Metody analityczne w elektrotechnice

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Szeregi funkcji ortogonalnych

Szeregi Fouriera

Szeregi funkcji ortogonalnych

Rozpatrzmy nieskończony zbiór funkcji: $\{\sin kx\} = \{\sin x, \sin 2x, \sin 3x, \ldots\}$, gdzie $x \varepsilon [0, \pi]$.
Udowodnimy, że na tym przedziale ortogonalne są każde dwie funkcje z tego zbioru.
W tym celu musimy obliczyć iloczyn skalarny:

$$\langle \sin kx | \sin nx \rangle_{[0,\pi]} = \int_0^\pi \sin kx \sin nx \,\mathrm{d}\,x, \quad k \neq n$$

Korzystamy ze wzoru na iloczyn sinusów:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Oznaczając $\alpha = kx,\ \beta = nx$ mamy

$$\int_0^\pi \sin kx \sin nx \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(kx-nx) - \cos(kx+nx)\right)\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(k-n)x - \cos(k+n)x\right)\mathrm{d}\,x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)x}{k-n} - \frac{\sin(k+n)x}{k+n}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(k-n)\pi}{k-n} - \frac{\sin(k+n)\pi}{k+n} - \sin 0 + \sin 0\right) = 0$$

Zatem dla $k \neq n:\ \langle \sin kx | \sin nx \rangle_{[0,\pi]} = 0$. Zbiór funkcji ortogonalnych na jakimś przedziale nazywany jest *bazą ortogonalną* na tym przedziale, czyli zbiór $\{\sin kx\}$ jest przykładem takiej bazy na przedziale $[0, \pi]$.

Szeregi funkcji ortogonalnych

Policzmy też normy wszystkich funkcji ze zbioru $\{\sin kx\}$ na przedziale $[0, \pi]$. Obliczenia przebiegają analogicznie jak w przykładzie 2. w punkcie 5.1.

$$\|\sin kx\|_{[0,\pi]}^2 = \int_0^\pi \sin^2 kx \,\mathrm{d}\,x, \quad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad \sin^2 kx = \frac{1}{2}(1 - \cos 2kx)$$

$$\int_0^\pi \sin^2 kx \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2kx)\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}\,x - \int_0^\pi \cos 2kx \,\mathrm{d}\,x\right) = \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2k}\sin 2kx\Big|_0^\pi\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2k}(\sin 2k\pi - \sin 0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Czyli ostatecznie:

$$\|\sin kx\|_{[0,\pi]} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Baza ortonormalna w przestrzeni funkcyjnej na przedziale $[0, \pi]$:

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin kx\right\} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Bazę w przestrzeni funkcyjnej nazywamy *zupełną*, gdy nie istnieją inne funkcje, które byłyby ortogonalne do wszystkich funkcji tej bazy. Można dowieźć, że powyższa baza ortonormalna jest też zupełna.

Szeregi funkcji ortogonalnych

Zapis wektora 3D za pomocą wersorów bazy kartezjańskiej: $\vec{V} = V_x\hat{i} + V_y\hat{j} + V_z\hat{k}$

Ten sam wektor w innej ortonormalnej bazie $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$: $\vec{V} = V_1\hat{e}_1 + V_2\hat{e}_2 + V_3\hat{e}_3$

kombinacja liniowa
wektorów bazowych

Niech $\{u_1(x),\ u_2(x),\ u_3(x), \ldots\}$ jest dowolną bazą ortogonalną (niekoniecznie ortonormalną) funkcji na przedziale $[a,\ b]$, a $f(x)$ – dowolną funkcją całkowalną określoną na tym samym przedziale. Przez analogię możemy napisać:

$$f(x) = a_1u_1(x) + a_2u_2(x) + a_3u_3(x) + \ldots$$

lub inaczej:

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)}$$

Szereg funkcji ortogonalnych

Szeregi funkcji ortogonalnych

Wyprowadzenie wzoru na współczynniki szeregu funkcji ortogonalnych

Mnożymy obie strony ostatniego wzoru przez $u_n(x)$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_k(x) \quad /\cdot u_n(x)$$

Obustronnie całkujemy

$$f(x)u_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_k(x)u_n(x) \quad / \int_a^b \ldots \mathrm{d}\,x$$

$$\int_a^b f(x)u_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k u_k(x)u_n(x)\right)\mathrm{d}\,x$$

Zamieniamy kolejność całki i sumy (całka sumy jest sumą całek)

$$\int_a^b f(x)u_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\int_a^b u_k(x)u_n(x)\,\mathrm{d}\,x$$

