

Politechnika Rzeszowska
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

MECHANIKA TECHNICZNA 2

dr inż. Jacek S. Tutak

Rzeszów 2022

Wykład opracowany w oparciu o skrypt:

**prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel, prof.
dr hab. inż. Wiesław Żylski**

„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”

dr inż. Jacek S. Tutak

Bud. L

s. 225

tutak.j@prz.edu.pl tel. 178651855

Konsultacje:

środa: 7:00 – 10:00

***(dodatkowo kilka minut przez i po
zaplanowanych zajęciach)***

Wykład:

- Zasady prowadzenia wykładu zdalnego,
- Karta przedmiotu,
- Zasady uzyskania zaliczenia – omówienie egzaminu

Cel kształcenia i wykaz literatury

Główny cel kształcenia: **Głównym celem kształcenia jest uzyskanie wiedzy i umiejętności w zakresie opisu dynamiki nieodkształcalnych ciał materialnych.**

Ogólne informacje o module kształcenia: **Moduł kształcenia "Mechanika ogólna 2" obejmuje zagadnienia dynamiki nieodkształcalnych ciał materialnych.**

Wykaz literatury, wymaganej do zaliczenia modułu

Literatura wykorzystywana podczas zajęć w wykładowych

1. Hendzel Z., Żyliński W., *Mechanika ogólna. Dynamika*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej., 2009

Literatura wykorzystywana podczas zajęć ćwiczeniowych/laboratoryjnych/innych

1. Hendzel Z., Żyliński W., *Mechanika ogólna. Dynamika*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej., 2009

Strona: 3

Wymagania wstępne w kategorii wiedzy/umiejętności/kompetencji społecznych

Wymagania formalne: **Student zarejestrowany na semestr trzeci.**

Wymagania wstępne w kategorii Wiedzy: **Znajomość aparatu matematycznego z zakresu algebry liniowej, geometrii, trygonometrii. Wiedza w zakresie statyki i kinematyki nieodkształcalnych ciał materialnych.**

Wymagania wstępne w kategorii Umiejętności: **Umiejętność pozyskiwania informacji z literatury, samokształcenia się, rozwiązywania układów równań algebraicznych. Umiejętność opisu statyki i kinematyki nieodkształcalnych ciał materialnych.**

Wymagania wstępne w kategorii Kompetencji społecznych: **Rozumienie potrzeby ciągłego dokształcania się.**

Strona: 4

Efekty kształcenia dla modułu

MEK	Student, który zaliczył moduł	Formy zajęć/metody dydaktyczne prowadzące do osiągnięcia danego efektu kształcenia	Sposoby weryfikacji każdego z wymienionych efektów kształcenia	Związki z KEK	Związki z OEK
01.	posiada podstawową wiedzę z zakresu dynamiki nieodkształcalnych ciał materialnych.	wykład, ćwiczenia rachunkowe	egzamin cz. pisemna, kolokwium, aktywność podczas ćwiczeń	K_W002+ K_W003+ K_U009+	T1A_W01+ T1A_W03+ T1A_W04+ T1A_W07+ T1A_U09+
02.	potrafi pozyskiwać informacje z literatury, posiada umiejętność samokształcenia się i rozumie potrzebę dokształcania się w zakresie mechaniki ogólnej, potrafi pracować w grupie.	wykład, ćwiczenia rachunkowe	egzamin cz. pisemna, kolokwium, aktywność podczas ćwiczeń	K_K004+	T1A_K04+

Treści kształcenia dla modułu

Sem. TK	Treści kształcenia	Realizowane na	MEK
3 TK01	Dynamika ruchu punktu, zasady Newtona, dynamiczne równania ruchu punktu w różnych układach, zadanie proste i odwrotne dynamiki, przykłady. Pęd i popęd, przykłady. Zasada d'Alemberta opisu ruchu punktu, bryły i układu brył, przykłady.	W01, W02, C01, C02, C03	MEK01 MEK02
3 TK02	Dynamika układów punktów materialnych, środek masy, zasady ruchu środka masy, dynamiczne równania środka masy układu, przykłady. Kręt układu względem bieguny i osi.	W04, W05, C04	MEK01
3 TK03	Geometria mas, masowe momenty bezwładności i dewiacji, główne centralne osie bezwładności.	W06	MEK01
3 TK04	Kolokwium.	C05, C06	MEK01 MEK02
3 TK05	Dynamika ruchu obrotowego bryły. Dynamiczne równania ruchu obrotowego. Dynamika ruchu toczącego się kółka, ruch płaski.	W07, W08, C07, C08	MEK01
3 TK06	Dynamika ruchu układu brył, przykłady.	W09	MEK01
3 TK07	Energia kinetyczna punktu i bryły, układu brył, przykłady.	W10, W11, C10, C11	MEK01
3 TK08	Praca elementarna i całkowita siły i układu sił. Pole potencjalne, potencjał pola, moc chwilowa.	W12, W13, C12, C13	MEK01
3 TK09	Zasady energetyczne opisu ruchu bryły i układu brył, przykłady.	W14, W15, C14, C15	

