Politechnika Rzeszowska

Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

MECHANIKA TECHNICZNA 2

dr inż. Jacek S. Tutak

Rzeszów 2022

Wykład opracowany w oparciu o skrypt:

prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel,

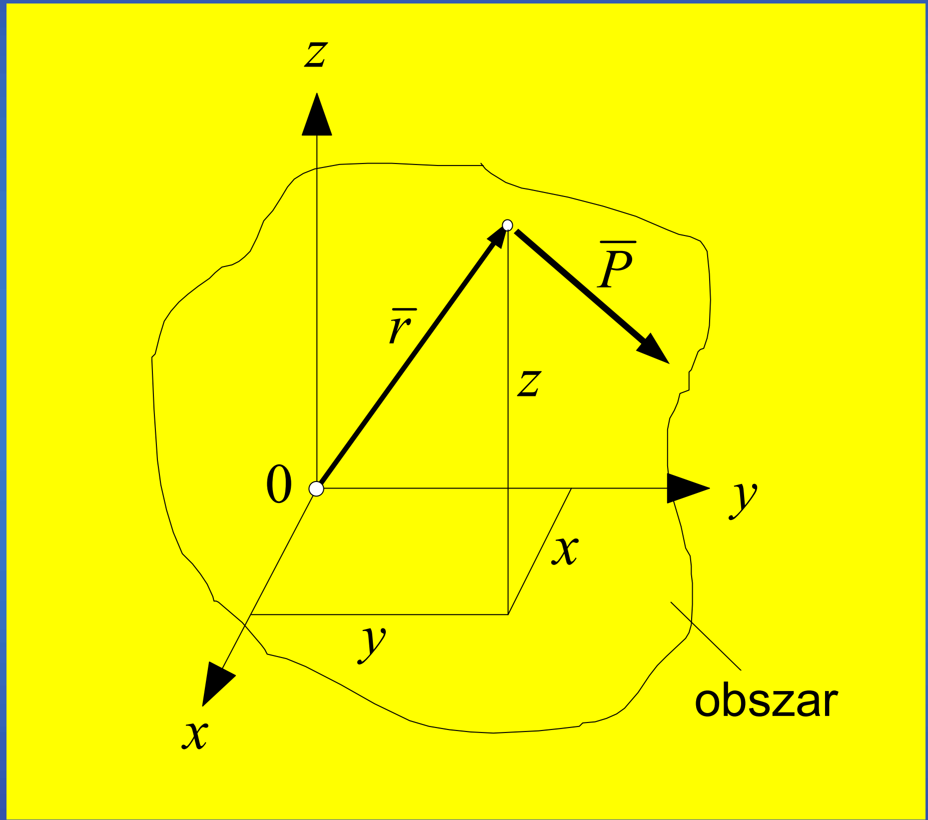
prof. dr hab. inż. Wiesław Żylski

„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”

Pole potencjalne sił.

Załóżmy, że istnieje obszar o tej własności, że na punkt materialny umieszczony w dowolnym punkcie obszaru działa siła zależna tylko od położenia tego punktu.

Każdemu punktowi obszaru odpowiada więc pewna niezmienna w czasie siła $\overline{P}$, która działa na punkt materialny, gdy ten znajduje się w rozpatrywanym położeniu obszaru.



