Metody analityczne w elektrotechnice

Stanisław Pawłowski
Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:
Budynek B pokój 301
Mail: spawlo@prz.edu.pl
Tel.: 17 865 1305

Elementy analizy funkcjonalnej

Elementy analizy funkcjonalnej

Wprowadzenie – analogie między funkcjami i wektorami

Wektory w przestrzeni 3D $\vec{V} = [V_x, \quad V_y, \quad V_z]$

Moduł: $$|\vec{V}| = \sqrt{V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2}}$$

Iloczyn skalarny: $$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{U}||\vec{V}|\cos\alpha = U_x V_x + U_y V_y + U_z V_z$$

Wnioski:

1. Gdy $\vec{U} \perp \vec{V} \quad (\alpha = 90^\circ) \;\Rightarrow\; \cos\alpha = 0 \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{U} \cdot \vec{V} = 0}$

Warunek ortogonalności wektorów

2. $\vec{V} \cdot \vec{V} = V_x^{\,2} + V_y^{\,2} + V_z^{\,2} = |\vec{V}|^2 \;\Rightarrow\; |\vec{V}| = \sqrt{\vec{V} \cdot \vec{V}}$

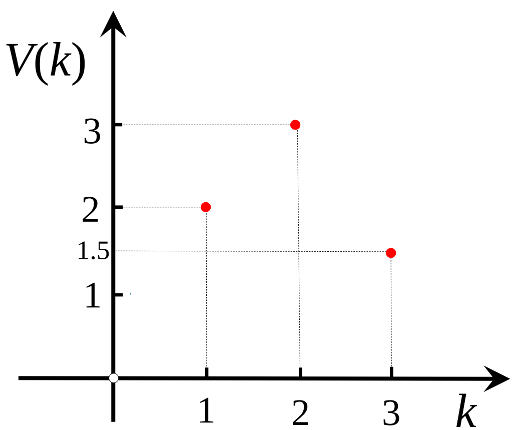
Elementy analizy funkcjonalnej
Wprowadzenie – analogie między funkcjami i wektorami

Wektor jako funkcja zmiennej dyskretnej

Niech: $V(1) \equiv V_x, \qquad V(2) \equiv V_y, \qquad V(3) \equiv V_z$

czyli: $\vec{V} = [V(1), \quad V(2), \quad V(3)] = V(k), \qquad k = 1, 2, 3, \qquad V \in \Re$

<u>Wniosek:</u> Wektory w przestrzeni 3D możemy formalnie uważać za funkcje, których dziedziną jest zbiór $\{1, 2, 3\}$, a przeciwdziedziną zbiór liczb rzeczywistych.



Wektor $\vec{V} = [2, \quad 3, \quad 1.5]$ jako funkcja przedstawiony na wykresie.

Elementy analizy funkcjonalnej

Wprowadzenie – analogie między funkcjami i wektorami

Moduł i iloczyn skalarny wektora w zmodyfikowanym zapisie

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\left(V(1)\right)^2 + \left(V(2)\right)^2 + \left(V(3)\right)^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{3}\left(V(k)\right)^2}$$

$$\vec{U}\cdot\vec{V} \equiv \langle U | V \rangle = U(1)V(1) + U(2)V(2) + U(3)V(3) = \sum_{k=1}^{3} U(k)V(k)$$

$\uparrow$

Symbol Diraca na oznaczenie iloczynu skalarnego („braket”)

Związek modułu z iloczynem skalarnym w zmodyfikowanym zapisie:

$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{\langle V | V \rangle}$$

Elementy analizy funkcjonalnej

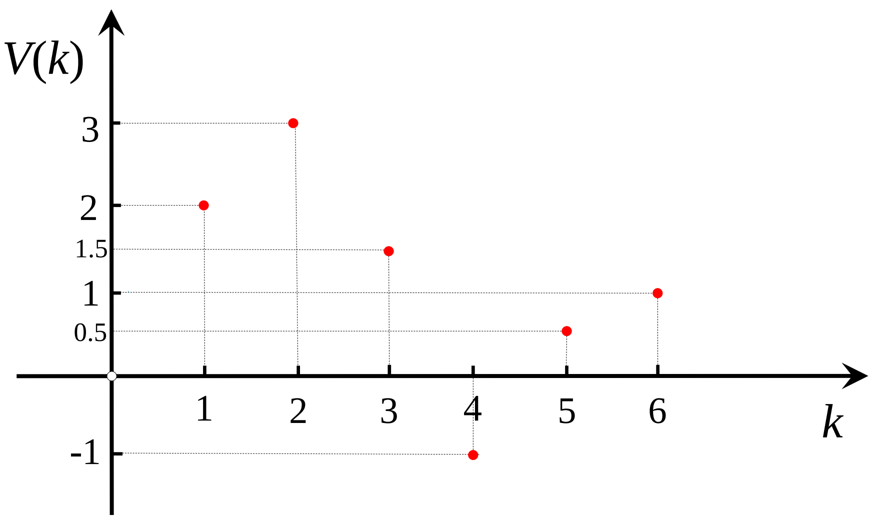
Wprowadzenie – analogie między funkcjami i wektorami

Wektory w przestrzeni *N*-wymiarowej jako funkcje

$$\vec{V} = [V(1), V(2), \dots, V(N)] = V(k), \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad V \in \Re$$

Moduł:
$$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{(V(1))^2 + (V(2))^2 + \dots + (V(k))^2} = \sqrt{\sum_{k=1}^{N} (V(k))^2}$$

Iloczyn skalarny:
$$\langle U | V \rangle = U(1)V(1) + U(2)V(2) + \dots + U(N)V(N) = \sum_{k=1}^{N} U(k)V(k)$$



Wektor w przestrzeni 6-wymiarowej przedstawiony na wykresie.

$$\vec{V} = [2, \quad 3, \quad 1.5, \quad -1, \quad 0.5, \quad 1]$$

Elementy analizy funkcjonalnej
Wprowadzenie – analogie między funkcjami i wektorami

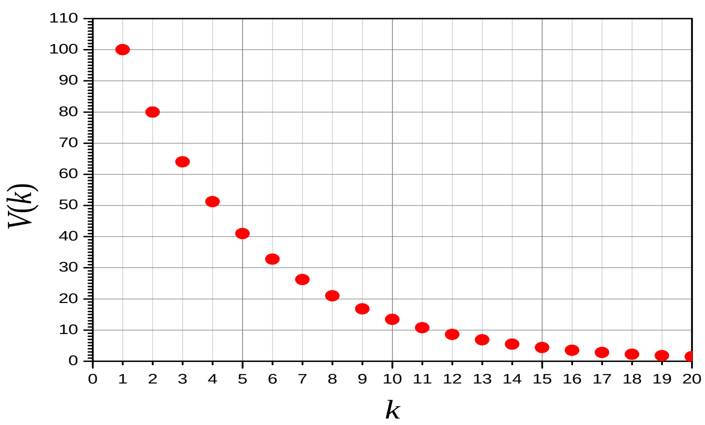
Wektory w przestrzeni nieskończenie wymiarowej (ciągi)

$$\vec{V} = [V(1), V(2), \ldots, V(k), \ldots] = V(k), \qquad k = 1, 2, 3, \ldots \qquad V \in \Re$$

Moduł: $$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{(V(1))^2 + (V(2))^2 + \ldots + (V(k))^2 + \ldots} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} (V(k))^2}$$

Iloczyn skalarny:

$$\langle U | V \rangle = U(1)V(1) + U(2)V(2) + \ldots + U(k)V(k) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} U(k)V(k)$$



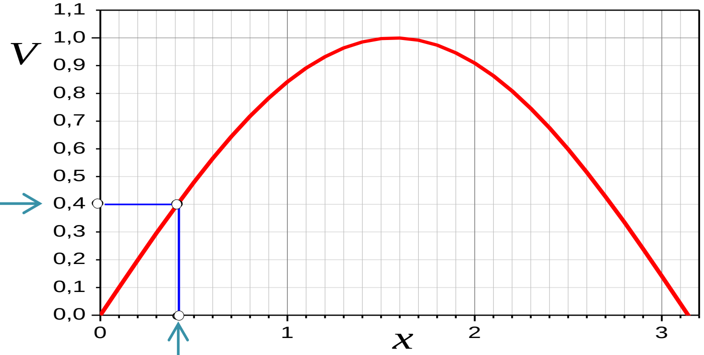
Wektor w przestrzeni nieskończeniewymiarowej przedstawiony na wykresie (ciąg geometryczny o ilorazie $q = 0{,}8$)