Strona: 6

Nakład pracy studenta

Forma zajęć	Praca przed zajęciami	Udział w zajęciach	Praca po zajęciach
Wykład (sem. 3)	Przygotowanie do kolokwium: 10.00 godz./sem.	Godziny kontaktowe: 15.00 godz./sem.	Uzupełnienie/studiowanie notatek: 10.00 godz./sem. Studiowanie zalecanej literatury: 10.00 godz./sem.
Ćwiczenia/Lektorat (sem. 3)	Przygotowanie do ćwiczeń: 10.00 godz./sem. Przygotowanie do kolokwium: 15.00 godz./sem.	Godziny kontaktowe: 15.00 godz./sem.	Dokończenia/studiowanie zadań: 10.00 godz./sem.
Konsultacje (sem. 3)	Przygotowanie do konsultacji: 10.00 godz./sem.	Udział w konsultacjach: 10.00 godz./sem.	
Egzamin (sem. 3)	Przygotowanie do egzaminu: 10.00 godz./sem.	Egzamin pisemny: 2.00 godz./sem.	

Strona: 7

Warunki zaliczenia modułu

Student, który zaliczył moduł

na ocenę 3	na ocenę 3.5	na ocenę 4	na ocenę 4.5	na ocenę 5
posiada podstawową wiedzę z zakresu dynamiki nieodkształcalnych ciał materialnych.	nie tylko osiągnął poziom wiedzy i umiejętności wymagany na ocenę 3, ale również co najmniej 50% dodatkowych wymagań na ocenę 4	nie tylko osiągnął poziom wiedzy i umiejętności wymagany na ocenę 3, ale również opanował wymagane zagadnienie w 70%.	nie tylko osiągnął poziom wiedzy i umiejętności wymagany na ocenę 4, ale również co najmniej 50% dodatkowych wymagań na ocenę 5	nie tylko osiągnął poziom wiedzy i umiejętności wymagany na ocenę 4, ale również opanował wymagane zagadnienie w 90%
potrafi pozyskiwać informacje z literatury, posiada umiejętność samokształcenia się i rozumie potrzebę dokończenia się w zakresie mechaniki ogólnej, potrafi pracować w grupie.		Cechuje się określonymi kompetencjami społecznymi		Cechuje się określonymi kompetencjami społecznymi

Student, który osiągnął zakładany poziom wiedzy, posiadał wymagane umiejętności, cechuje się określonymi kompetencjami społecznymi, które są zdefiniowane w efektach kształcenia dla modułu, zalicza moduł kształcenia

Student, który nie osiągnął zakładanych efektów kształcenia, nie zalicza modułu kształcenia

Sposób wystawiania ocen składowych modułu i oceny końcowej

Forma zajęć	Sposób wystawiania oceny podsumowującej
Wykład	Do egzaminu może przystąpić student posiadający zaliczenie z ćwiczeń. Tematyka egzaminu dotyczy treści realizowanych podczas wykładów i ćwiczeń tablicowych.
Ćwiczenia/Lektorat	Zaliczenie na podstawie aktywności na zajęciach oraz pozytywnej oceny wyniku kolokwium.
Ocena końcowa	Pozytywna ocena końcowa jest wystawiana na podstawie pozytywnych ocen ze wszystkich form zajęć prowadzonych w ramach przedmiotu.

Strona: 8

Przykładowe zadania

**Wykład opracowany w oparciu o skrypt:
prof. dr hab. inż. Zenon Hendzel, prof. dr
hab. inż. Wiesław Żylski
„Mechanika Ogólna - DYNAMIKA”**

Wstęp

Dynamika jest to część mechaniki, która zajmuje się ruchem ciał i przyczynami powodującymi ich ruch.

