancel{4}}{100}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{8 \cdot 100} = 2 - \frac{1}{800}$$

$$= \frac{1599}{800} = 1{,}99875$$

Pochodne wyższych rzędów

Definicja Pochodną właściwą n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy indukcyjnie

$$f^{(n)}(x_0) = \left[f^{(n-1)}\right]'(x_0) \quad \text{dla } n \geq 2,$$

gdzie $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$. Ponadto przyjmujemy, że $f^{(0)}(x) = f(x)$.

Zwykle piszemy:

f'' zamiast $f^{(2)}$

f''' zamiast $f^{(3)}$ itd.

Możemy zbudować funkcję, której wartości w punktach x są równe $f^{(n)}(x)$, wtedy funkcję taką nazywamy pochodną n-tego rzędu funkcji f i oznaczamy $f^{(n)}$.

Przykład: Obliczymy f''' dla $f(x) = x\ln x$.

$f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

$f''(x) = (\ln x + 1)' = \frac{1}{x}$

$f'''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

Przykład Zbadać, czy istnieje $f''(0)$ dla funkcji

$$f(x)=\begin{cases} -x^2, & x<0 \\ x^2, & x\geq 0. \end{cases}$$

Badamy, czy istnieje $f'(0)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=?$$

Liczymy granice jednostronne:

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-(\Delta x)^{\cancel{2}}}{\cancel{\Delta x}}=\lim_{\Delta x\to 0^-}(-\Delta x)=0$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=0$$

ZATEM: $f'(0)=0$

$$f'(x)=\begin{cases} -2x, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 2x, & x>0 \end{cases}\left[=\begin{cases} -2x, & x<0 \\ 2x, & x\geq 0 \end{cases}\right]$$

Badamy, czy istnieje $f''(0)$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(0+\Delta x)-f'(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(\Delta x)-0}{\Delta x}=?$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f'(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=-2$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f'(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{2\cdot\cancel{\Delta x}}{\cancel{\Delta x}}=2$$

$\Rightarrow$ $f''(0)$ nie istnieje

Reguła de l'Hospitala

Twierdzenie (reguła de l'Hospitala dla symbolu $\frac{0}{0}$)

Jeżeli dla funkcji f i g zachodzi:

- $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, przy czym $\forall_{x \in S(x_0)}\ g(x) \neq 0$
- istnieje granica $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa)

to
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Twierdzenie to jest prawdziwe również dla granic jednostronnych oraz dla granic w $-\infty$ lub w $+\infty$.

Przykład

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 2x} = \frac{\ln \underbrace{\cos 0}_{=1}}{\ln \cos 0} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} \cdot (-\sin x)}{\frac{1}{\cos 2x} \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{+\sin x}{\cos x}}{\frac{+2 \sin 2x}{\cos 2x}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\operatorname{tg} x}{2 \operatorname{tg} 2x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{2 \frac{1}{\cos^2 2x} \cdot 2} = \frac{\frac{1}{1}}{2 \cdot \frac{1}{1} \cdot 2} = \frac{1}{4}$$

Twierdzenie (reguła de L'Hospitala dla symbolu $\frac{\infty}{\infty}$)

Jeżeli dla funkcji f i g zachodzi

- $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$
- istnieje granica $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} .$$

Twierdzenie to jest też prawdziwe dla granic jednostronnych oraz dla granic w $-\infty$ lub w $+\infty$.

Przykład

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \arcsin 5x}{\ln \arcsin x} = \frac{\ln 0^+}{\ln 0^+} = \left[\frac{-\infty}{-\infty}\right] \overset{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\arcsin 5x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \cdot 5}{\frac{1}{\arcsin x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}} =$$

$\left[\frac{0}{0}\right] = ?$ $\quad\quad\quad \to 5$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\arcsin x}{\arcsin 5x} \cdot \frac{5\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-25x^2}} = \frac{1}{5} \cdot 5 = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\arcsin x}{\arcsin 5x} = \left[\frac{0}{0}\right] \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1-25x^2}} \cdot 5} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{1-25x^2}}{5\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \underline{\frac{1}{5}}$$

Pewne przydatne tożsamości do zamiany symboli nieoznaczonych

$\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ stosujemy regułę de l'Hospitale

pozostałe symbole nieoznaczone

$$\underbrace{0 \cdot \infty} \qquad \underbrace{\infty - \infty} \qquad \underbrace{1^{\infty} \quad \infty^{0} \quad 0^{0}}$$

$$f \cdot g = \frac{f}{\frac{1}{g}}$$

dostajemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$

$$f - g = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}$$

dostajemy symbol nieoznaczony $\frac{0}{0}$

$$f^{g} = e^{g \ln f}$$

dostajemy symbol nieoznaczony $0 \cdot \infty$

Przykład

a) $$\lim_{x \to \infty} x^{2} e^{-x} = [\infty \cdot 0] = \lim_{x \to \infty} \frac{x^{2}}{e^{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=}$$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{e^{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{2}{e^{x}} = \frac{2}{\infty} = 0$$

