Politechnika Rzeszowska

Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

MECHANIKA TECHNICZNA 2

dr inż. Jacek S. Tutak

Rzeszów 2022

Wykład opracowany w oparciu o skrypt:

prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel,

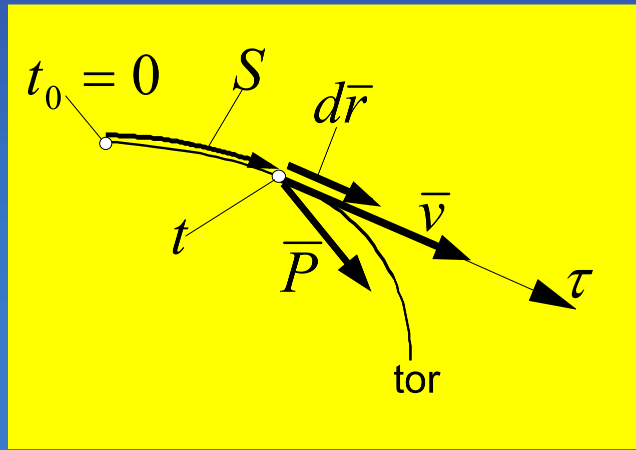
prof. dr hab. inż. Wiesław Żylski

„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”

Praca wykonana przez układ sił.

a) Praca elementarna i całkowita wykonana przez siłę i układ sił.

Do punktu materialnego poruszającego się po torze (rys.0), przyłożono siłę $\overline{P}$ o linii działania nachylonej pod kątem α do osi τ.



Rys 0

Pracę siły $\overline{P}$ wykonaną na elementarnym $d\overline{r}$ przesunięciu definiujemy jako iloczyn skalarny wektora siły $\overline{P}$ i elementarnego przesunięcia $d\overline{r}$:

$$\delta L = \overline{P} \cdot d\overline{r} = P \cdot dr \cdot \cos(\alpha)$$

$d\overline{r}$ - tzw. wektor elementarnego przesunięcia.

Jeżeli położenie punktu materialnego opisane jest w układzie odniesienia xyz to wektor elementarnego przesunięcia wyrazić można:

$$d\bar{r} = dx \cdot \bar{i} + dy \cdot \bar{j} + dz \cdot \bar{k}$$

wektor siły $\overline{P}$ rozkładamy na składowe równoległe do osi układu odniesienia xyz:

$$\overline{P} = P_x \cdot \bar{i} + P_y \cdot \bar{j} + P_z \cdot \bar{k}$$

Wstawiając powyższe zależności do wzoru na pracę elementarną uzyskamy:

$$\delta L = P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz$$

jest to tzw. elementarna praca wykonana przez siłę $\overline{P}$.

Jest to wielkość skalarna, może być dodatnia, ujemna lub wynosić zero. Nie zależy w sposób jawny od czasu.

Prędkość jest to pochodna wektora promienia wodzącego względem czasu:

$$\overline{v} = \frac{d\overline{r}}{dt}$$

wektor elementarnego przesunięcia możemy wyrazić również w postaci:

$$d\overline{r} = \overline{v} \cdot dt$$

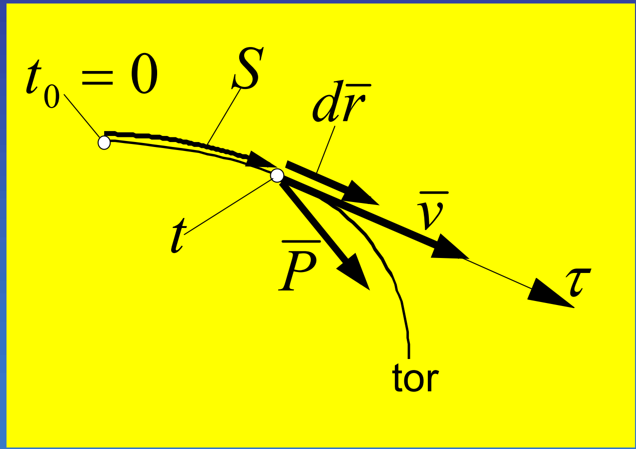
Prędkość punktu materialnego w układzie odniesienia wyrazimy w postaci:

$$\overline{v} = \dot{x} \cdot \overline{i} + \dot{y} \cdot \overline{j} + \dot{z} \cdot \overline{k}$$

Wzór na pracę elementarną możemy wyrazić jeszcze w postaci:

$$\delta L = \overline{P} \cdot \overline{v} \cdot dt = \left(P_x \cdot \dot{x} + P_y \cdot \dot{y} + P_z \cdot \dot{z}\right) \cdot dt$$

Interesuje nas praca całkowita wykonana przez siłę $\overline{P}$ po określonym torze S.



