Metody analityczne w elektrotechnice

Stanisław Pawłowski

Zakład Elektrodynamiki i Systemów Elektromaszynowych

Kontakt:

Budynek B pokój 301

Mail: spawlo@prz.edu.pl

Tel.: 17 865 1305

Szereg Taylora

Różniczka funkcji

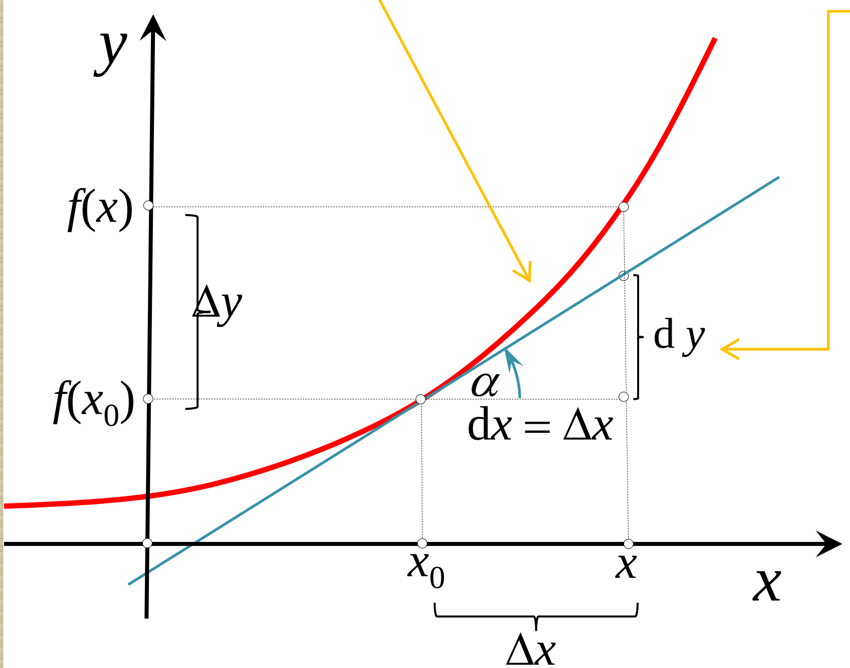
Definicja różniczki funkcji $y=f(x)$ w punkcie x_0 : $\mathrm{d}\,y = f'(x_0)\cdot\Delta x$ (1)

gdzie $\Delta x = x - x_0$ jest dowolnym przyrostem argumentu funkcji .

Dla funkcji $y = x$ mamy: $f\,'(x) = 1$, zatem: $\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = \Delta x$, stąd:

$$\mathrm{d}\,y = f'(x)\cdot\mathrm{d}x \qquad (2)$$

Ponieważ $f'(x_0) = \mathrm{tg}\,\alpha$, więc $\mathrm{d}\,y = \mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{d}\,x$ (3)



Dla niedużych Δx :

$$\mathrm{d}\,y \approx \Delta y \approx f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (4)$$

a stąd mamy:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) \qquad (5)$$

Przykład 1. Przybliżenie exponenty funkcją liniową

Niech $f(x) = e^x$ i $x_0 = 0$.

Oczywiście $f(x_0) = e^0 = 1$, a ponieważ $f'(x) = e^x$, to również $f'(x_0) = e^0 = 1$.

Korzystając z (5) policzmy przybliżone wartości funkcji e^x dla $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3$.

Najpierw wyprowadźmy wzór ogólny na przybliżoną wartość funkcji $f(x) = e^x$

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0) = 1 + 1\cdot(x - 0) = 1 + x$$

czyli : $e^x \approx 1 + x$ (dla x bliskich 0) .

Zatem: $e^{0,1} \approx 1{,}1;$ $\quad e^{0,2} \approx 1{,}2;$ $\quad e^{0,3} \approx 1{,}3;$

Porównajmy to z wartościami dokładnymi obliczonymi na kalkulatorze:

$$e^{0,1} = 1{,}10517; \quad e^{0,2} = 1{,}22140; \quad e^{0,3} = 1{,}34986;$$

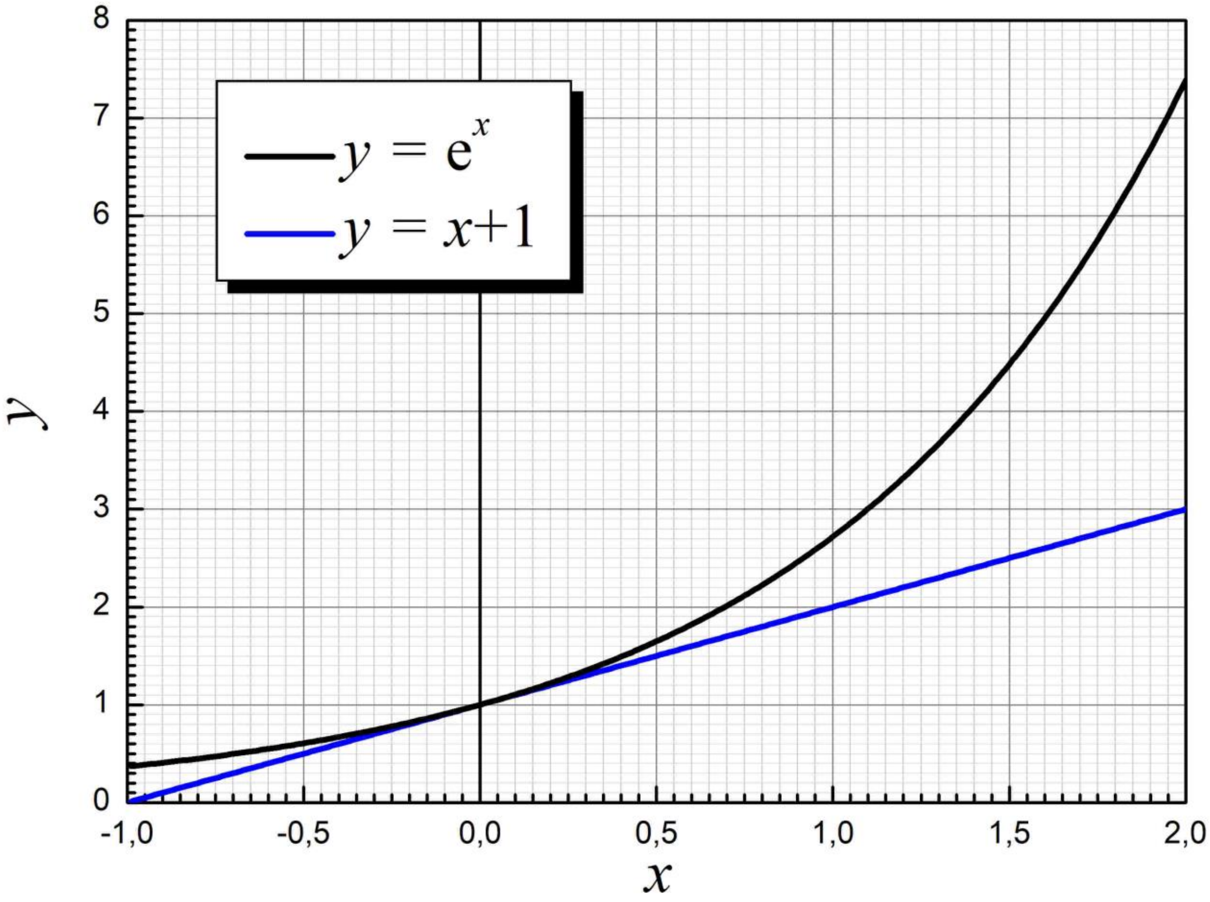
Dokładność przybliżenia przyrostu funkcji jej różniczką można ocenić obliczając ich względne

błędy procentowe ze wzoru: $\delta_{\%}(x) = \left|\frac{\Delta y - \mathrm{d}\,y}{\Delta y}\right|\cdot 100\%$

Po obliczeniu otrzymuje się:

$$\delta_{\%}(0{,}1) = 4{,}9\%; \quad \delta_{\%}(0{,}2) = 9{,}7\%; \quad \delta_{\%}(0{,}3) = 14{,}3\%;$$

Przybliżenie funkcji $f(x) = e^x$ funkcją liniową



Przybliżenie funkcją kwadratową

Wprowadzamy oznaczenie: $\tilde{f}_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$ (6)

czyli wzór (5) możemy zapisać jako: $f(x) \approx \tilde{f}_1(x)$

Dla $x = x_0$: $\tilde{f}_1(x_0) = f(x_0)$ i $\tilde{f}_1'(x_0) = f'(x_0)$ (7)

Przybliżenie 2-go stopnia: $\tilde{f}_2(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2$ (8)

Postulujemy: 1. $\tilde{f}_2(x_0) = f(x_0)$, 2. $\tilde{f}_2'(x_0) = f'(x_0)$, 3. $\tilde{f}_2''(x_0) = f''(x_0)$ (9)