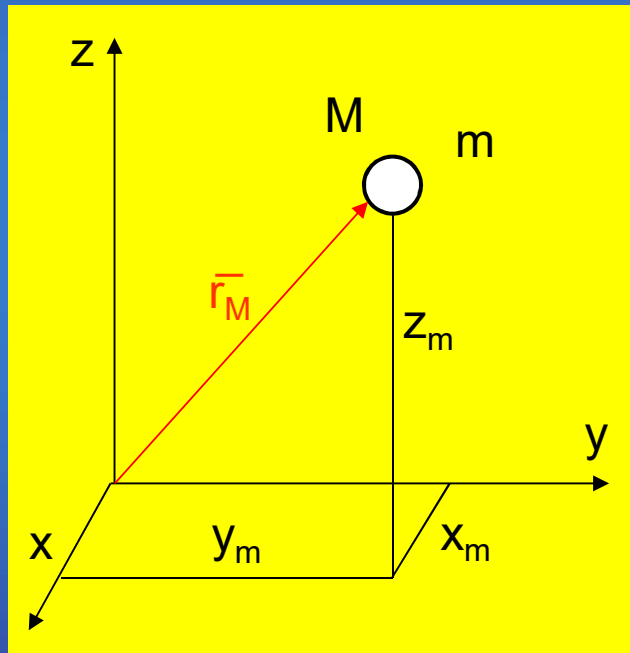
Tradycyjnie dynamikę dzielimy na następujące części:

- dynamikę punktu materialnego,
- dynamikę układu punktów materialnych.

Punkt materialny to najprostszy model ciała stałego, np. mówimy o ruchu punktu M jako ustroju bezwymiarowego, któremu przypisano masę m .

Jeżeli opisujemy ruch jednego punktu o masie m , taki punkt nazwiemy np. M i wówczas ruch tego punktu będzie jednoznacznie określony w układzie xyz jeżeli podamy :

położenie w każdej chwili wektora promienia \bar{r}_M , który jest funkcją czasu, czyli:



Rys. 1.4

$\bar{r}_m = \bar{r}_m(t)$ a w postaci analitycznej zapisujemy go jako:

$$r_M = x_M \bar{i} + y_M \bar{j} + z_M \bar{k} \quad \text{gdzie}$$

$x_M, y_M, z_M \rightarrow f(t)$ współrzędne opisujące położenie punktu materialnego w czasie t , względem przyjętego układu odniesienia xyz

$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ to wektory jednostkowe osi xyz

Wiadomo, że opisując ruch punktu, można przyjmować inne układy odniesienia, np. naturalny układ współrzędnych lub biegunowy układ współrzędnych (patrz kinematyka).

II. Zasady dynamiki

W rozważaniach naszych przyjmujemy za podstawę zasady mechaniki klasycznej sformułowane przez Newtona.

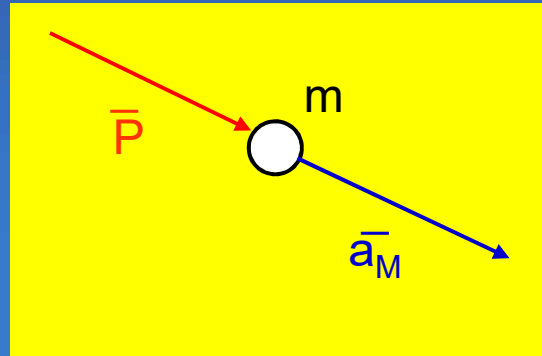
Zasady te sformułowane zostały przyjmując następujące założenia:

- ruch punktu, którego masa jest stała, odbywa się względem nieruchomego układu odniesienia,
- pomiar czasu ruchu jest pomiarem czasu absolutnego (bezwzględnego).

Zasady Newtona to znane 3 zasady.

2. Druga zasada

Jeżeli na punkt materialny m działa siła \bar{P} to nadaje punktowi materialnemu przyspieszenie \bar{a}_M .



Rys. 1.5

Zależność między masą punktu m , przyspieszeniem \bar{a}_M , a działającą siłą \bar{P} zapisujemy w postaci zależności:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{P} \quad (1)$$

gdzie siła \bar{P} to siła wypadkowa wszystkich sił działających na masę co zapisano w postaci (2) :

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \quad (2)$$

Z podanej zasady wynika, również że przyczynami powodującymi ruch masy są zawsze działające siły.