Elementy analizy funkcjonalnej
Wprowadzenie – analogie między funkcjami i wektorami

Funkcje jako wektory

$$V = V(x), \quad x \in \Re, \quad V \in \Re$$

wartość funkcji =
= wartość współrzędnej
wektora



argument funkcji = „numer” współrzędnej wektora

Norma funkcji $V(x)$ na przedziale $[x_1, x_2]$:

$$\|V\| = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} V^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Iloczyn skalarny funkcji $U(x)$, $V(x)$ na przedziale $[x_1, x_2]$:

$$\langle U | V \rangle = \int_{x_1}^{x_2} U(x)V(x)\,\mathrm{d}x$$

Funkcje $U(x)$, $V(x)$ nazywamy ortogonalnymi na przedziale $[x_1, x_2]$ gdy:

$$\langle U | V \rangle = 0$$

Elementy analizy funkcjonalnej

Podstawowe pojęcia analizy funkcjonalnej

Funkcjonał – jest to odwzorowanie zbioru funkcji lub wektorów (w ścisłym znaczeniu elementów dowolnej przestrzeni wektorowej) na zbiór liczb.

Przykładami funkcjonałów określonym na zbiorze funkcji mogą być całka oznaczona, norma funkcji, iloczyn skalarny funkcji.

Niech $f(x)$, $g(x)$ są funkcjami rzeczywistymi zmiennej rzeczywistej określonymi na przedziale $[x_1, x_2]$

Iloczynem skalarnym funkcji $f(x)$, $g(x)$ nazywamy:

$$\langle f | g \rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x$$

Normą (średniokwadratową, euklidesową) funkcji $f(x)$ nazywamy:

$$\| f \| = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} f^2(x) \,\mathrm{d}x}$$

Funkcje $f(x)$, $g(x)$ nazywamy ortogonalnymi, gdy

$$\langle f | g \rangle = \int_{x_1}^{x_2} f(x) g(x) \,\mathrm{d}x = 0$$

Elementy analizy funkcjonalnej
Podstawowe pojęcia analizy funkcjonalnej

Uogólnienie na funkcje zespolonych zmiennej rzeczywistej

Niech $f(x)$, $g(x)$ są funkcjami zmiennej rzeczywistej o wartościach zespolonych określonymi na przedziale $[x_1, x_2]$

Iloczynem skalarnym funkcji $f(x)$, $g(x)$ nazywamy:

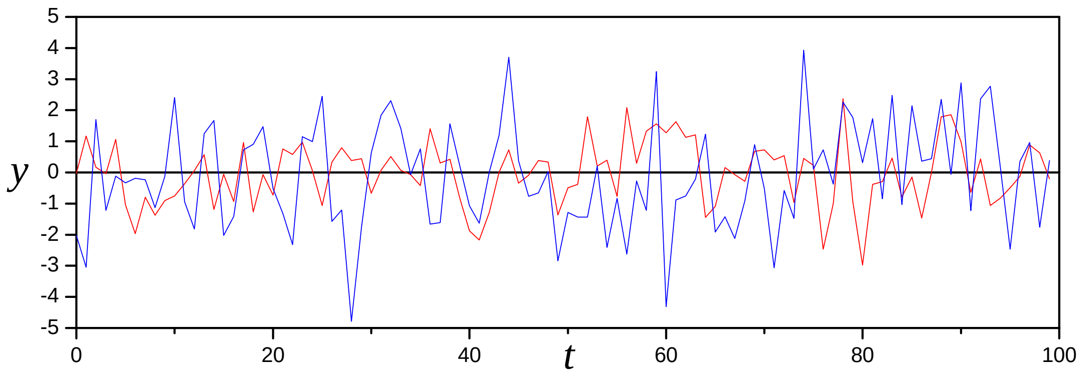
$$\langle f | g \rangle = \int_{x_1}^{x_2} f^*(x) g(x) \,\mathrm{d}x \qquad \Rightarrow \qquad \langle f | g \rangle = \langle g | f \rangle^*$$