Zauważamy, że:

$$\int_a^b f(x)u_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\langle f\,|\,u_n\rangle \qquad \int_a^b u_k(x)u_n(x)\,\mathrm{d}\,x=\langle u_k\,|\,u_n\rangle=\begin{cases}0 & \text{dla} \quad k\neq n\\ \|u_n\|^2 & \text{dla} \quad k=n\end{cases}$$

Tu korzystamy z ortogonalności funkcji bazowych

co po podstawieniu daje:

$$\langle f\,|\,u_n\rangle=a_n\|u_n\|^2$$ czyli: $$a_n=\frac{\langle f\,|\,u_n\rangle}{\|u_n\|^2}=\frac{\int_a^b f(x)u_n(x)\,\mathrm{d}\,x}{\int_a^b |u_n(x)|^2\,\mathrm{d}\,x}$$

Szeregi funkcji ortogonalnych

Podsumowanie

Jeżeli dana jest baza ortogonalna zupełna funkcji $\{u_k(x)\}$ na przedziale $[a, b]$, to każdą całkowalną funkcję na tym przedziale można rozwinąć w szereg funkcji bazowych:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k u_k(x)$$

którego współczynniki wyrażają się wzorem:

$$a_k = \frac{\langle f | u_k \rangle}{\| u_k \|^2}$$

gdzie

$$\langle f | u_k \rangle = \int_a^b f(x) u_k(x) \,\mathrm{d}\, x$$

$$\| u_k \|^2 = \int_a^b | u_k(x) |^2 \,\mathrm{d}\, x$$

Szeregi funkcji ortogonalnych

Przykład

Niech $f(x) = 1$ na przedziale $[0, \pi]$ i $\{u_k(x)\} = \{\sin kx\}$. Wcześniej wykazaliśmy, że

$$\langle \sin kx | \sin nx \rangle_{[0,\pi]} = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq n \qquad \text{i} \qquad \|\sin kx\|_{[0,\pi]} = \sqrt{\pi/2}$$

Zatem

$$a_k = \frac{\langle 1 | \sin kx \rangle}{\|\sin kx\|^2} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi 1 \cdot \sin kx \, \mathrm{d}x = -\frac{2}{\pi}\frac{1}{k}\cos kx \Big|_0^\pi = -\frac{2}{\pi k}\big(\underbrace{\cos k\pi}_{=(-1)^k} - \underbrace{\cos 0}_{=1}\big) = \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{\pi k}$$