Rys 0

$$L = \int \delta L = \int_S \left(P_x \cdot dx + P_y \cdot dy + P_z \cdot dz \right) = \int_0^{S_x} P_x \cdot dx + \int_0^{S_y} P_y \cdot dy + \int_0^{S_z} P_z \cdot dz$$

jest to praca całkowita wykonana przez siłę $\overline{P}$.

Pracę całkowitą można również zapisać jako:

$$L = \int \delta L = \int_0^{t_S} \left(P_x \cdot \dot{x} + P_y \cdot \dot{y} + P_z \cdot \dot{z} \right) \cdot dt$$

Jednostką pracy w SI jest $1\left[Nm \right]$

Uwaga!!!

Jeżeli w układzie występuje układ sił działających na punkt, czyli:

$$\overline{P} = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

to wówczas praca elementarna wykonana przez układ sił jest algebraiczną sumą prac elementarnych wykonanych przez poszczególne siły

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i$$

analogicznie praca całkowita wykonana przez układ sił jest sumą algebraiczną prac całkowitych wykonanych przez poszczególne siły.

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i$$

Praca wykonana przez układ sił

b) Praca elementarna wykonana przez siły działające na bryłę

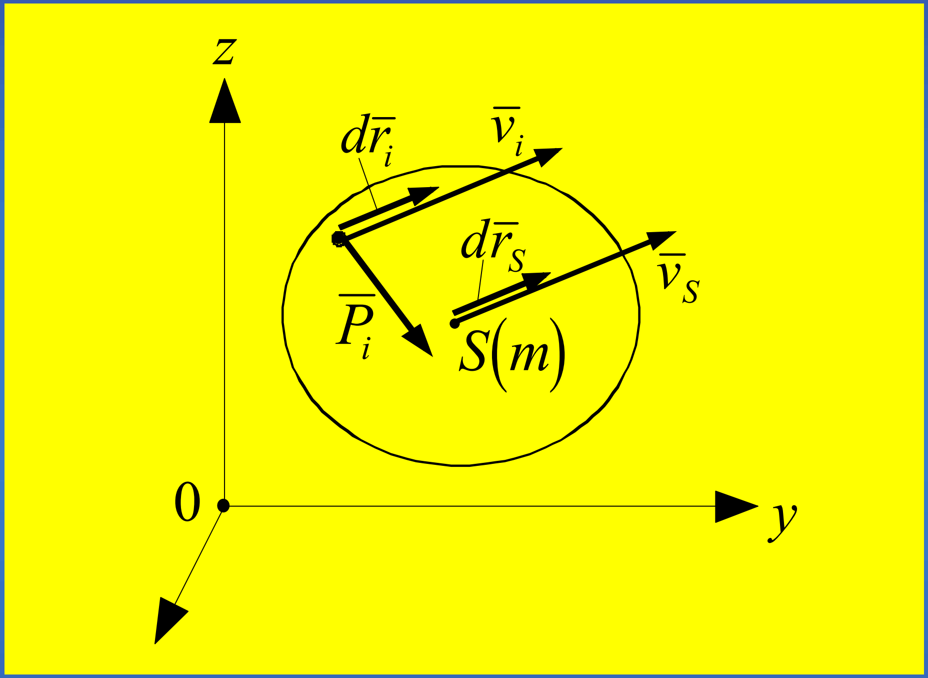
- ruch postępowy bryły

Załóżmy, że na ciało pozostające w ruchu postępowym działa układ sił

$$\overline{P}_1, \overline{P}_i .. \overline{P}_n$$

Przy postępowym ruchu ciała trajektorie wszystkich jego punktów są krzywymi przystającymi.

Wektory elementarnych przemieszczeń wszystkich punktów ciała są geometrycznie równe:



Rys. 1

$$d\overline{r} = d\overline{r}_i = d\overline{r}_S$$

w przypadku prędkości jest tak samo.

praca układu sił jest więc równa:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \overline{v}_i \cdot dt = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \overline{v}_S \cdot dt = d\overline{r}_S \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i$$

Oznaczając przez: $\overline{P}$ wektor główny sił zewnętrznych, $d\overline{r}_S$ - wektor elementarnego przesunięcia środka masy, mamy:

$$\delta L^{(P)} = \overline{P} \cdot d\overline{r}_S$$

- ruch obrotowy bryły

Obliczmy pracę elementarną wykonaną przez układ sił $\overline{P}_1, \overline{P}_i .. \overline{P}_n$, przyłożony do bryły w ruchu obrotowym.