b) $\underline{\lim\limits_{x\to\infty} (e^x - x^2)} = [\infty - \infty] = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{e^x}}{\frac{1}{e^x \cdot x^2}} = \left[\frac{0}{0}\right] \stackrel{H}{=}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2x}{x^4} + \frac{e^x}{e^{2x}}}{-\frac{e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x}{(e^x \cdot x^2)^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^3} + \frac{1}{e^x}}{-\frac{\cancel{e^x}(x+2)\cancel{x}}{e^{\cancel{2x}} \cdot x^{\cancel{4}3}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{e^x}}{\frac{x+2}{e^x \cdot x^3}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-2e^x + x^3}{\cancel{x^3 \cdot e^x}} \cdot \frac{\cancel{e^x \cdot x^3}}{x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2e^x + x^3}{x+2} =$$

$$= \frac{[-\infty + \infty]}{\infty} \quad ??$$

to obliczymy

$$\underline{\lim_{x\to\infty} (e^x - x^2)} = \lim_{x\to\infty} e^x\left(1 - \frac{x^2}{e^x}\right) = \infty \cdot \left(1 - \boxed{\left[\frac{\infty}{\infty}\right]}\right) =$$

$$\underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \stackrel{H}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

$$= \infty \cdot (1 - 0) = \infty \cdot 1 = \infty$$

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x} = [\infty^0] = \lim\limits_{x\to 0^+} x^{-\sin x} =$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\underbrace{-\sin x \cdot \ln x}}$ =

del.

$\overbrace{\lim\limits_{x\to 0^+} \sin x \cdot \ln x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \overset{H}{=}$

$= \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\cos x}{\sin^2 x}} = \lim\limits_{x\to 0} -\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\to 1}\frac{\sin x}{\cos x} = -1 \cdot \frac{0}{1} = 0$

$= e^{-0} = e^0 = 1$

BADANIE FUNKCJI

monotoniczność
ekstrema
wypukłość, wklęsłość
punkty przegięcia
plus: asymptoty, pewne granice

} wykres funkcji

Badanie monotoniczności funkcji

[słabo rosnąca] = [niemalejąca]

Definicja Funkcja f jest rosnąca na zbiorze $A \subset D_f$, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \right]$$

$\leq$

[słabo malejąca] = [nierosnąca]

Definicja Funkcja f jest malejąca na zbiorze $A \subset D_f$, gdy

$$\forall_{x_1, x_2 \in A} \left[x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \right]$$

$\geq$

Twierdzenie Niech I będzie dowolnym przedziałem. Jeśli dla każdego $x \in I$ funkcja f spełnia warunek

1) $f'(x) = 0$, to f jest stała na I,

2) $f'(x) > 0$, to f jest rosnąca na I,

3) $f'(x) \geq 0$, to f jest słabo rosnąca na I,

4) $f'(x) < 0$, to f jest malejąca na I,

5) $f'(x) \leq 0$, to f jest słabo malejąca na I.

UWAGA Gdy $f'(x) \geq 0$ dla każdego $x \in I$, przy czym równość $f'(x) = 0$ zachodzi tylko dla skończonej liczby punktów w I, to f rośnie na I. Podobnie jest z f. malejącą.

Przykład: Znaleźć przedziały monotoniczności funkcji

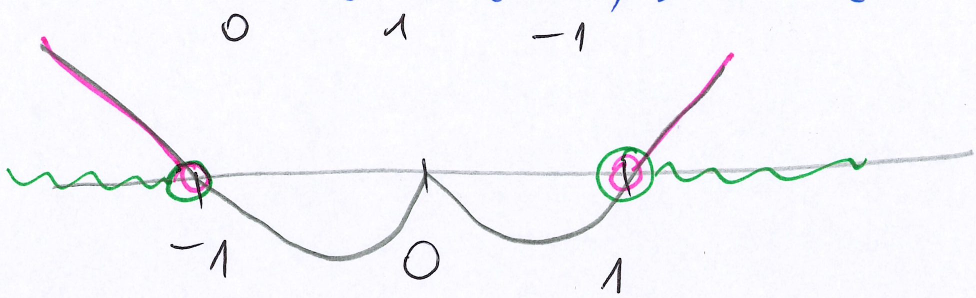
$$f(x)=\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{3}x^3+2.$$

$D_f=\mathbb{R}=(-\infty,\infty)$

$f'(x)=x^4-x^2$

$f'(x)>0 \iff x^4-x^2>0 \iff x^2(x^2-1)>0 \iff$

$x^2(x-1)(x+1)>0 \iff$



$x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$

$f \nearrow$ na przedziałach $(-\infty,-1)$, $(1,\infty)$

$f'(x)<0 \iff x\in(-1,0)\cup(0,1)$

$f \searrow$ na przedziale $(-1,1)$ – patrz UWAGA