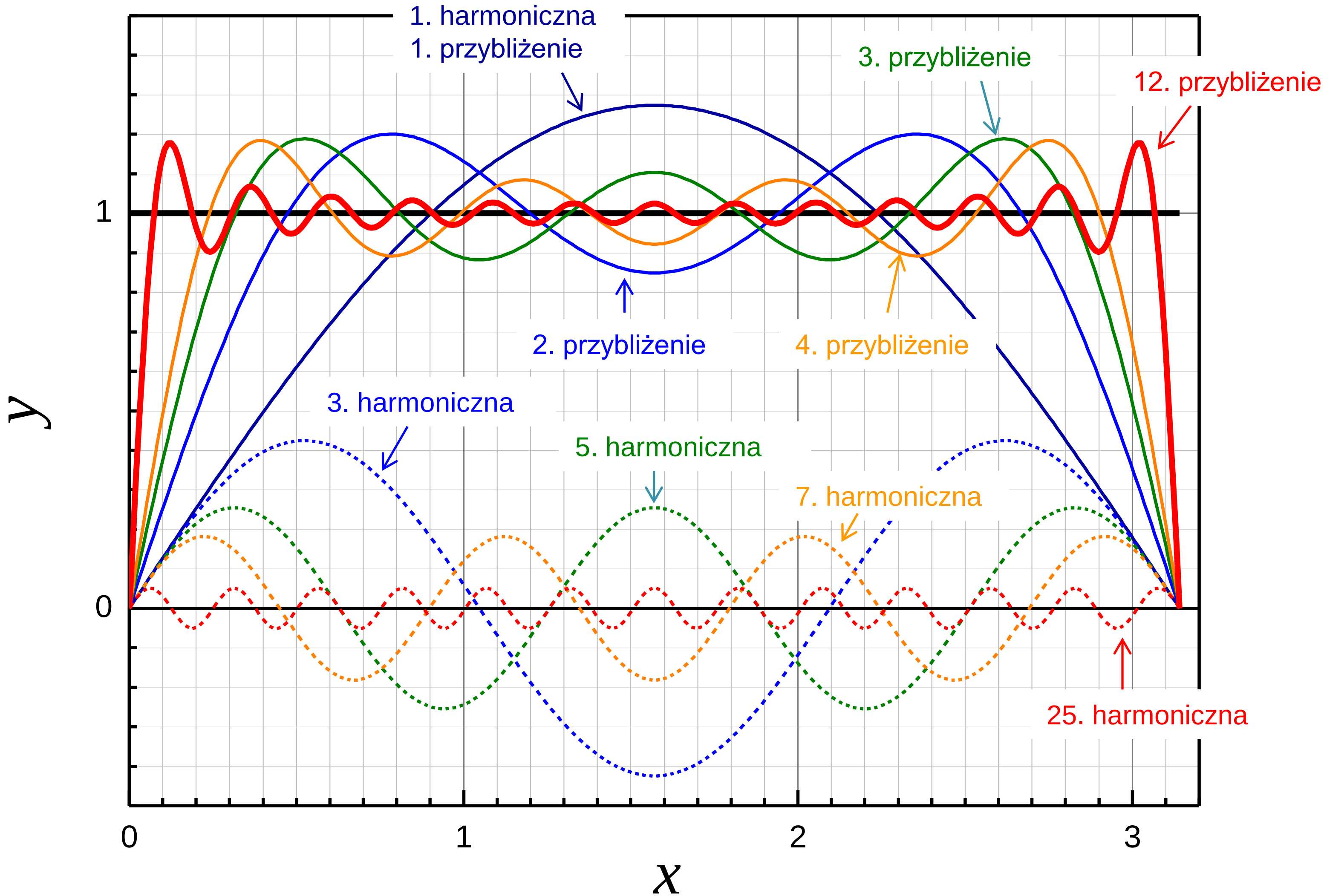
czyli

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\left(1-(-1)^k\right)}{\pi k} \sin kx =$$

$$= \frac{4}{\pi}\sin x + \frac{4}{3\pi}\sin 3x + \frac{4}{5\pi}\sin 5x + \frac{4}{7\pi}\sin 7x + \ldots$$

Szeregi funkcji ortogonalnych

Przykład



Szeregi Fouriera

Szereg sinusowy Fouriera

Niech $u_k(x) = \sin k\omega x, \quad x \in [0, l]$

Postulujemy, aby dla $k = 1, \quad x = l: \quad k\omega\, x = \pi \quad \Rightarrow \quad \omega = \dfrac{\pi}{l}$

czyli $u_k(x) = \sin \dfrac{k\pi}{l} x, \quad x \in [0, l]$

Analogicznie jak w punkcie 5.2. można wykazać, że zbiór tych funkcji tworzy bazę ortogonalną i obliczyć ich normę:

$$\left\langle \sin \frac{k\pi}{l} x \,\middle|\, \sin \frac{n\pi}{l} x \right\rangle_{[0,l]} = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq n \qquad\qquad \left\| \sin \frac{k\pi}{l} x \right\|_{[0,l]} = \sqrt{\frac{l}{2}}$$

Sinusowy szereg Fouriera dla funkcji $f(x)$ określonych na przedziale $[0, l]$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l} x \qquad\qquad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l} x \,\mathrm{d}x$$

Szeregi Fouriera

Szereg kosinusowy Fouriera

Niech $u_k(x) = \cos\frac{k\pi}{l}x, \quad x \in [0,\ l], \quad k = 0,1,2,...$

Analogicznie jak w punkcie 5.2. można wykazać, że $\left\langle \cos\frac{k\pi}{l}x \middle| \cos\frac{n\pi}{l}x \right\rangle_{[0,l]} = 0 \quad \text{dla} \quad k \neq n$

Dla $k = 0$: $u_0(x) = \cos 0 = 1$, zatem: $\| 1 \|^2_{[0,l]} = l$

Dla $k \neq 0$: $\left\| \cos\frac{k\pi}{l}x \right\|^2_{[0,l]} = \frac{l}{2}$

Kosinusowy szereg Fouriera dla funkcji $f(x)$ określonych na przedziale $[0,\ l]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi}{l}x$$

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,\mathrm{d}x \qquad a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

Szeregi Fouriera

Szereg trygonometryczny Fouriera

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right) + b_k \sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\right)$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\cos\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\mathrm{d}\,x, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\sin\left(\frac{2k\pi}{T}x\right)\mathrm{d}\,x, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Szeregi Fouriera

Analiza harmoniczna

Inna postać szeregu trygonometrycznego Fouriera

$$\boxed{f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\omega_k x + \varphi_k\right)} \qquad \omega_k \equiv \frac{2k\pi}{T}$$

