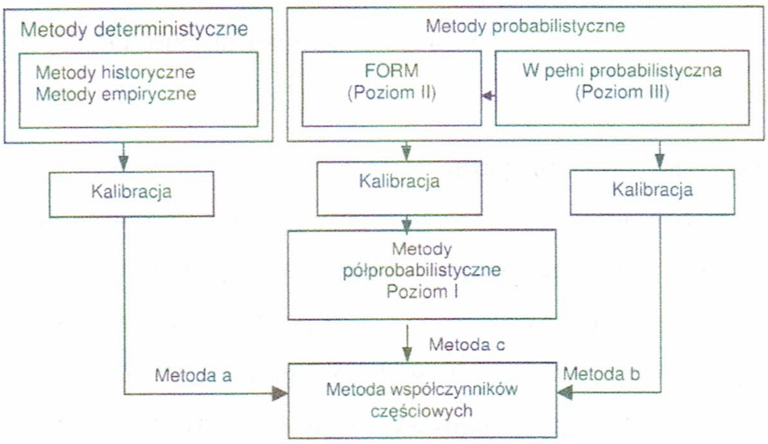
MIARY NIEZAWODNOŚCI KONSTRUKCJI

Bezpieczeństwo i niezawodność są podstawowymi pojęciami projektowania, realizacji i eksploatacji budowli. Niezawodność w znaczeniu ogólnym jest to zdolność konstrukcji do pełnienia projektowanych funkcji w określonym czasie eksploatacji. Bezpieczeństwo w znaczeniu ogólnym oznacza brak zagrożenia życia i zdrowia ludzi oraz strat ekonomicznych, społecznych i ekologicznych w projektowanym czasie użytkowania. W załączniku C do normy PN - EN 1990 przedstawiono wiarygodne metody sprawdzania niezawodności konstrukcji oraz omówiono ich algorytmy statystyczne i probabilistyczne.



Rysunek C1 – Przegląd metod niezawodności

- **Metoda półprobabilistyczna**

Najbardziej znaną metodą półprobabilistyczną poziomu I jest metoda stanów granicznych. Metody poziomu I można określić jako metody obliczeń, w których wymagana niezawodność konstrukcji oraz poszczególnych jej elementów jest zapewniana poprzez zastosowanie częściowych współczynników bezpieczeństwa. Współczynniki te modyfikują charakterystyczne wartości zmiennych decydujących o stanie konstrukcji. Według zaleceń podstawowej normy środkiem obliczeniowym umożliwiającym osiągnięcie satysfakcjonującego poziomu niezawodności jest zastosowanie odpowiedniego zestawu współczynników częściowych powiązanych ze sobą określonymi zależnościami. Współczynniki te są określane na podstawie kalibracji z wykorzystaniem doświadczeń budowlanych oraz z wyników probabilistycznych analiz bezpieczeństwa budowli. Niepewność związana z odpowiednimi współczynniki γ_i dotyczy:

- właściwości materiałów konstrukcyjnych γ_m,
- modelu obliczeniowego nośności γ_{Rd},
- reprezentatywnych wartości oddziaływań γ_f,
- modelu obliczeniowego oddziaływań i ich efektów γ_{Sd}.

W formie analitycznej współczynniki materiałowe i związane z oddziaływaniami łączą się z odpowiednimi współczynnikami niepewności modelowej w następującej postaci:

$$\gamma_M = \gamma_m \cdot \gamma_{Rd} \quad \text{i} \quad \gamma_F = \gamma_f \cdot \gamma_{Sd}$$

W podstawowej metodzie probabilistycznej poziomu I sformułowano warunki stanu granicznego, wśród których główny warunek stanu granicznego nośności przedstawia się następująco:

$$E_d \leq R_d$$

gdzie:

E_d – wartość obliczeniowa efektu oddziaływań, R_d – wartość obliczeniowa odpowiedniej nośności.

W metodach poziomu I stosuje się niekiedy jako dodatkową miarę niezawodności tzw. Konwencjonalny współczynnik bezpieczeństwa $\gamma_k = R_k/E_k$.