Jeżeli wypadkowa układu sił jest równa zero, czyli zachodzi

$$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i = \bar{0}$$

to

$$m\bar{a} = \bar{0}$$

Wynika stąd, że masa sama nie może nadać sobie przyspieszenia (jest to tzw. **zjawisko bezwładności**).

1. DYNAMIKA PUNKTU MATERIALNEGO.

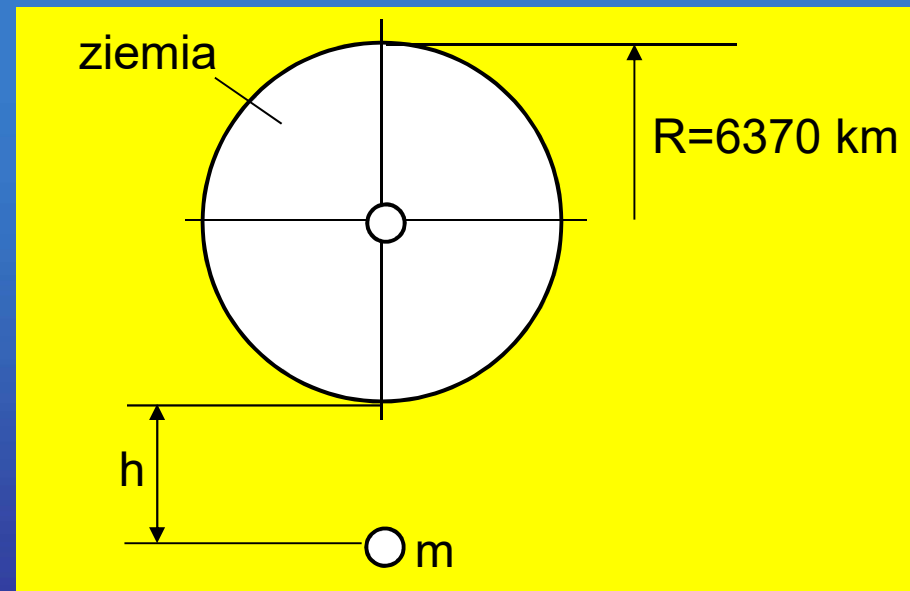
W tej części będziemy opisywali zjawisko ruchu punktu materialnego.

1.1) Siły działające na punkt materialny.

Siły te możemy podzielić na **czynne i bierne** (siły reakcji). Wśród sił czynnych jest zawsze **siła przyciągania ziemskiego** bo wynika to z faktu, że punkt materialny, którego ruch opisujemy znajduje się w polu ziemskim.

Przyjmujemy, że Ziemia jest kulą o promieniu **R** i masie **M**

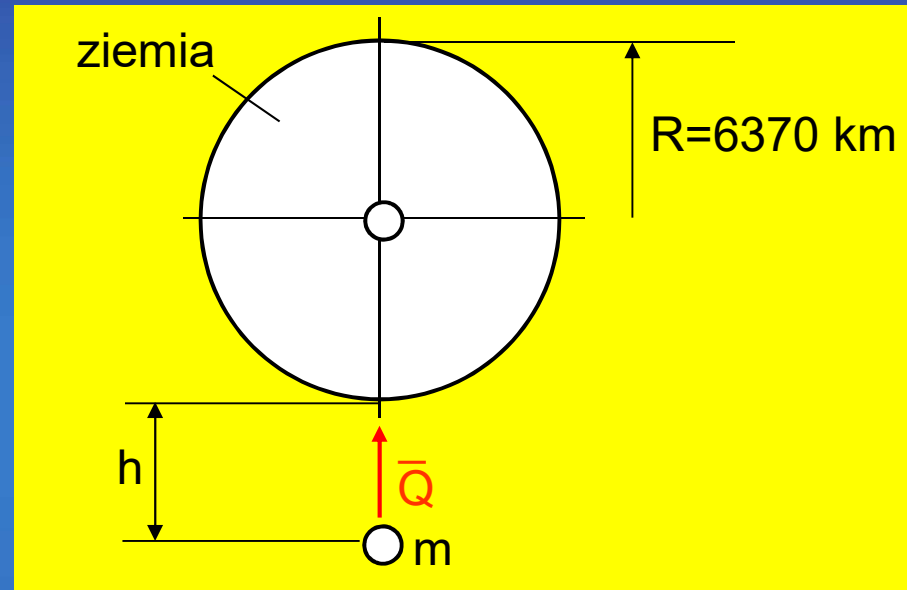
a punkt materialny, którego masa **m** znajduje się w odległości **h** od powierzchni Ziemi.