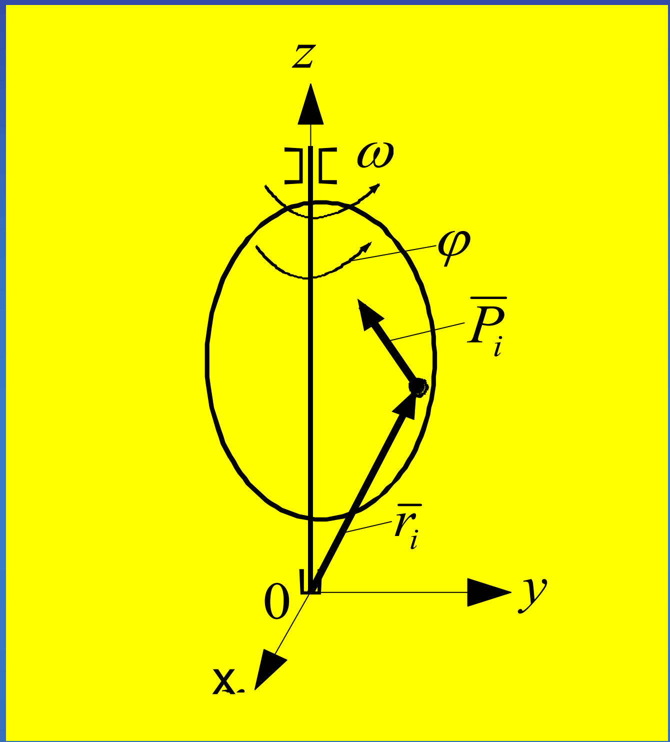
Praca elementarna równa jest:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \delta L_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{P}_i \cdot \overline{v}_i \cdot dt$$

v_i – prędkość liniowa i- tego punktu.

W ruchu obrotowym prędkość liniowa i- tego punktu jest równa:

$$\overline{v}_i = \overline{\omega} \times \overline{r}_i$$



Rys. 2

praca elementarna będzie więc określona:

$$\delta L = \sum_{i=1}^{n} \overline{\omega} \cdot \left(\overline{r}_i \times \overline{P}_i\right) \cdot dt$$

Wyrażenie $\overline{r}_i \times \overline{P}_i$ jest momentem siły $\overline{P}_i$, co zapiszemy: $\overline{r}_i \times \overline{P}_i = \overline{M}_0\left(\overline{P}_i\right)$

Prędkość kątową wyrazimy w postaci:

$$\overline{\omega} = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \overline{k}$$

Ponieważ jest to ruch obrotowy to:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{P}_i\right) \cdot \overline{k} = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\overline{P}_i\right)$$

Elementarna praca:

$$\delta L = d\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{M}_0\left(\overline{P}_i\right) \cdot \overline{k} = d\varphi \cdot \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\overline{P}_i\right) = M_z \cdot d\varphi$$