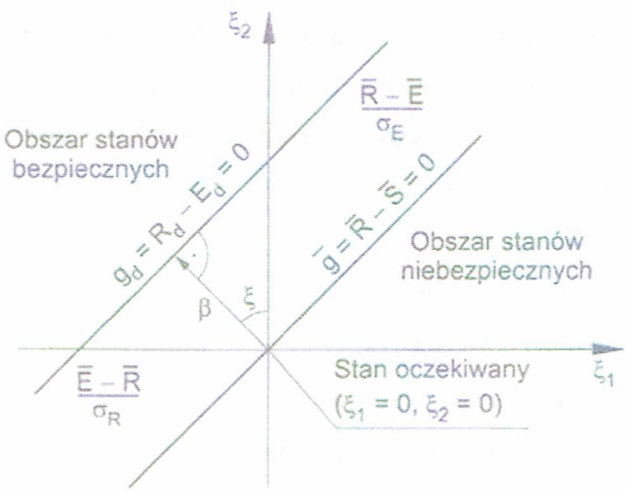
- **Metody uproszczone probabilistyczne**

Uproszczone metody probabilistyczne poziomu II umożliwiają ilościową ocenę niezawodności konstrukcji. Zmienna losowa w tych metodach scharakteryzowana jest pierwszym i drugim momentem rozkładu prawdopodobieństwa. Najczęściej stosowaną, popularną miara bezpieczeństwa w metodach półprobabilistycznych jest wskaźnik niezawodności β. W najprostszym przypadku gdy w równaniach stanu granicznego rozważane są dwie nieskorelowane zmienne podstawowe: losowa nośność R i losowy efekt oddziaływań E, interpretację wskaźnika β można przedstawić jako odległość prostej stanów granicznych od początku układu współrzędnych, reprezentującego stan oczekiwany konstrukcji.

$$\beta = \frac{\bar{g}}{\sigma_g} = \frac{\bar{R} - \bar{E}}{\sqrt{\sigma_R^2 + \sigma_E^2}}$$

gdzie:

$\bar{R}, \bar{E}$ – wartości średnie zmiennych losowych; σ_R, σ_E – odchylenia standardowe zmiennych losowych.



Warunek niezawodności w postaci nieliniowej (funkcję stanu granicznego g) można zapisać w postaci:

$$g = R - E = g(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$$

Wartość oczekiwaną $\bar{g}$ i odchylenie standardowe σ_g zmiennej losowej g, niezbędne do obliczenia wskaźnika niezawodności β, można aproksymować, rozwijając nieliniową funkcję stanu granicznego konstrukcji w szereg Taylora i pozostawiając tylko człony liniowe rozwinięcia. W zależności od wyboru punktu, w którego otoczeniu rozwija się warunek niezawodności w szereg Taylora, uzyskuje się różne rozwiązania: rozwinięcie w otoczeniu punktu centralnego i rozwinięcie wokół punktu obliczeniowego. W przypadku pierwszego rozwinięcia uzyskujemy wskaźnik niezawodności Cornela. Nie jest on jednak obiektywny, ponieważ wynik obliczeń zależy od wyboru punktu linearyzacji. Z kolei linearyzacja w otoczeniu punktu obliczeniowego prowadzi do rozwiązania niezmienniczego i uzyskany w ten sposób wskaźnik niezawodności β nazywany jest wskaźnikiem Hasofera – Linda – jest to metoda FORM. Dla metody FORM sformułowano zależności pomiędzy wartościami wskaźnika niezawodności β a wartościami częściowych współczynników bezpieczeństwa, co było podstawą norm projektowych. W załączniku B normy PN-EN 1990 podano zalecenia dotyczące zarządzania niezawodnością obiektów budowlanych.

Definicja klas konsekwencji [PN-EN 1990]

Klasa konsekwencji	**Opis klasy**	**Przykłady konstrukcji budowlanych i inżynierskich**
CC3	Wysokie zagrożenie życia ludzkiego lub bardzo duże konsekwencje ekonomiczne, społeczne i środowiskowe	Widownie, budynki użyteczności publicznej, których konsekwencje zniszczenia są wysokie
CC2	Przeciętne zagrożenie życia ludzkiego lub znaczne konsekwencje ekonomiczne, społeczne i środowiskowe	budynki mieszkalne i biurowe oraz budynki użyteczności publicznej których konsekwencje zniszczenia są przeciętne
CC1	Niskie zagrożenie życia ludzkiego lub małe lub nieznaczne konsekwencje społeczne, ekonomiczne i środowiskowe	budynki rolnicze, w których ludzie zazwyczaj nie przebywają oraz szklarnie

Zdefiniowanym klasom konsekwencji CC odpowiadają klasy niezawodności: RC1 – RC3. Zalecane minimalne wartości wskaźnika niezawodności β, powiązane z klasami niezawodności podano również w PN – EN 1990.