Rys. 1.6

Okazuje się, że wartość siły ciężkości określić możemy z zależności:

$$Q = m \cdot g \frac{R^2}{(R + h)^2} \quad (3)$$



Rys. 1.6

Jeżeli opisujemy ruch masy **m** w niewielkiej odległości od powierzchni Ziemi to wówczas **$h \ll R$** i wtedy dla celów praktycznych można przyjąć że, **Q** będzie równe sile ciężkości.

Wartość siły ciężkości masy m zapisujemy w postaci:

$$Q = m \cdot g = const \quad (4)$$

z tej zależności określamy :

$$m = \frac{Q}{g} = const \quad (5)$$

gdzie:

Q [N] - wartość siły przyciągania ziemskiego,

m [kg] - masa punktu materialnego pozostającego w polu ziemskim,

$g \left[\frac{m}{s^2} \right] = 9.81 \left[\frac{m}{s^2} \right] \approx 10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ średnie przyspieszenie ziemskie, które w różnych punktach na powierzchni ziemi jest różne, a które można przyjmować jako równe $10 \left[\frac{m}{s^2} \right]$

czyli dwie masy m_1 i m_2 mają ciężary różne:

$$\left. \begin{array}{l} Q_1 = m_1 \cdot g \\ Q_2 = m_2 \cdot g \end{array} \right\} - \text{ciężary mas} \quad (6)$$

Stąd iloraz ciężarów

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{m_1}{m_2}$$

jest wprost proporcjonalny do ich mas.

1.2) Różniczkowe równania ruchu punktu materialnego.

Na punkt materialny m działa układ sił $P_1 \dots P_n$, czyli na masę działa siła wypadkowa \bar{P} .

Siła wypadkowa działająca na punkt materialny wynosi:

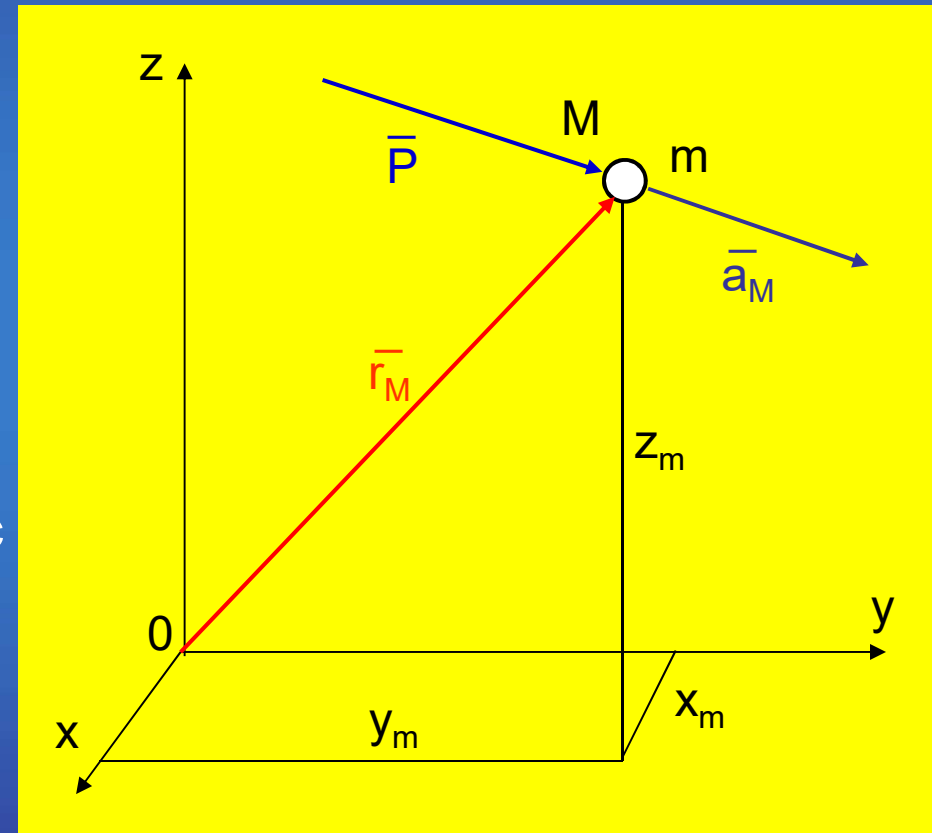
$$\bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i$$