Normą (średniokwadratową, euklidesową) funkcji $f(x)$ nazywamy:

$$\| f \| = \sqrt{\langle f | f \rangle} = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x}$$

Elementy analizy funkcjonalnej
Przykłady zastosowania

Porównywanie sygnałów



Na wykresie przedstawione są dwa przebiegi czasowe pewnych sygnałów (mogą to być np. fragmenty zapisu dźwięku z mikrofonu). Na pierwszy rzut oka widać, że sygnał zaznaczony na niebiesko jest „większy” od czerwonego, ale co to dokładnie znaczy? Zauważmy, że nie jest tak, że wartość bezwzględna sygnału niebieskiego jest wszędzie większa od wartości bezwzględnej sygnału czerwonego; są miejsca gdzie jest odwrotnie. Czy można nadać tym sygnałom jakąś miarę, dzięki której będzie można je obiektywnie porównać? Pozornie mogłoby się wydawać, że taką miarą może być zwyczajna średnia wartość sygnału, ale zauważmy, że tutaj oba sygnały oscylują wokół zera i ich średnia też będzie bliska zeru (niewykluczone, że średnia czerwonego sygnału mogłaby się okazać większa niż niebieskiego).

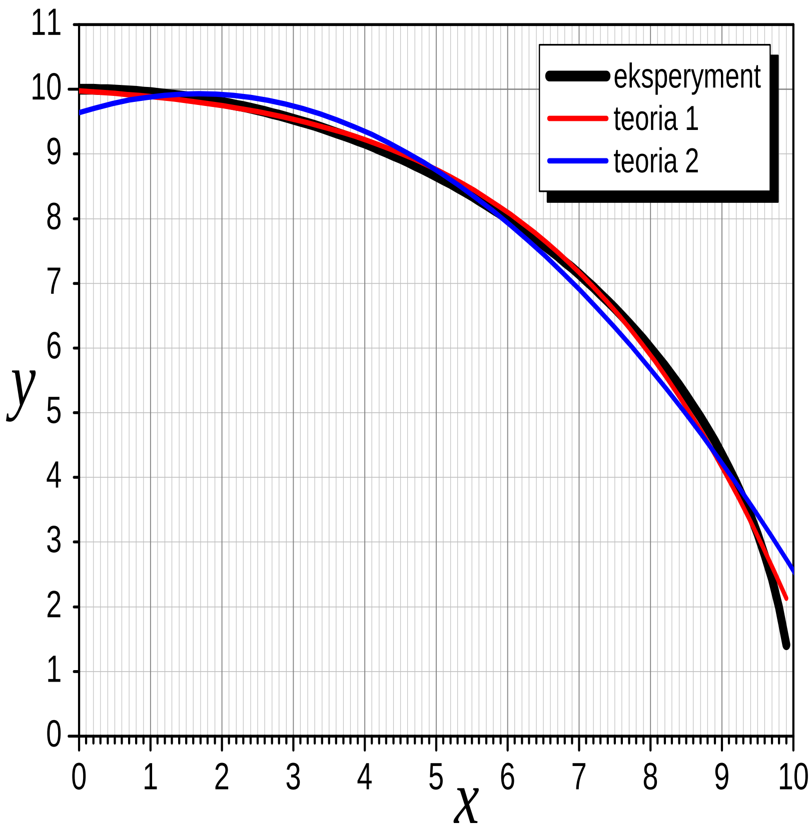
Miarą pozwalającą porównać te sygnały jest właśnie ich średniokwadratowa norma, podobnie jak moduł wektora jest miarą pozwalającą porównywać wielkości wektorów. Norma średniokwadratowa sygnału niebieskiego jest na pewno wyraźnie większa niż czerwonego.

Dzieląc normę średniokwadratową przez długość przedziału całkowania otrzymujemy tzw. *średnią kwadratową* funkcji na tym przedziale.