Rozpisujemy wyrażenie pod symbolem sumy korzystając ze wzoru na sinus sumy

$$A_k \sin\left(\omega_k x + \varphi_k\right) = A_k \sin\varphi_k \cos\omega_k x + A_k \cos\varphi_k \sin\omega_k x$$

Porównujemy to z wyrażeniem pod symbolem sumy w zapisie z poprzedniego slajdu

$$A_k \sin\varphi_k \cos\omega_k x + A_k \cos\varphi_k \sin\omega_k x = a_k \cos\omega_k x + b_k \sin\omega_k x$$

czyli: $a_k = A_k \sin\varphi_k, \quad b_k = A_k \cos\varphi_k$

i stąd otrzymujemy dla $k > 0$:

$$\boxed{A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad \mathrm{tg}\,\varphi_k = \frac{a_k}{b_k} \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \mathrm{atan}\,2(a_k, b_k)}$$

oraz $\boxed{A_0 = \frac{a_0}{2}}$ ⟵ składowa stała

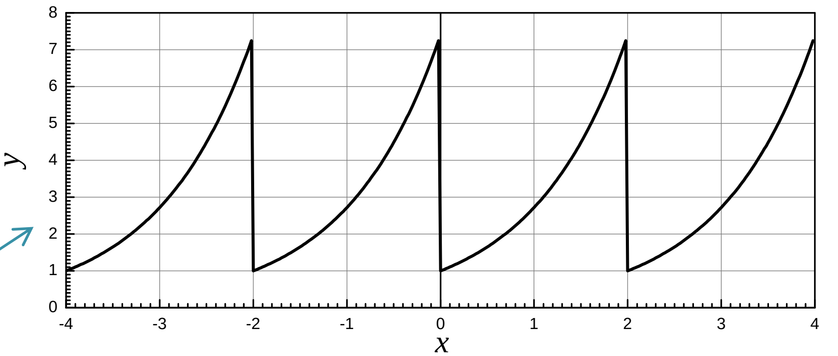
Szeregi Fouriera

Analiza harmoniczna - przykład

Niech $f(x) = \mathrm{e}^x$ dla $x \in [0, 2)$

i $f(x) = f(x+2)$ dla $x \in \Re$.

Z zapisu tego wynika, że $f(x)$ jest funkcją okresową o okresie $T=2$.



Obliczamy współczynniki a_k, b_k szeregu Fouriera przyjmując $x_0=0$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2}\int_0^2 \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\Big|_0^2 = \mathrm{e}^2 - 1$$

$$a_k = \int_0^2 \mathrm{e}^x \cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x \qquad b_k = \int_0^2 \mathrm{e}^x \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x$$

Zauważmy, że:

$$C \equiv \int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi x}\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x\left(\cos(k\pi x) + \mathrm{j}\sin(k\pi x)\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \cos(k\pi x)\,\mathrm{d}x + \mathrm{j}\int \mathrm{e}^x \sin(k\pi x)\,\mathrm{d}x$$

czyli $a_k = \mathrm{Re}\, C\Big|_0^2$, $\quad b_k = \mathrm{Im}\, C\Big|_0^2$

Szeregi Fouriera

Analiza harmoniczna - przykład

Obliczamy całkę C (pomijamy stałą całkowania) i rozpisujemy ją na część rzeczywistą i urojoną

$$C = \int \mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi x}\,\mathrm{d}\,x = \int \mathrm{e}^{(1+\mathrm{j}k\pi)x}\,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{1+\mathrm{j}k\pi}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{j}k\pi)x} = \frac{1-\mathrm{j}k\pi}{(1+\mathrm{j}k\pi)(1-\mathrm{j}k\pi)}\mathrm{e}^{x}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\pi x} =$$

$$\frac{1-\mathrm{j}k\pi}{1+(k\pi)^2}\left(\cos(k\pi x)+\mathrm{j}\sin(k\pi x)\right)\mathrm{e}^{x} =$$

$$= \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+(k\pi)^2}\left(\cos(k\pi x)+k\pi\sin(k\pi x)\right) + \mathrm{j}\frac{\mathrm{e}^{x}}{1+(k\pi)^2}\left(\sin(k\pi x)-k\pi\cos(k\pi x)\right)$$

Zatem

$$a_k = \operatorname{Re} C\Big|_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+(k\pi)^2}\left(\cos(k\pi x)+k\pi\sin(k\pi x)\right)\Bigg|_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{2}-1}{1+(k\pi)^2}$$

$$b_k = \operatorname{Im} C\Big|_0^2 = \frac{\mathrm{e}^{x}}{1+(k\pi)^2}\left(\sin(k\pi x)-k\pi\cos(k\pi x)\right)\Bigg|_0^2 = -\frac{k\pi\left(\mathrm{e}^{2}-1\right)}{1+(k\pi)^2}$$