Równanie wektorowe opisujące ruch punktu materialnego ma postać wynikającą z:

$$m \cdot \bar{a}_M = \bar{P} = \sum_{i=1}^n \bar{P}_i \quad (7)$$

gdzie:

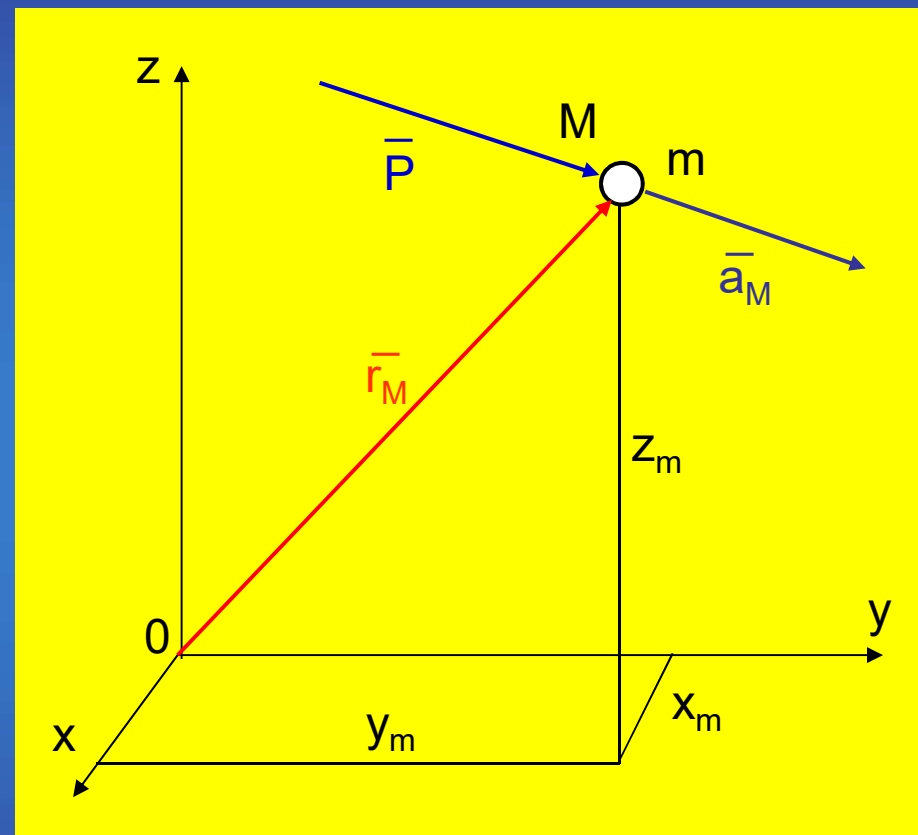
\bar{a}_M — wektor przyspieszenia punktu M



Rys. 1.7

Równanie (7) rzutujemy na osie układu odniesienia i dostaniemy wówczas:

$$\left\{ \begin{array}{l} m \cdot \ddot{x}_M = P_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} \\ m \cdot \ddot{y}_M = P_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} \\ m \cdot \ddot{z}_M = P_z = \sum_{i=1}^n P_{iz} \end{array} \right. \quad (9)$$



Rys. 1.7

(9) to tzw. różniczkowe równania ruchu masy lub nazywamy je również dynamicznymi równaniami ruchu punktu M o masie m .