Rys.1

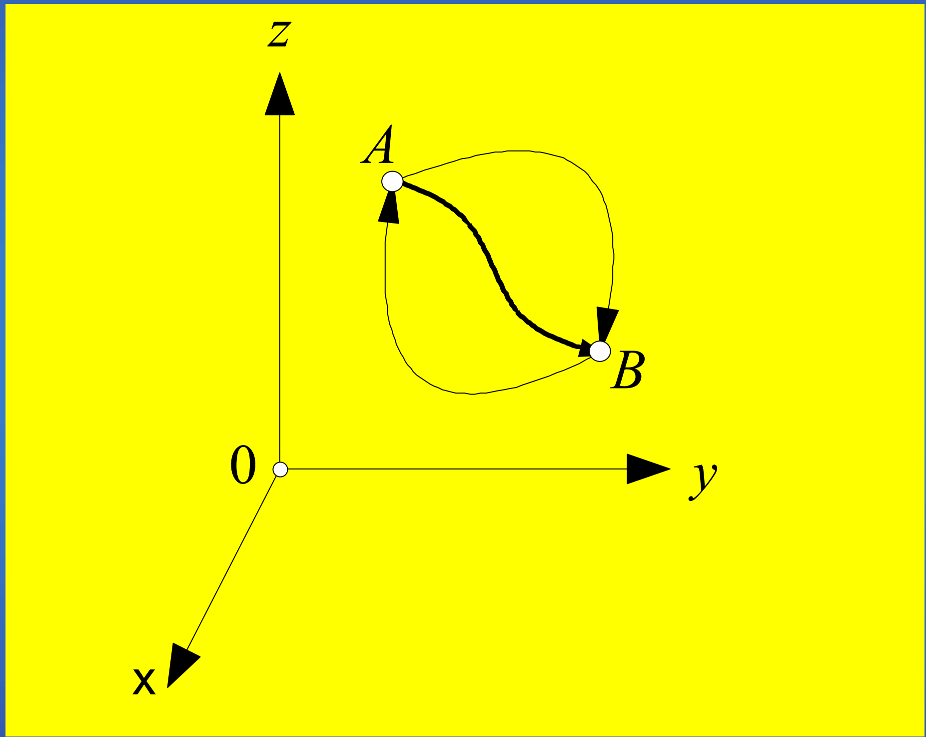
Przestrzeń o takiej własności, że na dowolnie umieszczony w niej punkt materialny działa ściśle określona siła $\overline{P}$, zależna tylko od położenia punktu, nazywamy polem sił.

$$\overline{P} = \overline{P}(\overline{r}) \qquad (1)$$

Jako przykład takiego pola można podać przestrzeń dokoła magnesu dla ciał ferromagnetycznych, pole grawitacyjne ziemskie, pole sprężyny itp.

W mechanice interesuje nas przypadek pola grawitacyjnego sił.

Określimy pracę wykonaną przez siłę pola $\overline{P}$ przy przejściu z A do B.



Rys.2

$$L_{AB} = \int\limits_{(AB)} \delta L = \int\limits_{x_A}^{x_B} P_x \cdot dx + \int\limits_{y_A}^{y_B} P_y \cdot dy + \int\limits_{z_A}^{z_B} P_z \cdot dz = \int\limits_{(AB)} \left(P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz \right) \quad (2)$$

Praca całkowita wykonana przez siłę pola zależy od wielkości przebytej drogi.

Jeżeli okaże się, że praca całkowita nie zależy od przebytej drogi, to takie pole sił nazywamy potencjalnym.

Przez potencjał rozumiemy pewną skalarną funkcję położenia.

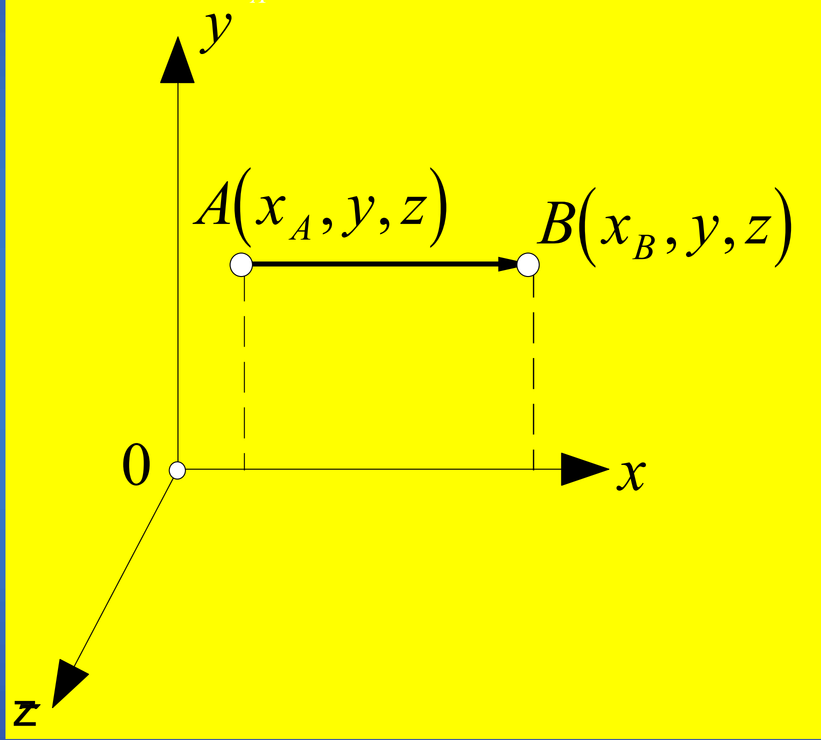
$V_A = V(x_A, y_A, z_A)$ tzw. potencjał w punkcie A,

