8. DYNAMIKA UKŁADU BRYŁ – METODY ENERGETYCZNE

Zadanie 8.1. Na rys. 1 przedstawiono układ mechaniczny, którego geometria jest znana. Wiadomo, że w położeniu początkowym I prędkość bryły 1 była równa zeru. Stosując zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy obliczyć prędkość kątową bryły 4, gdy bryła 1 zajmie położenie II.

Dane:

$m_1 = m$ [kg]

$m_2 = 2m$ [kg]

$m_3 = 6m$ [kg]

$m_4 = 4m$ [kg]

$m_5 = 2m$ [kg]

$r_1 = r$ [m]

$r_3 = 2r$ [m]

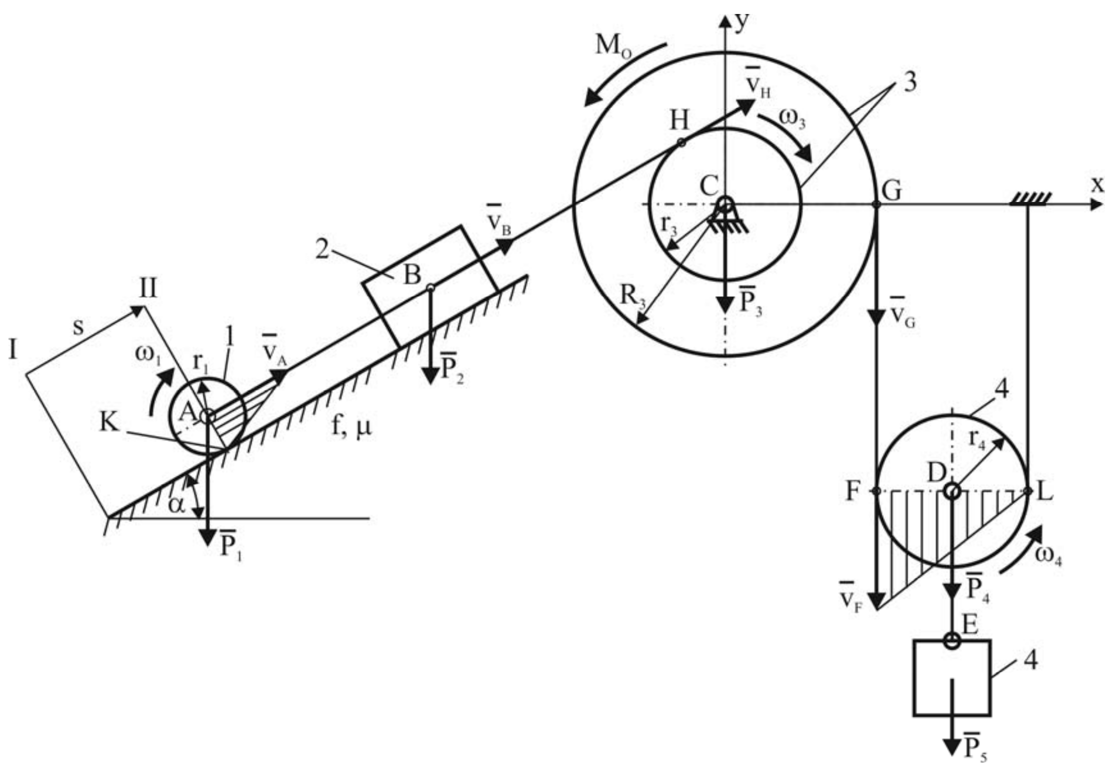
$R_3 = 4r$ [m]

$r_4 = 2r$ [m]

$i_C = 3r$ [m]

s [m], μ, f [m], α [rad]

M_o [Nm] – moment oporu



Rys. 8.1

Rozwiązanie. Zasada równowartości energii kinetycznej i pracy jest przedstawiona następującym wzorem:

$$E_{II} - E_I = L_{I-II} \tag{8.1}$$

W położeniu I układ jest nieruchomy a więc:

$$E_I=0 \tag{8.2}$$

W położeniu II energia układu będzie:

$$E_{II}=E_{II}^{(1)}+E_{II}^{(2)}+E_{II}^{(3)}+E_{II}^{(4)}+E_{II}^{(5)} \tag{8.3}$$

gdzie:

$$E_{II}^{(1)}=\frac{1}{2}m_1v_A^2+\frac{1}{2}I_A\omega_1^2 \tag{8.4}$$

$$E_{II}^{(2)}=\frac{1}{2}m_2v_B^2 \tag{8.5}$$

$$E_{II}^{(3)}=\frac{1}{2}I_C\omega_3^2 \tag{8.6}$$

$$E_{II}^{(4)}=\frac{1}{2}m_4v_D^2+\frac{1}{2}I_D\omega_4^2 \tag{8.7}$$

$$E_{II}^{(5)}=\frac{1}{2}m_5v_E^2 \tag{8.8}$$

Masowe momenty bezwładności:

$$I_A=\frac{1}{2}m_1r_1^2=\frac{1}{2}mr^2 \tag{8.9}$$

$$I_C=m_3i_C^2=54mr^2 \tag{8.10}$$

$$I_D=\frac{1}{2}m_4r_4^2=8mr^2 \tag{8.11}$$

W celu opisania zależności kinematycznych założono prędkość kątową bryły 4 ω_4, i określono:

$$v_E=v_D=\omega_4r_4=2\omega_4r \tag{8.12}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_G=v_F=\omega_4 2r_4=4\omega_4r \\ v_G=\omega_3R_3=4\omega_3r \end{array}\right\} \Rightarrow \omega_3=\omega_4 \tag{8.13}$$

$$v_A=v_B=v_H=\omega_3r_3=2\omega_4r \tag{8.14}$$

$$v_A=\omega_1r_1=\omega_1r \tag{8.15}$$

Z równań (8.14) i (8.15) otrzymano

$$\omega_1=2\omega_4 \tag{8.16}$$

Uwzględniając masowe momenty bezwładności (8.9) - (8.11) i zależności kinematyczne (8.12) - (8.16) zależności (8.3) - (8.8) przedstawiono następująco:

(4): $E_{II}^{(1)}=2m\omega_4^2r^2+m\omega_4^2r^2=3m\omega_4^2r^2$

(5): $E_{II}^{(2)}=4m\omega_4^2r^2$

(6): $E_{II}^{(3)}=27m\omega_4^2r^2$

(7): $E_{II}^{(4)}=8m\omega_4^2r^2+4m\omega_4^2r^2=12m\omega_4^2r^2$

(8): $E_{II}^{(5)}=4m\omega_4^2r^2$

(3): $E_{II}=50m\omega_4^2r^2$

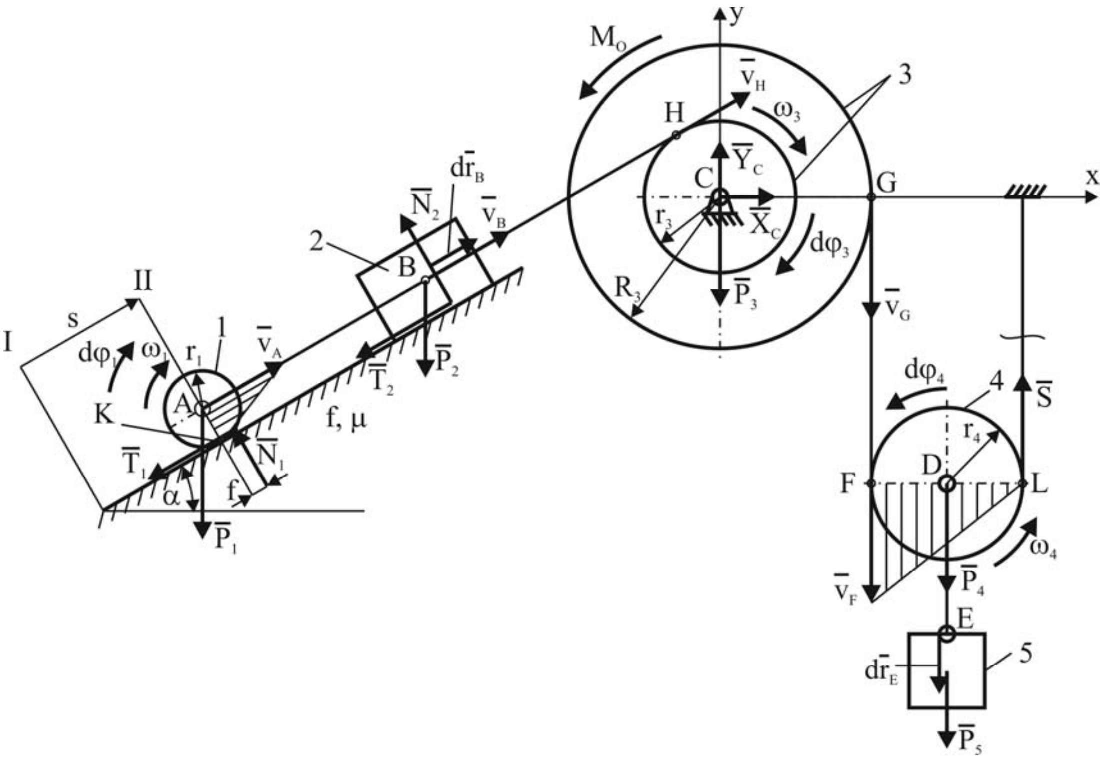
Wykonana praca od położenia I do II przedstawia się następująco:

$$L_{I\text{-}II}=\int\delta L \tag{8.17}$$

gdzie δL to praca elementarna sił działających na poszczególne bryły:

$$\delta L=\delta L^{(1)}+\delta L^{(2)}+\delta L^{(3)}+\delta L^{(4)}+\delta L^{(5)} \tag{8.18}$$

Należy na rysunku wprowadzić wszystkie siły zewnętrzne i obliczyć ich pracę (w rozważanym zadaniu siły wewnętrzne – siły w linach – pracy nie wykonują).