Elementy analizy funkcjonalnej

Przykłady zastosowania

Porównywanie krzywych doświadczalnych z teoretycznymi



Na wykresie przedstawione są trzy krzywe przedstawiające zależność dwóch wielkości fizycznych – x i y. Linia czarna jest krzywą doświadczalną, linie czerwona i niebieska są krzywymi wykreślonymi na podstawie dwóch konkurencyjnych teorii. Wizualna ocena wskazuje, że lepiej w krzywą doświadczalną „wpasowuje" się linia czerwona, ale jak to ocenić obiektywnie?
Oceny takiej można dokonać obliczając normy z różnicy między krzywą pomiarową, a krzywymi teoretycznymi, czyli

$$\left\| f_{\mathrm{D}} - f_{\mathrm{T}} \right\| = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} \left(f_{\mathrm{D}}(x) - f_{\mathrm{T}}(x) \right)^2 \mathrm{d}\, x}$$

gdzie f_{D} to funkcja opisująca krzywą doświadczalną, a f_{T} – teoretyczną. Oczywiście im ta norma będzie mniejsza, tym lepiej (gdyby krzywe się pokryły idealnie to norma ta równałaby się zeru).

Elementy analizy funkcjonalnej

Przykłady zastosowania

Ostatni przykład warto przeanalizować trochę dokładniej. Podnieśmy wzór z poprzedniego slajdu obustronnie do kwadratu i rozpiszmy prawą stronę (po drodze korzystamy ze wzoru skróconego mnożenia na kwadrat różnicy):

$$\left\| f_{\mathrm{D}} - f_{\mathrm{T}} \right\|^2 = \int_{x_1}^{x_2} \left(f_{\mathrm{D}}(x) - f_{\mathrm{T}}(x) \right)^2 \mathrm{d}\,x = \int_{x_1}^{x_2} \left(f_{\mathrm{D}}^2(x) + f_{\mathrm{T}}^2(x) - 2 f_{\mathrm{D}}(x) f_{\mathrm{T}}(x) \right) \mathrm{d}\,x =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} f_{\mathrm{D}}^2(x)\,\mathrm{d}\,x + \int_{x_1}^{x_2} f_{\mathrm{T}}^2(x)\,\mathrm{d}\,x - 2\int_{x_1}^{x_2} f_{\mathrm{D}}(x) f_{\mathrm{T}}(x)\,\mathrm{d}\,x = \left\| f_{\mathrm{D}} \right\|^2 + \left\| f_{\mathrm{T}} \right\|^2 - 2\left\langle f_{\mathrm{D}} \middle| f_{\mathrm{T}} \right\rangle$$

Jak widać z powyższego wyprowadzenia, kwadrat normy z różnicy funkcji można zapisać jako sumę kwadratów norm z obu funkcji minus podwojony iloczyn skalarny tych funkcji. Jeżeli funkcje są sobie bliskie (jak na wykresie na poprzednim slajdzie) to ich normy też niewiele się od siebie różnią i o jakości przybliżenia decyduje ostatni składnik, czyli iloczyn skalarny. Przybliżenie jest więc tym lepsze im iloczyn skalarny jest większy (bo przed nim stoi znak minus). Oznacza to, że sam iloczyn skalarny może być również dobrą miarą „bliskości” dwóch funkcji.

(Oczywiście wzór ten jest słuszny także w algebrze wektorów i łatwo go skojarzyć ze znanym w geometrii wzorem kosinusów dla trójkątów)

Elementy analizy funkcjonalnej

Przykłady rachunkowe

Przykład 1.

Obliczmy normy funkcji $f(x) = x$ na przedziałach $[0, 1]$, $[1, 2]$ i $[0, 2]$. Ponieważ normy tej samej funkcji na różnych przedziałach nie muszą być sobie równe, więc dla ich odróżnienia, u dołu symbolu normy należy zaznaczać dodatkowo o jaki przedział chodzi. Aby uniknąć kłopotliwego i zaburzającego przejrzystość pisania każdej fazy obliczeń pod pierwiastkiem obliczamy najpierw kwadraty tych norm, a później wyciągamy pierwiastek.

$$\|x\|_{[0,1]}^2 = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3} \quad \Longrightarrow \quad \|x\|_{[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\|x\|_{[1,2]}^2 = \int_1^2 x^2 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}x^3\Big|_1^2 = \frac{1}{3}(8-1) = \frac{7}{3} \quad \Longrightarrow \quad \|x\|_{[1,2]} = \sqrt{\frac{7}{3}}$$

$$\|x\|_{[0,2]}^2 = \int_0^2 x^2 \,\mathrm{d}\,x = \frac{1}{3}x^3\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(8-0) = \frac{8}{3} \quad \Longrightarrow \quad \|x\|_{[0,2]} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$$