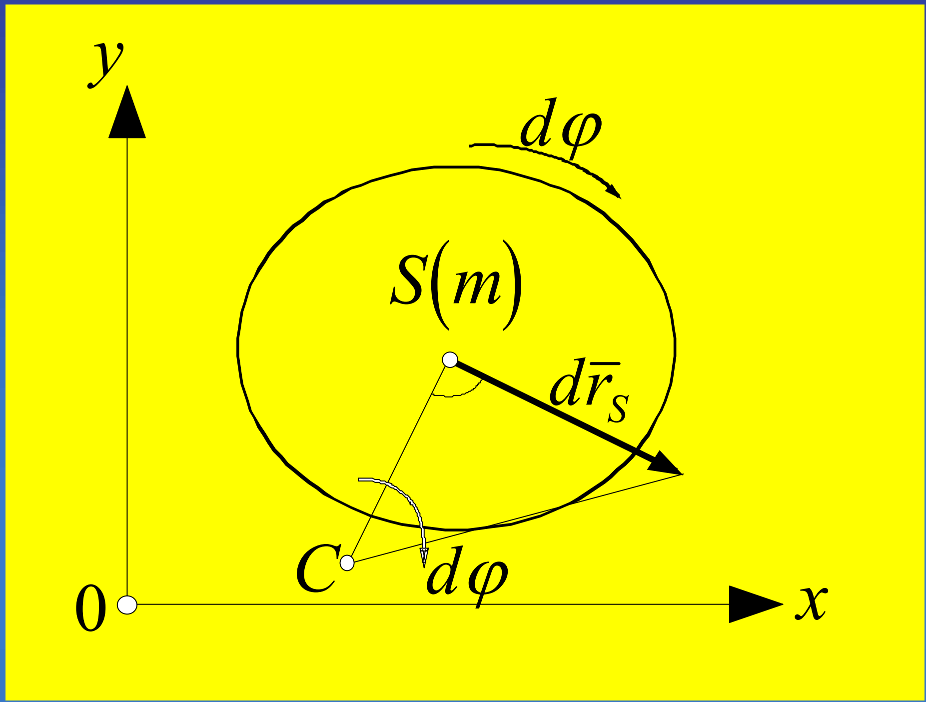
$$\delta L^{(0)} = M_z \cdot d\varphi$$

$M_z = \sum_{i=1}^{n} M_z\left(\overline{P}_i\right) \longrightarrow$ to suma algebraiczna momentów wszystkich sił wzgl. osi obrotu,

$d\varphi \longrightarrow$ to elementarny kąt obrotu.

- ruch płaski bryły

W ruchu płaskim elementarna praca jest równa sumie pracy ruchu postępowego środka masy i obrotowego względem środka masy:



Rys. 3

$$\delta L^{(pl)} = \delta L^{(p)} + \delta L^{(o)}$$

co można zapisać ostatecznie:

$$\delta L^{(pl)} = \bar{P} \cdot d\bar{r}_s + M_s \cdot d\varphi$$

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^{n} \bar{P}_i \qquad M_s = \sum_{i=1}^{n} M_s\left(\bar{P}_i\right)$$

Jeżeli znamy środek chwilowego obrotu to elementarną pracę można wyrazić:

$$\delta L^{(pl)} = M_C \cdot d\varphi$$

$M_C = \sum_{i=1}^{n} M_C\left(\overline{P}_i\right) \rightarrow$ moment sił zewnętrznych wzgl. chwilowego środka obrotu.

c) Praca sił wewnętrznych

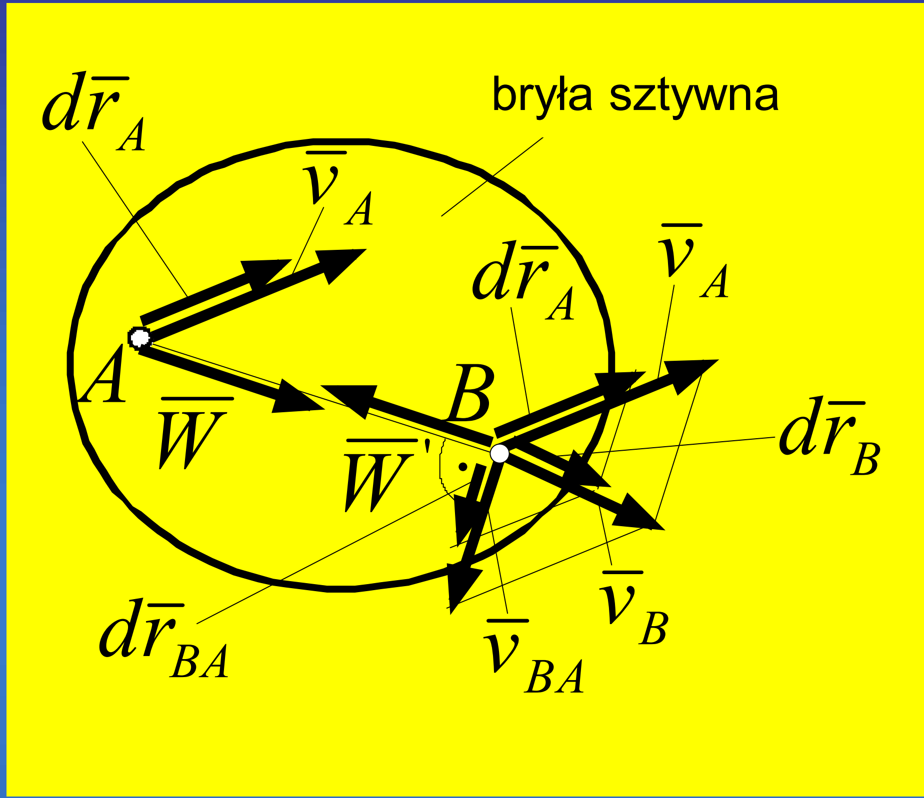
W naszych rozważaniach zakładamy, że bryła jest idealnie sztywna.