Szeregi Fouriera

Analiza harmoniczna - przykład

Obliczamy składową stałą i amplitudy składowych harmonicznych (widmo amplitudowe)

$$A_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{e^2 - 1}{2} \approx 3{,}1945$$

$$A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = \sqrt{\left(\frac{e^2-1}{1+(k\pi)^2}\right)^2 + \left(\frac{-k\pi\left(e^2-1\right)}{1+(k\pi)^2}\right)^2} = \frac{e^2-1}{1+(k\pi)^2}\sqrt{1+(k\pi)^2} = \frac{e^2-1}{\sqrt{1+(k\pi)^2}}$$

Obliczamy fazy początkowe składowych harmonicznych (widmo fazowe)

$$\operatorname{tg}\varphi_k = \frac{a_k}{b_k} = \frac{\dfrac{e^2-1}{1+(k\pi)^2}}{-\dfrac{k\pi\left(e^2-1\right)}{1+(k\pi)^2}} = \frac{1}{-k\pi} \quad \Rightarrow \quad \varphi_k = \operatorname{atan}2(1,-k\pi) = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{k\pi}\right)$$

Po obliczeniach i podstawieniu do szeregu otrzymujemy:

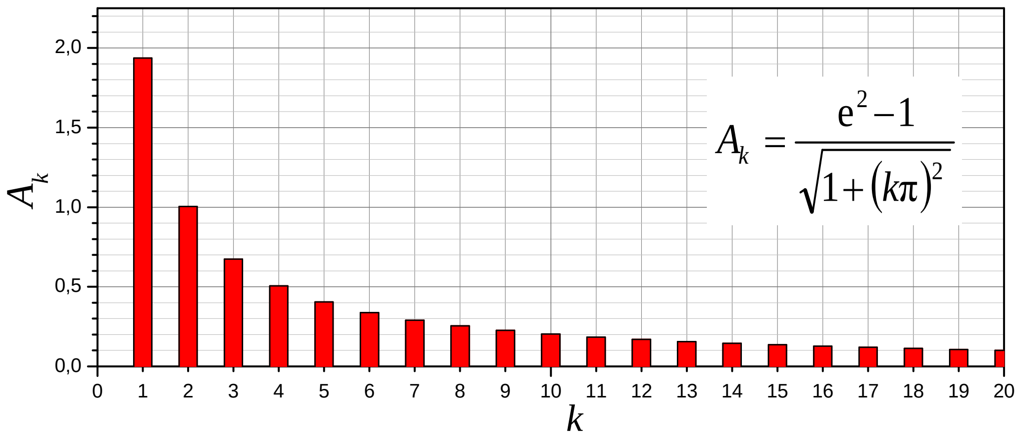
$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\omega_k x + \varphi_k\right) =$$

$$= 3{,}19 + 1{,}937\sin(\pi x + 2{,}83) + 1{,}004\sin(2\pi x + 2{,}98) + 0{,}674\sin(3\pi x + 3{,}04) + 0{,}507\sin(\pi x + 3{,}06) + \ldots$$