Minimalne wartości wskaźnika niezawodności dla stanów granicznych nośności i maksymalne prawdopodobieństwa zniszczenia [PN-EN 1990]

Klasa niezawodności	Minimalne wartości β / maksymalne wartości P_f	
	okres odniesienia 1 rok	okres odniesienia 50 lat
RC3	$\beta = 5{,}2;\ P_f \cong 9{,}9 \cdot 10^{-8}$	$\beta = 4{,}3;\ P_f \cong 8{,}5 \cdot 10^{-6}$
RC2	$\beta = 4{,}7;\ P_f \cong 1{,}3 \cdot 10^{-6}$	$\beta = 3{,}8;\ P_f \cong 7{,}1 \cdot 10^{-5}$
RC1	$\beta = 4{,}2;\ P_f \cong 1{,}2 \cdot 10^{-5}$	$\beta = 3{,}3;\ P_f \cong 4{,}8 \cdot 10^{-4}$

- **Charakterystyki statystyczne zmiennych podstawowych**

Współczynnik zmienności

Nośność konstrukcji zależy od nośności elementów i połączeń, które są zwykle funkcjami właściwości materiałów konstrukcyjnych, wymiarów geometrycznych oraz kształtu przekrojów i elementów. W projektowaniu wielkości te są często traktowane jako zdeterminowane, ale wyniki obserwacji i badań wskazują na ich losowy charakter, który przejawia się znacznym niekiedy rozproszeniem wartości.

Tablica 4.73. Typowe wartości współczynników zmienności właściwości materiałów, wymiarów geometrycznych i nośności wybranych elementów z betonu

Materiał/element	Właściwość lub rodzaj elementu	Współczynnik zmienności
Beton	wytrzymałość na ściskanie wytrzymałość na rozciąganie moduł sprężystości odkształcenie graniczne (ściskanie) energia pękania (rozciąganie)	0,06–0,18 0,15–0,25 0,07–0,26 0,15–0,33 0,06–0,33
Stal zbrojeniowa	granica plastyczności	0,02–0,09
Stal sprężająca	wytrzymałość na rozciąganie	0,01–0,05

Na podstawie wyników badań statystycznych w literaturze i normach projektowania przyjmuje się najczęściej, że podstawowe oddziaływania na budynki można uznać za zmienne losowe o rozkładach (rys. 4.132) i współczynnikach zmienności v:

— stałe i quasi-stałe: rozkład normalny (N), $v = 0{,}06–0{,}10$,
— zmienne długotrwałe: rozkład gamma (Γ), $v = 0{,}18–0{,}40$,
— zmienne krótkotrwałe: rozkład wykładniczy (E), $v = 0{,}20–0{,}80$,
— śnieg, wiatr: rozkład Gumbela (G), $v = 0{,}40–1{,}00$.

Oszacowanie wartości charakterystycznych własności wg załącznika D PN-EN 1990

(1) Wartość obliczeniową właściwości X uzyskuje się z wzoru:

$$X_d = \eta_d \frac{X_{k(n)}}{\gamma_m} = \frac{\eta_d}{\gamma_m} m_X \{1 - k_n V_X\} \qquad \boxed{X_m = X_k/(1 - 1{,}645 v_x)} \qquad \text{(D.1)}$$

gdzie:

η_d – wartość obliczeniowa współczynnika konwersji.

UWAGA Ocena danej wartości współczynnika konwersji bardzo zależy od rodzaju badań i rodzaju materiału.

Wartość k_n można znaleźć w tablicy D1.

(2) Przy korzystaniu z tablicy D1 należy rozważyć jeden z dwóch następujących przypadków:

– Wiersz „V_X znane" zaleca się stosować jeśli współczynnik zmienności V_X, albo jego rzeczywista górna granica, jest znana na podstawie informacji wcześniejszych.