Rys. 8.2

$$\delta L^{(1)} = M_K d\varphi_1 = \left(-P_1 r_1 \sin\alpha - N_1 f\right) d\varphi_1 \tag{8.19}$$

gdzie $d\varphi_1$ to elementarny obrót.

$$\delta L^{(2)} = \bar{P} d\bar{r}_B = \left(-P_2 \sin\alpha - T_2\right) dr_B \tag{8.20}$$

gdzie $d\bar{r}_B$ to wektor przesunięcia elementarnego.

$$\delta L^{(3)} = M_C d\varphi_3 = -M_o d\varphi_3 \tag{8.21}$$

$$\delta L^{(4)} = M_L d\varphi_4 = P_4 r_4 d\varphi_4 \tag{8.22}$$

$$\delta L^{(5)} = \bar{P} d\bar{r}_E = P_5 dr_E \tag{8.23}$$

Z zależności kinematycznych (8.12) - (8.16) zapisano

$$d\varphi_1 = 2 d\varphi_4 \tag{8.24}$$

$$dr_B = 2 d\varphi_4 r \tag{8.25}$$

$$d\varphi_3 = d\varphi_4 \tag{8.26}$$

$$dr_E = 2 d\varphi_4 r \tag{8.27}$$

Zależności siłowe

$$T_2 = \mu N_2 = \mu P_2 \cos\alpha \tag{8.28}$$

$$N_1 = P_1 \cos\alpha \tag{8.29}$$

Podstawiając zależności (8.19) – (8.29) do (8.18) oraz uwzględniając dane otrzymano:

$$\delta L = \left(-6mgr\sin\alpha - 2mgf\cos\alpha - 4mgr\mu\cos\alpha - M_o + 12mgr\right) d\varphi_4 \tag{8.30}$$

Podstawiając zależność (8.30) do (8.17) otrzymano

$$L_{I-II}=\int \delta L = \int_0^{\varphi_4}\left(-6mgrsin\alpha-2mgfcos\alpha-4mgr\mu cos\alpha-M_o+12mgr\right)d\varphi_4$$
$$=\left(-6mgrsin\alpha-2mgfcos\alpha-4mgr\mu cos\alpha-M_o+12mgr\right)\varphi_4 \tag{8.31}$$

Przebytą drogę s od położenia I do II można zapisać jako

$$s=\varphi_1 r_1 \tag{8.32}$$

Z zależności kinematycznych (8.16) wiadomo że

$$\varphi_1=2\varphi_4 \tag{8.33}$$

Wstawiając zależność (8.33) do zależności (8.32) kąt obrotu

$$\varphi_4=\frac{s}{2r} \tag{8.34}$$

Podstawiając zależności (8.34), (8.31), (8.3) do (8.1) otrzymano

$$50m\omega_4^2r^2=\left(-6mgrsin\alpha-2mgfcos\alpha-4mgr\mu cos\alpha-M_o+12mgr\right)\frac{s}{2r} \tag{8.35}$$

Szukana prędkość kątowa bryły nr 4 w położeniu II jest równa

$$\omega_4=\sqrt{\frac{\left(-6mgrsin\alpha-2mgfcos\alpha-4mgr\mu cos\alpha-M_o+12mgr\right)s}{100mr^3}}\left[\frac{rad}{s}\right] \tag{8.36}$$

Zadanie 8.2. Dla mechanizmu płaskiego pokazanego na rysunku 1 określić wielkość prędkości punktu A, gdy z położenia I (położenie równowagi statycznej) do położenia II przebędzie on drogę s. Rozwiązać zadanie stosując zasadę równowartości energii kinetycznej i pracy, czyli podstawową zasadę energetyczną.

Dane:

$$\left.\begin{matrix}P_1\\P_2\\P_3\\P_4\end{matrix}\right\}[N]\ \text{- ciężary brył}$$

$r_2=r_3=r$ [m]

$M[Nm]$=const. - moment napędzający

$s[m]$- droga przebyta przez punkt A z położenia I do II

$\alpha[rad]$

$\mu[-]$- współczynnik tarcia suchego chropowatej równi