Szeregi Fouriera

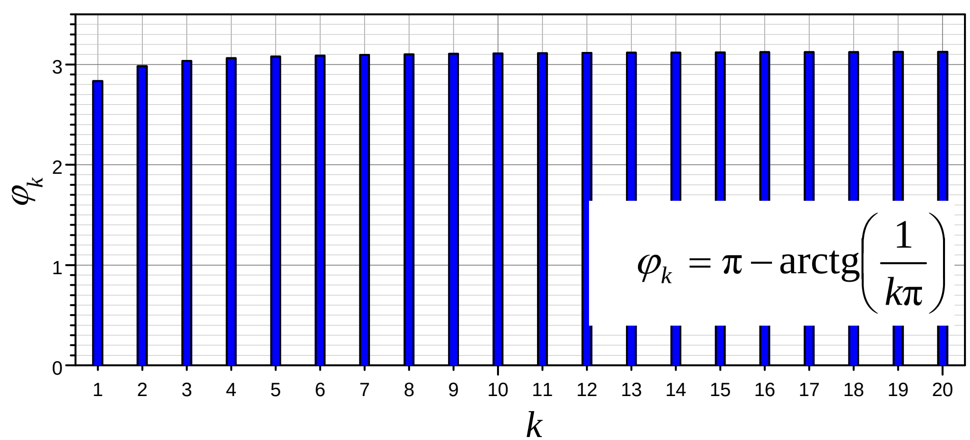
Analiza harmoniczna - przykład

Widmo amplitudowe



$$A_k = \frac{e^2 - 1}{\sqrt{1 + (k\pi)^2}}$$

Widmo fazowe



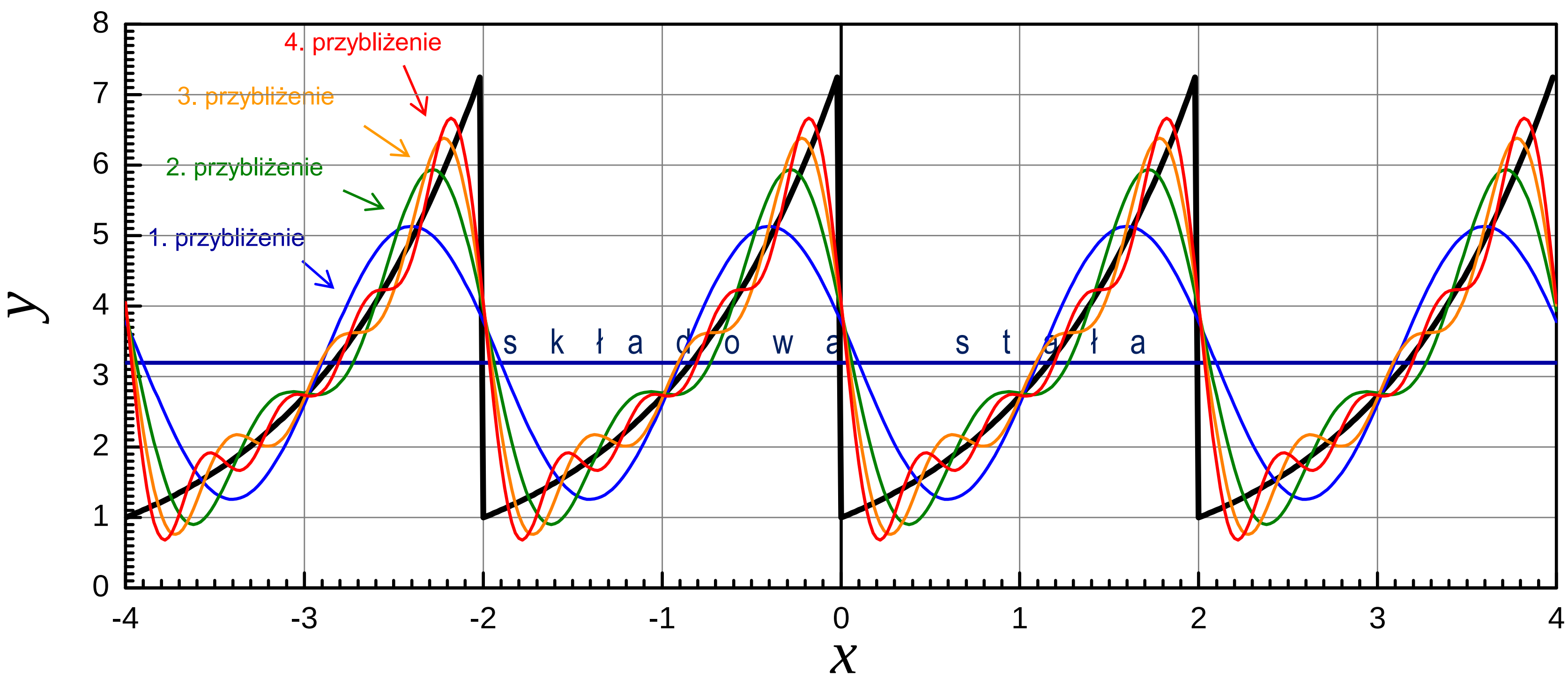
$$\varphi_k = \pi - \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{k\pi}\right)$$

Szeregi Fouriera

Analiza harmoniczna - przykład

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin\left(\omega_k x + \varphi_k\right) =$$

$$= 3{,}195 + 1{,}937\sin(\pi x + 2{,}83) + 1{,}004\sin(2\pi x + 2{,}98) + 0{,}674\sin(3\pi x + 3{,}04) + 0{,}507\sin(\pi x + 3{,}06) + \ldots$$



Szeregi Fouriera

Zespolona postać szeregu Fouriera

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_k x}$$

$$\omega_k \equiv \frac{2k\pi}{T}$$

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{x_0}^{x_0+T} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_k x}\,\mathrm{d}x, \quad k = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots$$