UWAGA Informacje wcześniejsze mogą być uzyskane z oceny poprzednich badań w porównywalnych sytuacjach. Co jest „porównywalnym", wymaga określenia na podstawie oceny inżynierskiej (patrz D7.1(3)).

– Wiersz: „V_X nieznane" zaleca się stosować jeśli współczynnik zmienności V_X a *priori* na podstawie wcześniejszych badań i jest estymowany z próby według wzoru:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum (x_i - m_x)^2 \qquad \text{(D.2)}$$

$$V_x = s_x / m_x \qquad \text{(D.3)}$$

(3) Współczynnik częściowy γ_m zaleca się ustalać zgodnie z zakresem zastosowania wyników badań.

Tablica D1 – Wartości k_n dla 5 % wartości charakterystycznej

n	1	2	3	4	5	6	8	10	20	30	∞
V_X znane	2,31	2,01	1,89	1,83	1,80	1,77	1,74	1,72	1,68	1,67	1,64
V_X nieznane	–	–	3,37	2,63	2,33	2,18	2,00	1,92	1,76	1,73	1,64

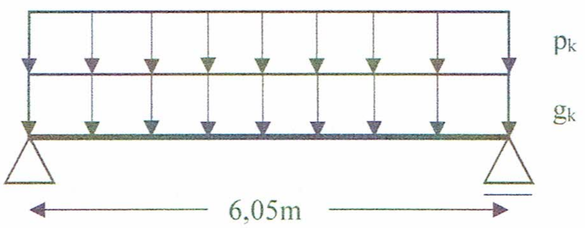
UWAGA 1 Tablicę opracowano przy założeniu rozkładu normalnego.

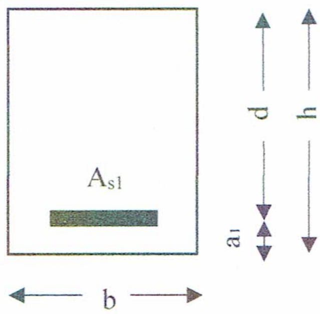
Przykład. Dla podanych założeń wyznaczyć następujące miary niezawodności belki zginanej:

a) odstęp bezpieczeństwa i globalny współczynnik bezpieczeństwa

b) wskaźnik niezawodności Cornela

c) wskaźnik niezawodności Hasofera – Linda





$b = 0{,}18\text{m}$

$h = 0{,}40\text{m}$

$a_1 = 0{,}04\text{m}$

$A_{s1} = 1206\text{mm}^2$

Dane:

$p_k = 8{,}26\ kN/m;\ v_p = 0{,}3$

$g_k = 7{,}101\ kN/m;\ v_g = 0{,}05$

Beton: C20/25 → $f_{ck} = 20\ MPa$

$v_c = 0{,}17$

Stal: → $f_{yk} = 500\ MPa$

$v_y = 0{,}05$

Losowe zmienne stanu:

- obciążenia (charakterystyczne, obliczeniowe, średnie):

$$p_k = 8{,}26kN/m;\ p_d = \gamma_f \cdot p_k = 1{,}50 \cdot 8{,}26kN/m = 12{,}39\ kN/m$$

$$p_m = p_k/(1 + 1{,}645v_p) = 8{,}26/(1 + 1{,}645 \cdot 0{,}30) = 5{,}53\ kN/m$$

$$\sigma_p = p_m \cdot v_p = 5{,}53 \cdot 0{,}30 = 1{,}66\ kN/m$$

$$g_k = 7{,}101kN/m;\ g_d = \gamma_f \cdot g_k = 1{,}35 \cdot 7{,}101kN/m = 9{,}59kN/m$$

$$g_m = g_k/(1 + 1{,}645v_g) = 7{,}101/(1 + 1{,}645 \cdot 0{,}05) = 6{,}56\ kN/m$$

$$\sigma_g = g_m \cdot v_g = 6{,}56 \cdot 0{,}05 = 0{,}33\ kN/m$$

- właściwości materiałów (charakterystyczne, obliczeniowe, średnie):

beton C20/25:

$f_{ck} = 20MPa;\ \gamma_c = 1{,}4;\ \ f_{cd} = f_{ck}/\gamma_c = 20/1{,}4 = 14{,}28\ MPa$