1. $\tilde{f}_2(x_0) = f(x_0) \Rightarrow a_0 = f(x_0)$ (10)

2. $\tilde{f}_2'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) \Rightarrow \tilde{f}_2'(x_0) = a_1$, czyli $a_1 = f'(x_0)$ (11)

3. $\tilde{f}_2''(x) = 2a_2$, czyli $a_2 = \dfrac{1}{2} f''(x_0)$ (12)

Zatem: $\tilde{f}_2(x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{1}{2} f(x_0)''(x - x_0)^2$ (13)

Przykład 2. Przybliżenie exponenty funkcją kwadratową

Niech $f(x) = e^x$ i $x_0 = 0$. Podobnie jak poprzednio obliczymy przybliżone wartości tej funkcji dla $x = 0{,}1;\ 0{,}2;\ 0{,}3$, ale tym razem będziemy korzystać ze wzoru (13). Ponieważ pierwsze dwa wyrazy tego przybliżenia są identyczne jak poprzednio, wystarczy obliczyć trzeci. Oczywiście $f''(x) = e^x$, czyli $f''(x_0) = e^0 = 1$. Po skorzystaniu (13) i podstawieniu $x_0 = 0$ otrzymujemy:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

a po podstawieniu kolejnych wartości za x:

$$e^{0,1} \approx 1{,}105; \qquad e^{0,2} \approx 1{,}220; \qquad e^{0,3} \approx 1{,}345$$

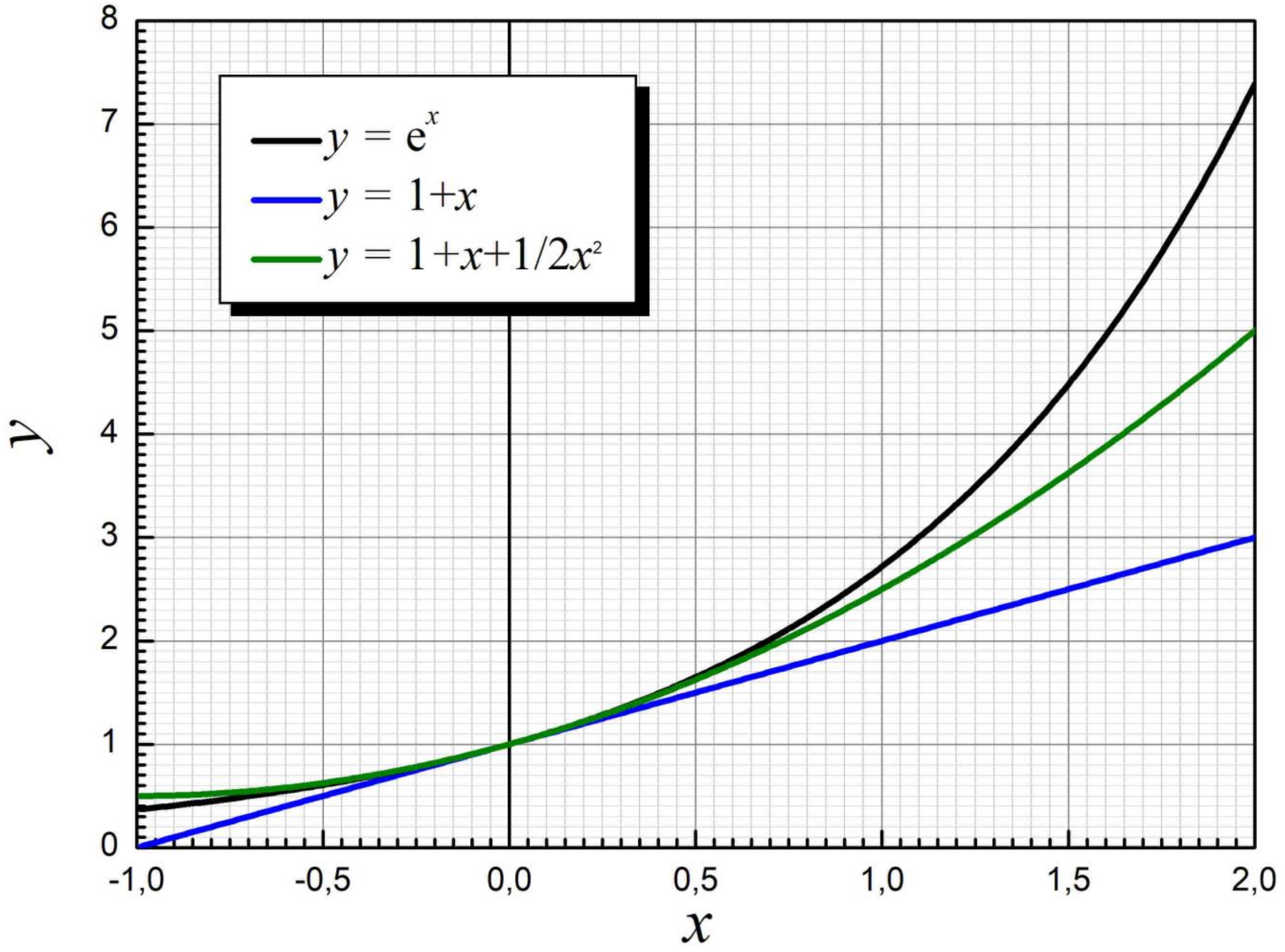
Przypomnijmy wartości dokładne:

$$e^{0,1} = 1{,}10517; \qquad e^{0,2} = 1{,}22140; \qquad e^{0,3} = 1{,}34986$$

i policzmy błędy procentowe tych przybliżeń

$$\delta_{\%}(0{,}1) = 0{,}16\% \qquad \delta_{\%}(0{,}2) = 0{,}63\% \qquad \delta_{\%}(0{,}3) = 1{,}4\%$$

Przybliżenie funkcji $f(x) = e^x$ funkcją liniową i kwadratową



Przybliżenie wielomianem *n*-tego stopnia

Niech: $$\tilde{f}_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n \qquad (14)$$

Poszukujemy ogólnego wzoru na współczynniki a_k, tak aby wielomian (14) i wszystkie jego pochodne do rzędu n były równe odpowiednim pochodnym funkcji $f(x)$ w punkcie $x = x_0$:

$$\tilde{f}_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0), \qquad k = 0, 1, \ldots, n \qquad (15)$$

Potrzebujemy w tym celu obliczyć ogólnie k -tą pochodną z funkcji (14). Łatwo zauważyć, że pochodne pierwszych k-1 wyrazów w (14) będą się zerowały . Wyraz o numerze k przyjmie wartość stałą:

$$\left(a_k(x - x_0)^k\right)^{(k)} = a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot 1 = k! a_k \qquad (16)$$

Dla wyrazów o numerze $m > k$ mamy:

$$\left(a_m(x - x_0)^m\right)^{(k)} = a_m k!(x - x_0)^{m-k} \qquad (17)$$

ale dla $x = x_0$ (patrz (15)) te wyrazy też się zerują. Zatem: $\tilde{f}_1^{(k)}(x_0) = k! a_k$ (18)

co wobec (15) oznacza, że:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \qquad (19)$$

Przybliżenie wielomianem *n*-tego stopnia i szereg Taylora

Podstawiając (19) do (14) otrzymujemy ostatecznie

$$\tilde{f}_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \qquad (20)$$

Używając symbolu sumy możemy to zapisać w bardziej zwartej postaci:

$$\tilde{f}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (21)$$

Powyższy wzór umożliwia przybliżanie dowolnej funkcji n-krotnie różniczkowalnej wielomianem n-tego stopnia.

Co więcej, można udowodnić, że w granicy przy n dążącym do nieskończoności funkcja określona wzorem (21) zmierza do dokładnej wartości funkcji $f(x)$. Możemy więc napisać już bez przybliżenia, że

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \qquad (22)$$

Szereg po prawej stronie (22) nazywany jest szeregiem Taylora (lub rzadziej – Newtona).

Przykład 3. Rozwinięcie eksponenty w szereg Taylora

Podobnie jak w poprzednich przykładach $f(x) = e^x$ i $x_0 = 0$.

Każda pochodna z e^x jest równa e^x, czyli dla każdego n:

$$f^{(n)}(x_0) = e^0 = 1.$$

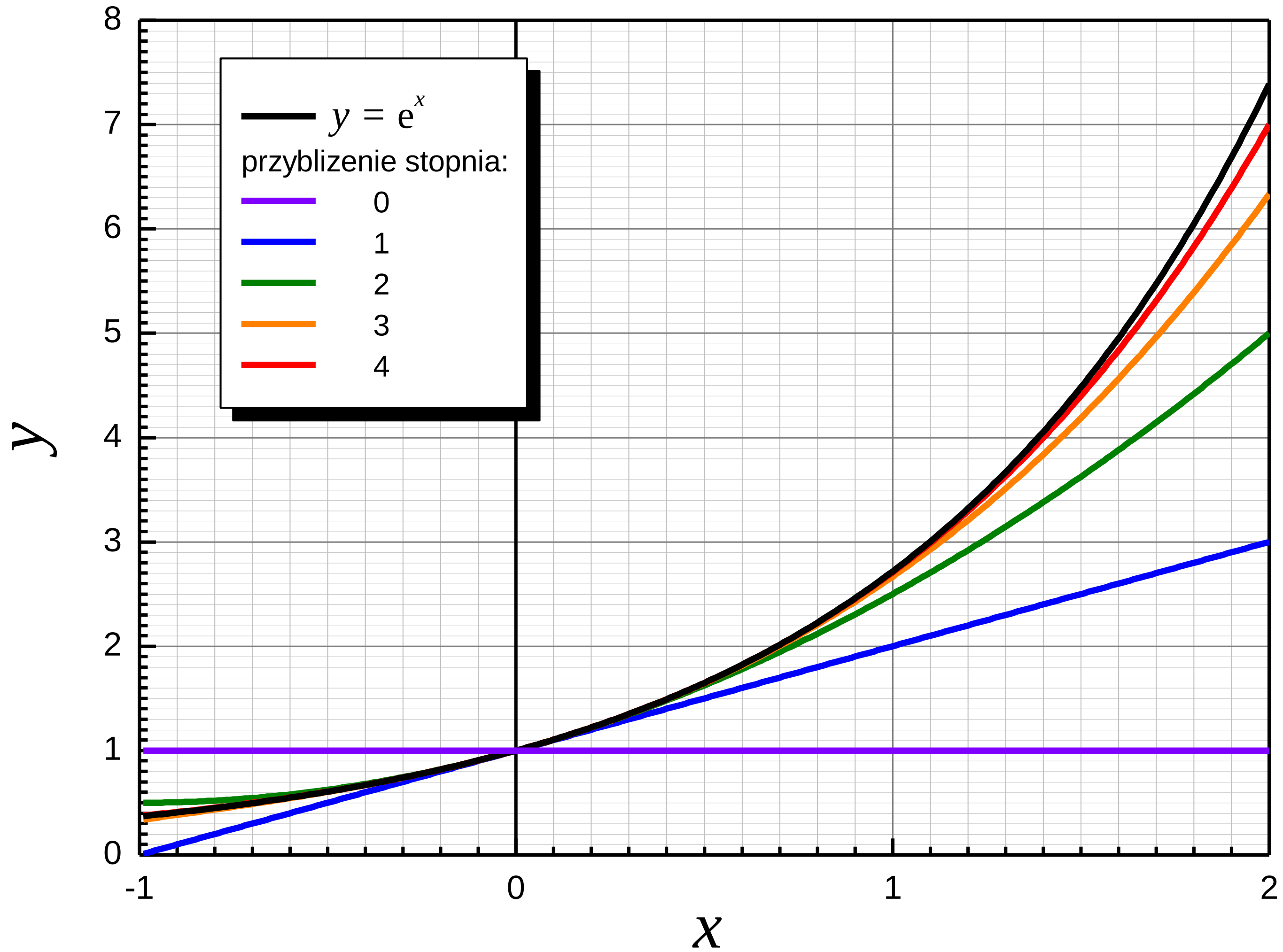
Podstawiając to do (22) mamy:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{23}$$

Wykres na następnym slajdzie pokazuje pięć pierwszych przybliżeń eksponenty obliczonych według powyższego wzoru.

Przykład 3. Rozwinięcie eksponenty w szereg Taylora



Przykład 4. Rozwinięcie funckji sinus w szereg Taylora

$$f(x) = \sin x, \quad x_0 = 0.$$

Pierwszy stały wyraz szeregu Taylora to $f(x_0)$ .Oczywiście $f(x_0) = \sin 0 = 0$

Obliczamy kolejne pochodne funkcji sinus i ich wartości w zerze:

$$(\sin x)' = \cos x; \qquad \cos 0 = 1$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x; \qquad -\sin 0 = 0$$

$$(\sin x)^{(3)} = (-\sin x)' = -\cos x; \qquad -\cos 0 = -1$$

$$(\sin x)^{(4)} = (-\cos x)' = \sin x; \qquad \sin 0 = 0$$

Jak widzimy, czwarta pochodna sinusa to też sinus, czyli piąta będzie taka jak pierwsza, szósta taka jak druga itd. Zwalnia nas to od dalszego liczenia, bo jest oczywiste, że ten cykl będzie się powtarzał w nieskończoność. Podstawiając do (22) otrzymujemy więc:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{24}$$

co można też zapisać jako:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

Przykład 5. Rozwinięcie funkcji kosinus w szereg Taylora

$$f(x) = \cos x, \quad x_0 = 0.$$

Pierwszy stały wyraz szeregu Taylora to $f(x_0)$ .Oczywiście $f(x_0) = \cos 0 = 1$