$V_B = V(x_B, y_B, z_B)$ tzw. potencjał w punkcie B.

$$L_{AB} = V_A - V_B \qquad (3)$$

Jeżeli punkty A i B leżą na prostej równoległej do osi x układu odniesienia (rys.3), to praca przejścia wynosi:

$$L_{AB} = \int_{x_A}^{x_B} P_x \cdot dx \qquad (4)$$



Rys. 3

z kolei zgodnie ze wzorem (3) mamy:

$$L_{AB} = V_A - V_B = V(x_A, y, z) - V(x_B, y, z) \qquad (5)$$

Porównując (4) oraz (5) dostaniemy:

$$V\left(x_A, y, z\right) - V\left(x_B, y, z\right) = \int_{x_A}^{x_B} P_x \cdot dx \qquad (6)$$

Powyższa zależność prowadzi do wyznaczenia sił pola potencjalnego:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -P_x \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -P_y \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -P_z \end{cases} \qquad (7)$$

Z równania (7) wynika, że pochodna cząstkowa potencjału podług odpowiedniej współrzędnej przedstawia rzut siły pola potencjalnego na odpowiednią oś ze znakiem przeciwnym, tzn.:

$$\overline{P} = P_x \cdot \overline{i} + P_y \cdot \overline{j} + P_z \cdot \overline{k}$$

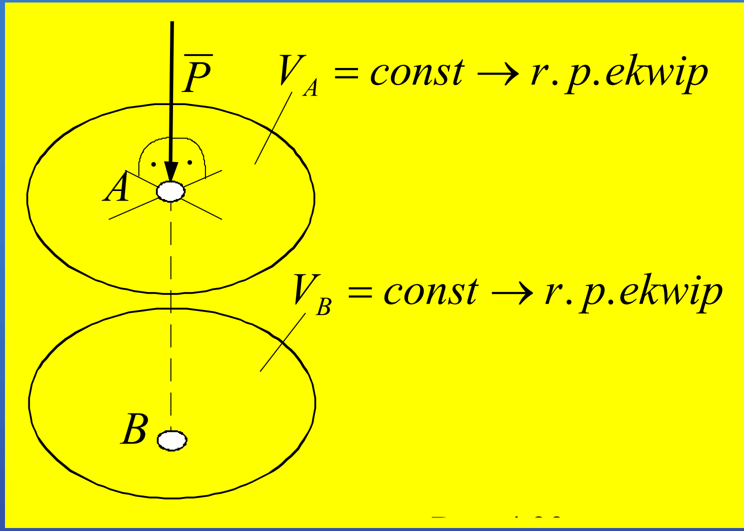
Uwzględniając równania (7) otrzymamy

$$\overline{P} = -\frac{\partial V}{\partial x} \cdot \overline{i} - \frac{\partial V}{\partial y} \cdot \overline{j} - \frac{\partial V}{\partial z} \cdot \overline{k} = -\mathrm{grad}\,\overline{V} \qquad (8)$$

W polu potencjalnym mówimy o tzw. powierzchniach stałego potencjału, rys.4.