$f_{cm} = f_{ck} + 8 = 20 + 8 = 28\ MPa;$

Fragment tabeli 3.1 PN-EN 1992-1-1 – właściwości betonu

Klasy wytrzymałości betonu															Zależności analityczne/Wyjaśnienie
f_{ck} (MPa)	12	16	20	25	30	35	40	45	50	55	60	70	80	90	
$f_{ck,cube}$ (MPa)	15	20	25	30	37	45	50	55	60	67	75	85	95	105	
f_{cm} (MPa)	20	24	28	33	38	43	48	53	58	63	68	78	88	98	$f_{cm} = f_{ck} + 8$ (f_{ck} w MPa)

$\sigma_c = f_{cm} \cdot v_c = 28 \cdot 0{,}17 = 4{,}76\ MPa$

Stal zbrojeniowa:

$f_{yk} = 500\ MPa;\ \ f_{yd} = f_{yk}/\gamma_s = 500/1{,}15 = 434{,}78\ MPa$

$f_{ym} = f_{yk}/(1 - 1{,}645 v_y) = 500/(1 - 1{,}645 \cdot 0{,}05) = 544{,}81\ MPa$ (zał. D PN-EN 1990)

$\sigma_y = f_{ym} \cdot v_y = 544{,}81 \cdot 0{,}05 = 27{,}24\ MPa$

Rozwiązanie:

a) **odstęp bezpieczeństwa i globalny współczynnik bezpieczeństwa**

Nośność płyty obliczona metodą uproszczoną – miarą bezpieczeństwa w metodach poziomu 1 może być odstęp bezpieczeństwa:

$$\Delta = R_d - E_d \geq 0$$

Belkę uważa się za niezawodną, jeżeli obliczeniowa nośność miarodajnego przekroju R_d jest nie mniejsza niż obliczeniowa wartość efektu oddziaływań $R_d \geq E_d$.

Nośność płyty R_d:

$$R_d = M_{Rd} = A_{s1} \cdot f_{yd} \cdot d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_{s1}}^2 \cdot {f_{yd}}^2}{b \cdot f_{cd}} = 0{,}001206m^2 \cdot 434{,}78 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0{,}36m$$

$$-0{,}5 \cdot \frac{(0{,}001206m)^2 \cdot (434{,}78 \cdot 1000kN/m^2)^2}{0{,}18m \cdot 14{,}28 \cdot 1000kN/m^2} = 135{,}28kN/m$$

Obliczeniowa wartość efektu oddziaływań:

$$E_d = M_{Ed} = 0{,}125\ {l_{eff}}^2(g_d + p_d) = 0{,}125 \cdot\ (6{,}05m)^2(9{,}59kN/m + 12{,}39kN/m) = 100{,}56kNm$$

Z uwagi na to, że $R_d = 135{,}28kN/m > E_d = 100{,}56kNm$ płytę można uznać za niezawodną, ale nie można ilościowo ocenić miary niezawodności.

Przydatną w praktyce, ilościową miarą niezawodności elementów żelbetowych jest globalny współczynnik bezpieczeństwa, który ma jednak czysto empiryczny charakter:

$$\gamma = \frac{R_k}{E_k}$$

$$R_k = A_{s1} \cdot f_{yk} \cdot d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_{s1}}^2 \cdot {f_{yk}}^2}{b \cdot f_{ck}} = 0{,}001206m^2 \cdot 500 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0{,}36m$$

$$-0{,}5 \cdot \frac{(0{,}001206m)^2 \cdot 500 \cdot 1000kN/m^2}{0{,}18m \cdot 20 \cdot 1000kN/m^2} = 166578750Nmm = 166{,}58kN/m$$

$$E_k = 0{,}125\, {l_{eff}}^2(g_k + p_k) = 0{,}125 \cdot\ (6{,}05m)^2(8{,}26kN/m + 7{,}101kN/m) = 70{,}28kNm$$

$$\gamma = \frac{R_k}{E_k} = \frac{166{,}58kN/m}{70{,}28kNm} = 2{,}4 > 1{,}6$$

Według historycznej normy PN-56/B-03260 oznacza, że belka jest bezpieczna.

b) wskaźnik niezawodności Cornela

Warunek stanu granicznego ma postać nieliniową.