Obliczamy kolejne pochodne funkcji kosinus i ich wartości w zerze:

$$(\cos x)' = -\sin x; \qquad -\sin 0 = 0$$

$$(\cos x)'' = (-\sin x)' = -\cos x; \qquad -\cos 0 = -1$$

$$(\cos x)^{(3)} = (-\cos x)' = \sin x; \qquad \sin 0 = 0$$

$$(\cos x)^{(4)} = (\sin x)' = \cos x; \qquad \cos 0 = 1$$

I znów po czterech zróżniczkowaniach wracamy do funkcji wyjściowej, czyli nie ma potrzeby dalej liczyć. Podstawiając do (22) otrzymujemy:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \tag{25}$$

co można też zapisać jako: $$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}$$

Wzór Eulera

Podstawiając w rozwinięciu funkcji exponent (por. wzór(23)) w miejsce x liczbę czysto urojoną $\mathrm{j}x$ mamy:

$$e^{\mathrm{j}x} = 1 + \mathrm{j}x + \frac{(\mathrm{j}x)^2}{2!} + \frac{(\mathrm{j}x)^3}{3!} + \frac{(\mathrm{j}x)^4}{4!} + \frac{(\mathrm{j}x)^5}{5!} + \frac{(\mathrm{j}x)^6}{6!} + \frac{(\mathrm{j}x)^7}{7!} + \dots$$

Pamiętając, że $\mathrm{j}^2 = -1$ otrzymujemy:

$$e^{x} = 1 + \mathrm{j}x - \frac{x^2}{2!} - \mathrm{j}\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \mathrm{j}\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - \mathrm{j}\frac{x^7}{7!} + \dots =$$

$$= \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right) + \mathrm{j}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)$$

ale (wzory (24), (25)):

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \qquad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

więc

$$e^{\mathrm{j}x} = \cos x + \mathrm{j}\sin x$$

Podsumowanie

Wzory do zapamiętania

Różniczka: $\mathrm{d}y = f'(x)\cdot \mathrm{d}x$

Liniowe przybliżenie funkcji $f(x)$ w otoczeniu punktu x_0:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

Szereg Taylora:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Uwaga

W praktyce oczywiście nie jest możliwe obliczenie sumy nieskończonej, więc obliczając rozwinięcia funkcji musimy się zawsze ograniczyć do sum skończonych, czyli w tym wypadku do wielomianów rzędu n (patrz przykłady 1, 2). Pojawia się więc problem dokładności takiego przybliżenia. W książkach do analizy matematycznej i poradnikach matematycznych można znaleźć wiele informacji i wzorów dotyczących oszacowania błędu przybliżenia sumą skończoną (21) (zagadnienie obliczania tzw. *reszty Peana* szeregu Taylora).

Przykład

Obliczyć pierwszych pięć wyrazów szeregu Taylora funkcji $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ dla $x_0=0$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{0+1}}=1$$

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)'=-\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2}\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot 1=\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3}$$

$$f'(x_0)=\frac{1}{2\left(\sqrt{0+1}\right)^3}=\frac{1}{2}$$

$$f''(x)=\left(\frac{1}{2\left(\sqrt{x+1}\right)^3}\right)'=\frac{1}{2}\left((x+1)^{-\frac{3}{2}}\right)'=-\frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''(x_0)=-\frac{3}{4}(0+1)^{-\frac{5}{2}}=-\frac{3}{4}$$

$$f'''(x)=\left(-\frac{3}{4}(x+1)^{-\frac{5}{2}}\right)'=\frac{15}{8}(x+1)^{-\frac{7}{2}}$$

$$f'''(x_0)=\frac{15}{8}(0+1)^{-\frac{7}{2}}=\frac{15}{8}$$

$$f(x)\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4\cdot 2!}x^2+\frac{15}{8\cdot 3!}x^3-\frac{105}{16\cdot 4!}x^4$$

$$f(x)\approx 1+\frac{1}{2}x-\frac{3}{8}x^2+\frac{15}{48}x^3-\frac{105}{384}x^4$$