Powierzchnie ekwipotencjalne, to takie powierzchnie na których w każdym punkcie potencjał jest taki sam.

Siła pola potencjalnego jest zawsze na kierunku normalnej do powierzchni ekwipotencjalnej, a zwrot siły jest zawsze w stronę powierzchni o niższym potencjale



Rys. 4

$$L_{AB} = V_A - V_B > 0 \qquad (9)$$

Aby pole sił było polem potencjalnym, to:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_x}{\partial y} = \dfrac{\partial P_y}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P_x}{\partial z} = \dfrac{\partial P_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial P_y}{\partial z} = \dfrac{\partial P_z}{\partial y} \end{cases} \qquad (10)$$

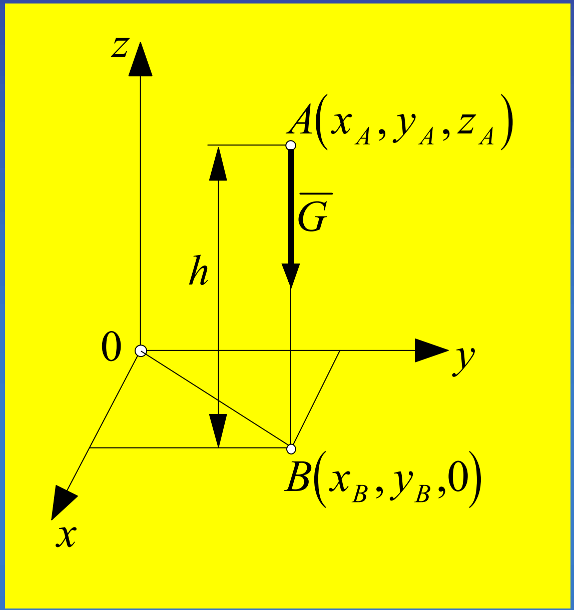
Równania (10) to warunki konieczne i wystarczające występowania potencjału. Równania te możemy zapisać:

$$rot\overline{P} = 0 \qquad (11)$$

Pole potencjalne nazywamy często polem bezwirowym, zachowawczym lub konserwatywnym. Jeżeli spełnione są równania (10), to z równań (7) możemy szukać skalarowej funkcji zwanej potencjałem.

a) Przykłady pól potencjalnych.

- pole potencjalne ziemskie,



Rys. 5

Przyjmujemy poziom porównawczy (płaszczyzna xy). Siły pola potencjalnego działające na punkt A będą wynosić:

$$\begin{cases} P_x = 0 \\ P_y = 0 \\ P_z = -G \end{cases} \tag{12}$$

Ponieważ równania (10) są spełnione to z równań (7) szukamy potencjału:

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -P_z = G \tag{13}$$

całkując obustronnie powyższe wyrażenie po : ∂z

$$\int \partial V = \int G \cdot \partial z \tag{14}$$

dostaniemy:

$$V = G \cdot z + C \tag{15}$$

Zakładamy, że dla z=0 potencjał jest zerem, czyli C=0 i ostatecznie potencjał pola ziemskiego określony będzie jako:

$$V = m \cdot g \cdot z \tag{16}$$

Jeżeli $V = m \cdot g \cdot z = const$ to:

$z = const \rightarrow$ równanie powierzchni ekwipotencjalnej.

Płaszczyzna xy jest tzw. płaszczyzną porównawczą, zakładamy że potencjał na tej płaszczyźnie jest zerowy.

Praca sił pola potencjalnego przy przejściu z punktu A do B będzie wynosić:

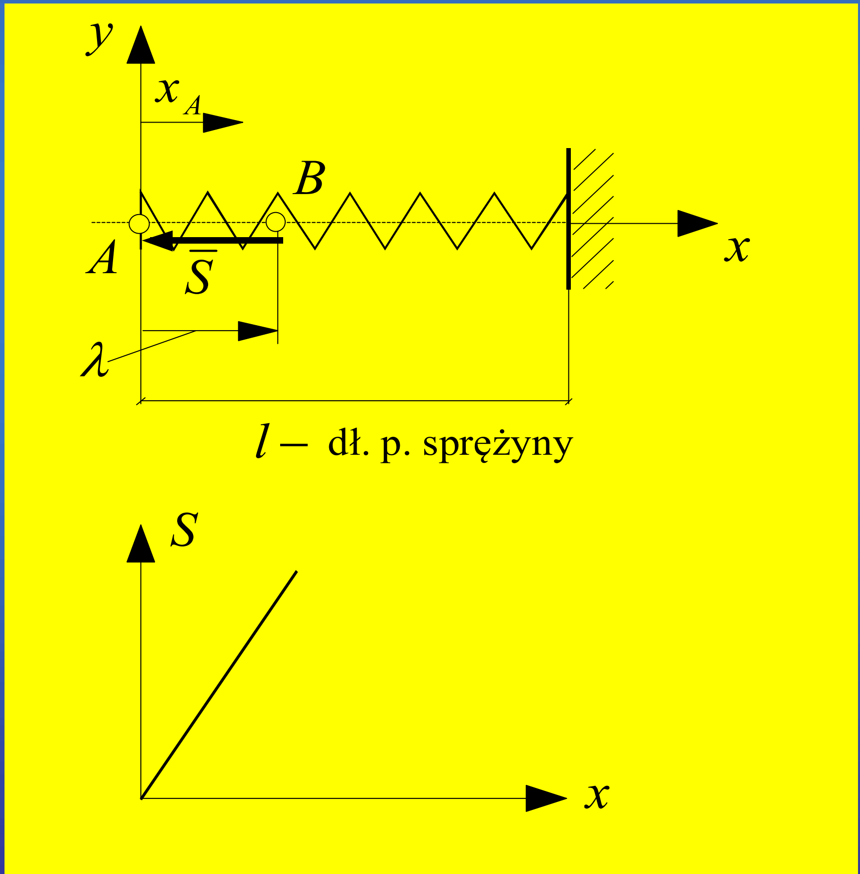
$$L_{AB} = V_A - V_B = m \cdot g \cdot z_A - m \cdot g \cdot z_B = m \cdot g\left(z_A - z_B\right) = m \cdot g \cdot h = m \cdot g \cdot z_A \tag{17}$$

- pole sprężyny,

Siła reakcji sprężyny zależy od zmiany jej długości.

Jeżeli założymy liniową zmianę siły reakcji sprężyny to jej wartość będzie:

$$S = k \cdot x [N] \quad (18)$$



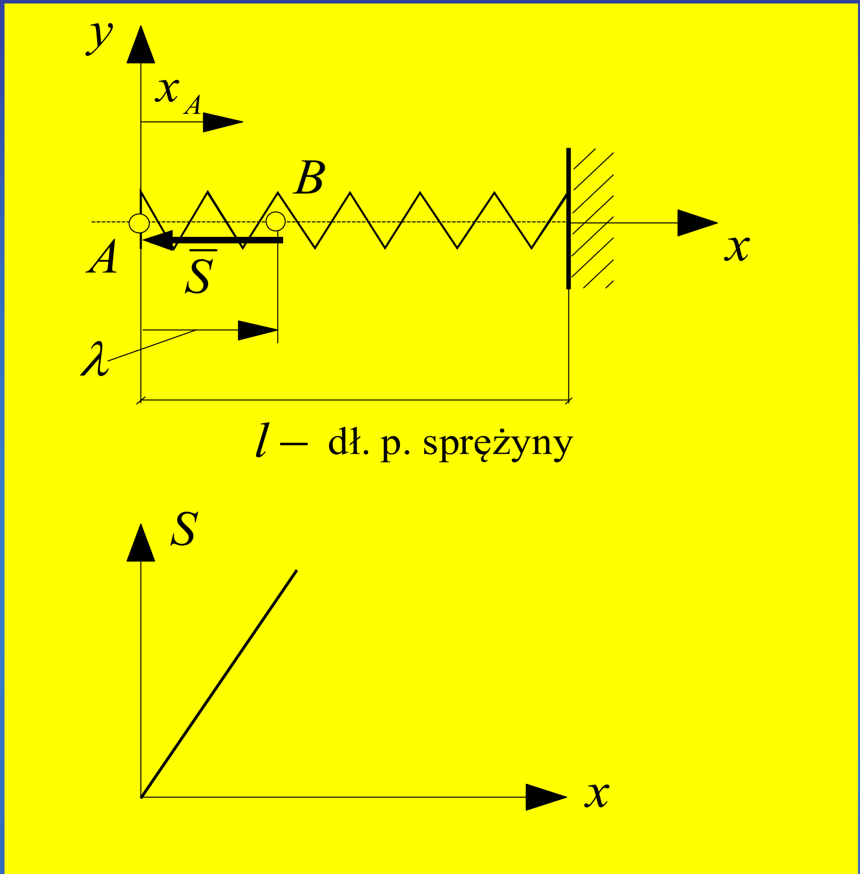
Rys. 6

gdzie:

$k\left[\frac{N}{m}\right] \rightarrow$ *tzw. współczynnik sprężystości, wyznaczany na drodze doświadczalnej.*

$x[m] \rightarrow$ *zmiana długości sprężyny w porównaniu z długością początkową sprężyny.*

Zgodnie z rys. 7 siły pola sprężyny wyznaczymy:



Rys. 7

$$P_x = -S = -k \cdot x \quad (19)$$

$$P_y = 0 \quad (20)$$

$$P_z = 0 \quad (21)$$

Potencjał znajdziemy z zależności:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -P_x = k \cdot x \quad (22)$$

$$\int \partial V = \int k \cdot x \cdot \partial x \quad (23)$$

czyli:

$$V = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + C \quad (24)$$

Wyznaczymy stałą całkowania. Zakładamy, że dla x=0; V=0 czyli C=0.

Ostatecznie potencjał pola sprężyny określimy jako:

$$V = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \tag{25}$$

Jeżeli

$$V = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = const \tag{26}$$

to

$x = \pm const \rightarrow$ równanie powierzchni ekwipotencjalnej.

Praca sił pola potencjalnego sprężyny przy przejściu z punktu A do B będzie wynosić:

$$L_{AB} = V_A - V_B = \frac{1}{2} k \cdot x_A^2 - \frac{1}{2} k \cdot x_B^2 = \frac{1}{2} k \left(x_A^2 - x_B^2 \right) = -\frac{1}{2} k \cdot x_B^2 = -\frac{1}{2} k \cdot \lambda^2 \tag{27}$$

gdzie: $\lambda \rightarrow$ wartość bezwzględna zmiany długości sprężyny.

Uwaga!!!

Potencjał tak określony nazywany jest również energią potencjalną lub energią położenia, jednostką potencjału w SI jest jednostka pracy.

Równowaga w polu potencjalnym

Jeżeli będziemy szukali położenia równowagi w polu potencjalnym, to będzie ono tam gdzie:

$$\begin{cases} P_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x} = 0 \\ P_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = 0 \\ P_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases} \tag{28}$$

Z równania (28) wynika że, położenie równowagi występuje tam gdzie potencjał będzie osiągał wartość ekstremalną, równowaga statyczna będzie tam, gdzie potencjał będzie minimalny. (28) jest to tzw. kryterium szukania równowagi układu, **jest to tzw. twierdzenie Dirichleta**.

Moc układu

Zmiana pracy siły w odniesieniu do jednostki czasu, nazywa się mocą siły.

$$N = \frac{\delta L}{dt} \tag{29}$$

np. w ruchu postępowym moc można określić:

$$N^{(p)} = \overline{P} \cdot \overline{v}_S = P_x \cdot \dot{x}_S + P_y \cdot \dot{y}_S + P_z \cdot \dot{z}_S \tag{30}$$

w przypadku ruchu obrotowego będziemy mieli:

$$N^{(o)} = M_z \cdot \omega \tag{31}$$

Jednostką mocy w układzie SI jest $1\left[N\frac{m}{s}\right] = 1[W]$

Dziękuję