Zwróćmy uwagę, że $\|x\|_{[0,2]}^2 = \|x\|_{[0,1]}^2 + \|x\|_{[1,2]}^2$ ale $\|x\|_{[0,2]} < \|x\|_{[0,1]} + \|x\|_{[1,2]}$

Nietrudno wykazać, że analogiczne zależności obowiązują dla norm średniokwadratowych z dowolnej funkcji.

Przykład 2.

Obliczmy normę funkcji $f(x) = \sin x$ na przedziale $[0, \pi]$. Tak jak poprzednio obliczymy najpierw kwadrat normy.

$$\|\sin x\|^2_{[0,\pi]} = \int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x$$

Całkę tę najłatwiej obliczyć korzystając ze wzoru trygonometrycznego na cosinus kąta podwojonego:

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$$

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

Zatem:

$$\int_0^\pi \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1 - \cos 2x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int_0^\pi \mathrm{d}x - \int_0^\pi \cos 2x \,\mathrm{d}x\right) = \frac{1}{2}\left(x\Big|_0^\pi - \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^\pi\right) = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{1}{2}(\sin 2\pi - \sin 0)\right) = \frac{\pi}{2}$$

Czyli ostatecznie: $\|\sin x\|_{[0,\pi]} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Elementy analizy funkcjonalnej
Przykłady rachunkowe

Przykład 3.

Obliczmy iloczyn skalarny funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \cos x$ na przedziale $[0, \pi/2]$.

$$\langle f | g \rangle = \langle \sin x | \cos x \rangle_{[0,\pi/2]} = \int_0^{\pi/2} \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$$

Tę całkę można obliczyć prosto przez podstawienie

$$\int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} u = \sin x \\ \mathrm{d}u = \cos x \, \mathrm{d}x \end{array} \right| = \int u \, \mathrm{d}u = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

zatem

$$\langle \sin x | \cos x \rangle_{[0,\pi/2]} = \frac{1}{2} \sin^2 x \Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\sin^2 \frac{\pi}{2} - \sin^2 0 \right) = \frac{1}{2}$$

Elementy analizy funkcjonalnej
Przykłady rachunkowe

Przykład 4.

Obliczmy iloczyn skalarny funkcji $f(x) = \sin x$ i $g(x) = \sin 2x$ na przedziale $[0, \pi]$.

$$\langle f | g \rangle = \langle \sin x | \sin 2x \rangle_{[0,\pi]} = \int_0^\pi \sin x \sin 2x \, \mathrm{d}\, x$$

Całkę tę najłatwiej obliczyć korzystając ze wzoru trygonometrycznego na iloczyn sinusów:

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

Oznaczając $\alpha = x,\ \beta = 2x$ mamy

$$\int_0^\pi \sin x \sin 2x \, \mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(x-2x) - \cos(x+2x)\right)\mathrm{d}\, x = \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\cos(-x) - \cos(3x)\right)\mathrm{d}\, x =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin 3x\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{2}\left(\sin\pi - \frac{1}{3}\sin 3\pi - \sin 0 + \sin 0\right) = 0$$

Zatem $\langle \sin x | \sin 2x \rangle_{[0,\pi]} = 0$ czyli funkcje te są ortogonalne na przedziale $[0, \pi]$.

Elementy analizy funkcjonalnej
Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1.

Obliczyć normy funkcji $f(x) = 10x^2$ na przedziałach $[0, 1]$, $[1, 2]$ i $[0, 2]$.

Zadanie 2.

Obliczyć normę funkcji $f(x) = \cos x$ na przedziale $[0, \pi]$.

Zadanie 3.

Obliczyć iloczyn skalarny funkcji $f(x) = \sin 2x$ i $g(x) = \cos 3x$ na przedziale $[0, \pi/6]$.

Zadanie 4.

Obliczyć iloczyn skalarny funkcji $f(x) = \cos 2x$ i $g(x) = \cos 3x$ na przedziale $[0, \pi]$.