Dla każdego odcinka AB należącego do bryły możemy zapisać:

$$\overline{W} + \overline{W}' = 0$$

Elementarna praca sił wewnętrznych wynosi:

$$\delta L = \overline{W} \cdot d\bar{r}_A + \overline{W}' \cdot d\bar{r}_B$$



Rys.4

elementarne przemieszczenie punktu B jest równe:

$$d\bar{r}_B = d\bar{r}_A + d\bar{r}_{BA}$$

co po wstawieniu do zależności na elementarną pracę pozwoli napisać:

$$\delta L = \overline{W} \cdot d\overline{r}_A + \overline{W}' \cdot \left(d\overline{r}_A + d\overline{r}_{BA} \right)$$

upraszczając powyższe wyrażenie:

$$\delta L = \left(\overline{W} + \overline{W}' \right) \cdot d\overline{r}_A + \overline{W}' \cdot d\overline{r}_{BA} = 0$$

bo

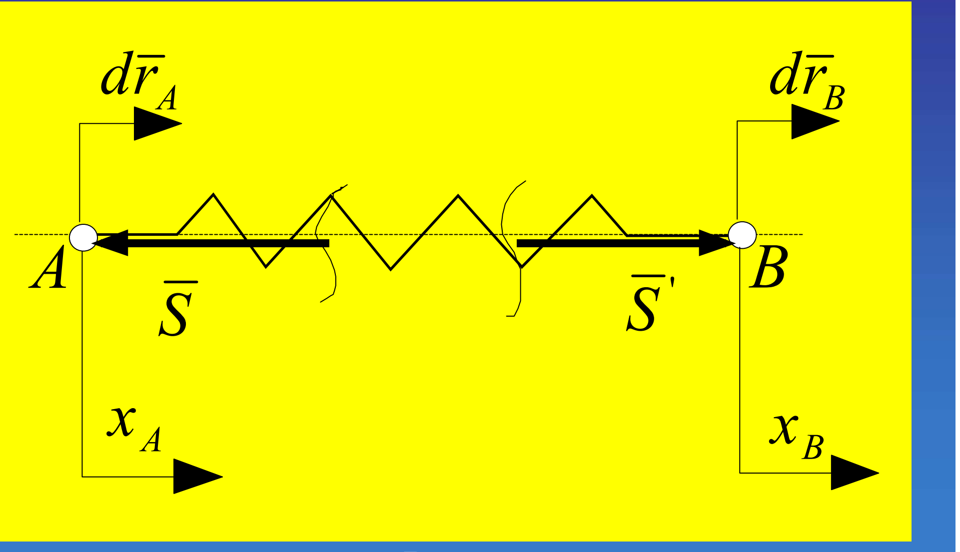
$$\overline{W}' \perp d\overline{r}_{BA}$$

Praca wykonana przez siły wewnętrzne układu jest zerem.

Mamy układ w którym występuje deformacja.

Siły reakcji sprężyny na węzły A i B spełniają zależność:

$$\bar{S} + \bar{S}' = 0$$



Rys.5

Elementarna praca wykonana przez siły układu:

$$\delta L = \bar{S} \cdot d\bar{r}_A + \bar{S}' \cdot d\bar{r}_B = -S \cdot dr_A + S' \cdot dr_B$$

Siła występująca w sprężynie:

$$S = S' = k \cdot \Delta = k \cdot \left(x_A - x_B\right)$$

$\Delta = \left(x_A - x_B\right)$ - odkształcenie liniowe sprężyny.

Punkty A i B przemieszczają się liniowo więc możemy zapisać:

$$dr_A = dx_A \qquad dr_B = dx_B$$

elementarną pracę możemy wyrazić teraz zależnością:

$$\delta L = k \cdot \left(x_A - x_B \right) \cdot \left(dx_B - dx_A \right)$$

W układach gdzie występują deformacje, **siły wewnętrzne wykonują pracę!**

Dziękuję