Związki współczynników C_k ze współczynnikami szeregu Fouriera w poprzednich zapisach

$$\left.\begin{aligned} C_k &= \frac{1}{2}(a_k - \mathrm{j}b_k) \\ C_{-k} &= \frac{1}{2}(a_k + \mathrm{j}b_k) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a_0 &= C_0 \\ a_k &= C_k + C_{-k} = 2\,\mathrm{Re}\,C_k \\ b_k &= \mathrm{j}(C_k - C_{-k}) = -2\,\mathrm{Im}\,C_k \end{aligned}$$

$$A_0 = \frac{C_0}{2}$$

$$A_k = 2|C_k|$$

$$\varphi_k = \mathrm{Arg}\,C_k - \frac{\pi}{2}$$

Szeregi Fouriera

Niektóre własności szeregu Fouriera

1. Dla funkcji parzystych ($f(x) = f(-x)$): $b_k=0$ (zeruje się część sinusowa szeregu) .

2. Dla funkcji nieparzystych ($f(x) = -f(-x)$): $a_k=0$ (zeruje się część kosinusowa szeregu).

3. W punktach nieciągłości funkcji x_0 szereg Fouriera jest zbieżny wartości:

$$f_0 = \frac{1}{2}\left(\lim_{x \to x_0^-} f(x) + \lim_{x \to x_0^+} f(x) \right)$$

czyli do średniej arytmetycznej z lewo- i prawo-stronnej granicy $f(x)$.

4. Jeżeli funkcja jest rozwijalna w szereg Fouriera, to $\lim_{k \to \infty} a_k = 0, \quad \lim_{k \to \infty} b_k = 0$

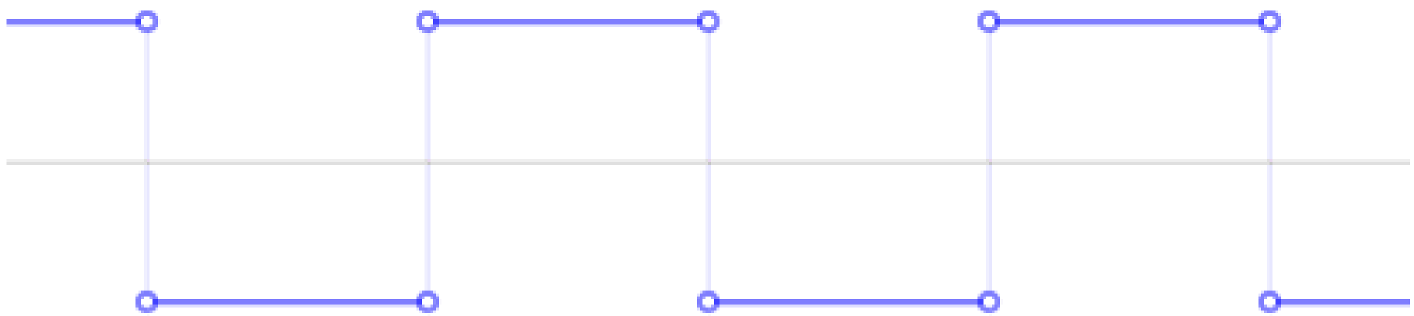
5. Równość Parsevala (wartość średnia kwadratu funkcji):

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(x)\,\mathrm{d}\,x = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k^2 + b_k^2\right) = A_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2$$

Np. średnia moc wydzielana w obwodzie elektrycznym w czasie T: $P = \frac{1}{T}\int_0^T Ri^2(t)\,\mathrm{d}\,t$