$$\Delta = R - E$$

$$R = A_{s1} \cdot f_y \cdot d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_{s1}}^2 \cdot {f_y}^2}{b \cdot f_c}$$

$$E = 0{,}125\, {l_{eff}}^2(g + p)$$

$$\Delta = A_{s1} \cdot f_y \cdot d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_{s1}}^2 \cdot {f_y}^2}{b \cdot f_c} - 0{,}125\, {l_{eff}}^2(g + p)$$

Wartość oczekiwaną $\bar{\Delta}$ i odchylenie standardowe σ_Δ, niezbędne do obliczenia wskaźnika niezawodności β, można aproksymować rozwijając Δ w szereg Taylora i pozostawiając tylko człony liniowe rozwinięcia. Rozwinięcie funkcji Δ w szereg Taylora w otoczeniu punktu centralnego.

Podstawiamy to funkcji stanu granicznego wartości średnie zmiennych losowych:

$$\bar{\Delta} = A_{s1} \cdot f_{ym} \cdot d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_{s1}}^2 \cdot {f_{ym}}^2}{b \cdot f_{cm}} - 0{,}125\, {l_{eff}}^2(g_m + p_m)$$

$$\bar{\Delta} = 0{,}001206m^2 \cdot 544{,}81 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0{,}36m - 0{,}5 \cdot \frac{(0{,}001206m)^2 \cdot (544{,}81 \cdot 1000kN/m^2)^2}{0{,}18m \cdot 28 \cdot 1000kN/m^2}$$

$$- 0{,}125 \cdot (6{,}05m)^2 \cdot (6{,}56 + 5{,}53)kN/m = 138{,}39\ kNm$$

$$\sigma_\Delta = \sqrt{\left(\sigma_y \frac{\partial\Delta}{\partial f_y}_{f_y=f_{ym}}\right)^2 + \left(\sigma_c \frac{\partial\Delta}{\partial f_c}_{f_c=f_{cm}}\right)^2 + \left(\sigma_g \frac{\partial\Delta}{\partial g}_{g=g_m}\right)^2 + \left(\sigma_p \frac{\partial\Delta}{\partial p}_{p=p_m}\right)^2}$$

Liczymy poszczególne pochodne. Pierwszy wzór to pochodna funkcji stanu granicznego po f_{ym}:

$$\frac{\partial\Delta}{\partial f_y}_{f_y=f_{ym}} = A_{s1}d - \frac{2{A_{s1}}^2 f_{ym}}{2bf_{cm}} = 0{,}001206m^2 \cdot 0{,}36m - \frac{2(0{,}001206m)^2 \cdot 544{,}81 \cdot 1000kN/m^2}{2 \cdot 0{,}18 \cdot 28 \cdot 1000kN/m^2}$$

$$= 0{,}000262544m^3$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial f_c}_{f_c=f_{cm}} = \frac{{A_{s1}}^2 {f_{ym}}^2}{2b{f_{cm}}^2} = \frac{(0{,}001206m)^2 \cdot (544{,}81 \cdot 1000kN/m^2)^2}{2 \cdot 0{,}18 \cdot (28 \cdot 1000kN/m^2)^2} = 0{,}0016696m^3$$

$$\frac{\partial\Delta}{\partial g}_{g=g_m} = \frac{\partial\Delta}{\partial p}_{p=p_m} = -0{,}125\ {l_{eff}}^2 = -4{,}5753125m^2$$

$$\sigma_\Delta = \sqrt{(27{,}24 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0{,}000262544m^3)^2 + (4{,}76 \cdot 1000kN/m^2 \cdot 0{,}0016696m^3)^2 +}$$

$$\sqrt{+(0{,}33kN/m \cdot (-4{,}5753125m^2))^2 + (1{,}66kN/m \cdot (-4{,}5753125m^2))^2} = 13{,}20\ kNm$$

$$\beta = \frac{\bar{\Delta}}{\sigma_\Delta} = \frac{138{,}39\ kNm}{13{,}20\ kNm} = 10{,}48$$

c) wskaźnik niezawodności Hasofera Linda

Sprawdzenie niezawodności belki żelbetowej uproszczoną metodą probabilistyczną. Warunek stanu granicznego ma postać:

$$\Delta = R - E = A_{s1} \cdot f_y \cdot d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_{s1}}^2 \cdot {f_y}^2}{b \cdot f_c} - 0{,}125\ {l_{eff}}^2(g + p)$$