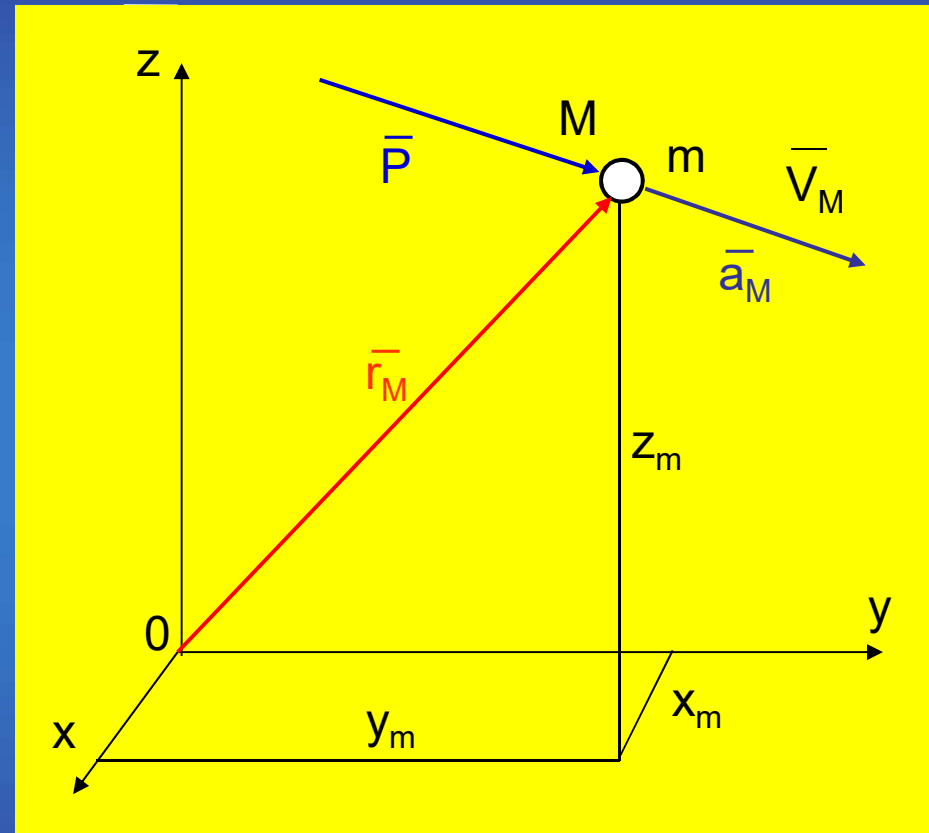
Równania (9) to podstawa opisu zjawiska ruchu punktu materialnego.

Siły działające na punkt materialny mogą zależeć od położenia punktu materialnego czyli wektora \vec{r}_M , prędkości \vec{v}_M lub czasu t , co można zapisać w postaci zależności:

$$\vec{P} = \vec{P}(\vec{r}_M, \vec{v}_M, t) \quad (10)$$

Rzutuując (10) na osie układu współrzędnych, dostaniemy prawe strony układu równań (9) czyli będą zapisane jako:

$$\begin{cases} P_x = P_x(x_M, y_M, z_M, \dot{x}_M, \dot{y}_M, \dot{z}_M, t) \\ P_y = P_y(x_M, y_M, z_M, \dot{x}_M, \dot{y}_M, \dot{z}_M, t) \\ P_z = P_z(x_M, y_M, z_M, \dot{x}_M, \dot{y}_M, \dot{z}_M, t) \end{cases} \quad (11)$$



Rys. 1.7

Ponieważ równania różniczkowe muszą być poprawnie ułożone, w tym celu przy ich układaniu należy postępować w następującej kolejności:

1) **przyjąć** układ odniesienia,

2) **zaznaczyć na rysunku wszystkie siły** działające na punkt materialny, (co wynika zawsze z treści zadania), zaznaczyć na rysunku, w którą stronę względem danej osi przemieszcza się punkt materialny,

3) **ułożyć równania (9) wg. zasady**: lewe strony równań zapisujemy jako symbol, natomiast prawe strony rozpisujemy następująco; siły powodujące założony ruch dają rzuty dodatnie, siły przeszkadzające w ruchu dają rzuty ujemne,

4) **następnie dokładnie podajemy** również informacje (11), czyli informacje jakimi funkcjami są siły działające na masę m (w równaniu wynikającym z treści zadania),

5) **następnie rozwiązujemy**, równania różniczkowe (9).

Rozwiązując równania (9) spotykamy się tu z dwoma zagadnieniami dynamiki:

- **zadanie odwrotne dynamiki (znamy parametry ruchu masy, szukamy wartości działających sił),**
- **zadanie proste dynamiki (znamy działające siły, szukamy parametrów kinematycznych ruchu).**

Przykłady

Dziękuję