Szeregi Fouriera

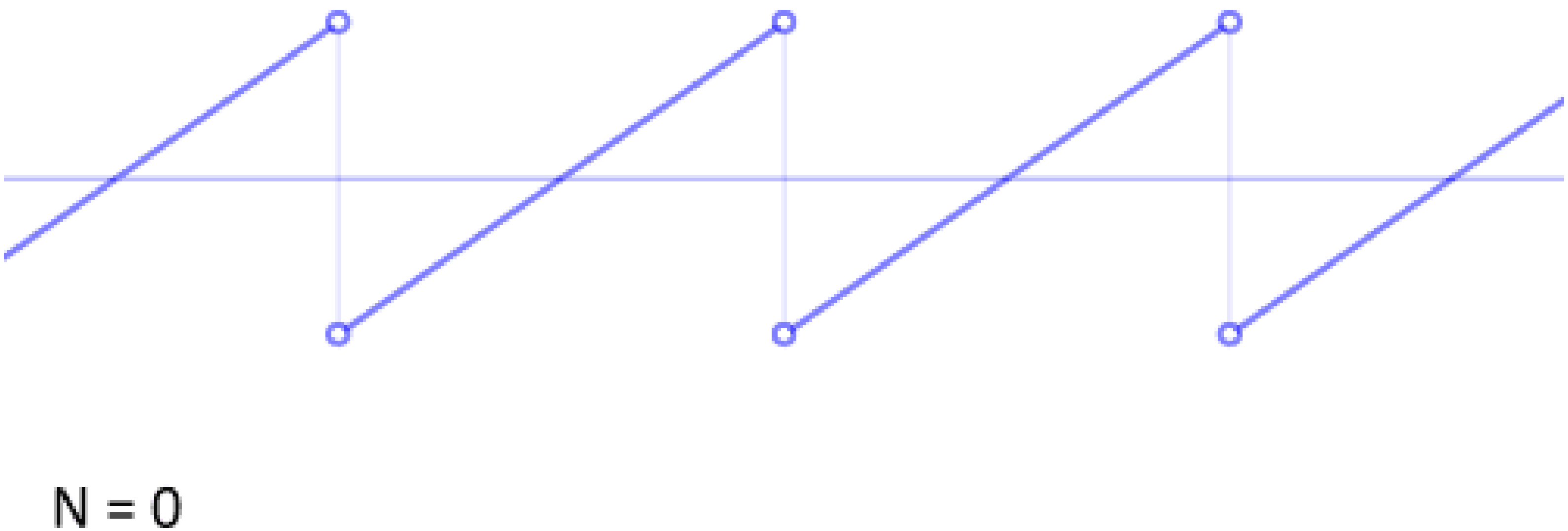
Przykłady na animacjach



N = 0

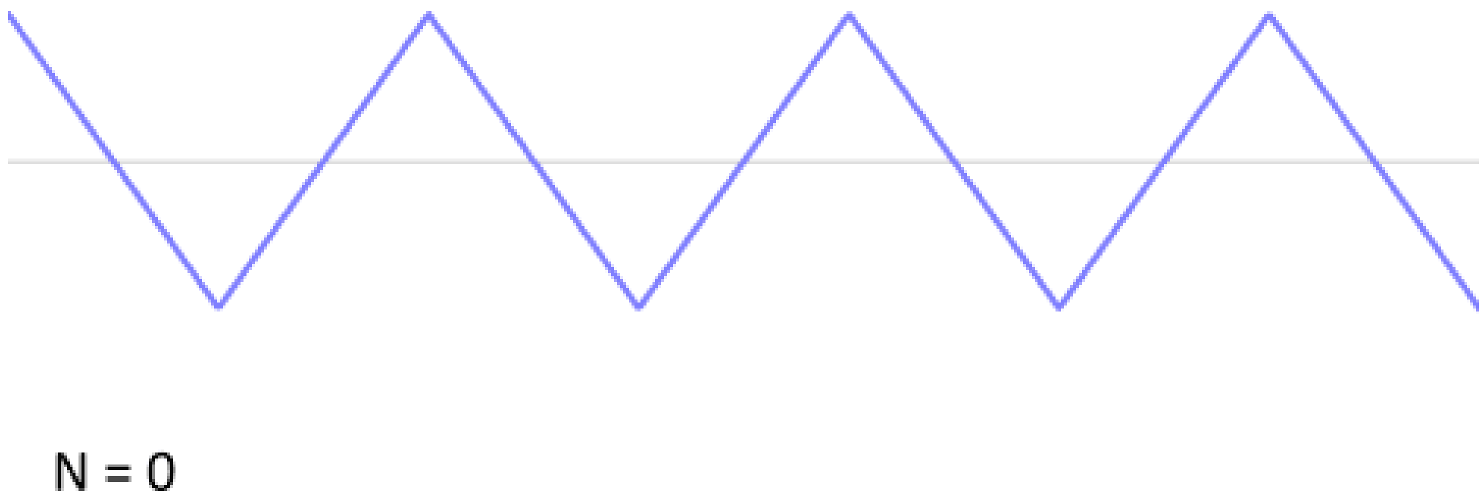
Szeregi Fouriera

Przykłady na animacjach



Szeregi Fouriera

Przykłady na animacjach



Szeregi Fouriera

Przykłady do samodzielnego rozwiązania

Rozwinąć w szereg Fouriera oraz obliczyć widmo amplitudowe i fazowe funkcji:

1. $f(t) = 6 - 2t$ dla $0 < t < 3$ i $f(t+3) = f(t)$

2. $f(t) = \left| 5\sin\frac{\pi}{3}t \right|$

3. $f(t) = 3e^{-2t}$ dla $-1 < t < 1$ i $f(t+2) = f(t)$