Rozwinięcie funkcji Δ w szereg Taylora w otoczeniu punktu obliczeniowego dokonano wprowadzając zmienne standaryzowane ξ według zależności:

$$\xi_i = \frac{X_{id} - X_{im}}{\sigma_i} \rightarrow X_{id} = X_{im} + \xi_i \cdot \sigma_i$$

Założenie:

$\sigma_1 = \sigma_y$; $\sigma_2 = \sigma_c$; $\sigma_3 = \sigma_g$; $\sigma_4 = \sigma_p$

$$\xi_1 = \frac{f_{yd} - f_{ym}}{\sigma_y} \rightarrow f_{yd} = f_{ym} + \xi_1 \cdot \sigma_y$$

$$\xi_2 = \frac{f_{cd} - f_{cm}}{\sigma_c} \rightarrow f_{cd} = f_{cm} + \xi_2 \cdot \sigma_c$$

$$\xi_3 = \frac{g_d - g_m}{\sigma_g} \rightarrow g_d = g_m + \xi_3 \cdot \sigma_g$$

$$\xi_4 = \frac{p_d - p_m}{\sigma_p} \rightarrow p_d = p_m + \xi_4 \cdot \sigma_p$$

Warunek niezawodności we współrzędnych standaryzowanych ma postać:

$$\Delta = R - E = A_s \cdot f_y \cdot d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_s}^2 \cdot {f_y}^2}{b \cdot f_c} - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 (g + p)$$

podstawiamy zmienne standaryzowane

$$\Delta = A_s(f_{ym} + \xi_1 \sigma_y)d - 0{,}5 \cdot \frac{{A_s}^2 (f_{ym} + \xi_1 \sigma_y)^2}{b(f_{cm} + \xi_2 \sigma_c)} - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 (g_m + \xi_3 \sigma_g + p_m + \xi_4 \sigma_p)$$

$$\Delta = A_s d f_{ym} + A_s \xi_1 \sigma_y d - \frac{{A_s}^2 {f_{ym}}^2 + 2{A_s}^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + {A_s}^2 {\xi_1}^2 {\sigma_y}^2}{2b f_{cm} + 2b \xi_2 \sigma_c} - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 g_m$$

$$-0{,}125\, {l_{eff}}^2 \xi_3 \sigma_g - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 p_m - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 \xi_4 \sigma_p$$

Po rozwinięciu funkcji Δ w szereg Taylora pozostawia się tylko człony liniowe.

$$\Delta({\xi_1}^*; {\xi_2}^*; {\xi_3}^*; {\xi_4}^*) = \sum_{i=1}^{4} (\xi_i - {\xi_i}^*) \frac{\partial \Delta}{\partial \xi_i}\bigg|_{\xi_i = {\xi_i}^*} = \sum_{i=1}^{4} (\xi_i - {\xi_i}^*) a_i = 0$$

Liczymy poszczególne pochodne:

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_1}\bigg|_{\xi_1 = {\xi_1}^*} = a_1 = A_s \sigma_y d - \frac{2{A_s}^2 f_{ym} \sigma_y + {A_s}^2 {\sigma_y}^2 2\xi_1}{2b f_{cm} + 2b \xi_2 \sigma_c}$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \xi_2}\bigg|_{\xi_2 = {\xi_2}^*} = a_2 = 2b\sigma_c \frac{{A_s}^2 {f_{ym}}^2 + 2{A_s}^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + {A_s}^2 {\xi_1}^2 {\sigma_y}^2}{(2b f_{cm} + 2b \xi_2 \sigma_c)^2}$$

$$a_3 = -0{,}125\, {l_{eff}}^2 \sigma_g = -0{,}125 \cdot (6{,}05m)^2 \cdot 0{,}33kN/m = -1{,}6kNm$$

$$a_4 = -0{,}125\, {l_{eff}}^2 \sigma_p = -0{,}125 \cdot (6{,}05m)^2 \cdot 1{,}66kN/m = -7{,}6kNm$$

Rozwiązania zadania poszukuje się metodą kolejnych przybliżeń w następujący sposób:

a) pierwszy krok iteracji

Wybór początkowych wartości współrzędnych standaryzowanych $\xi_1^{\ 0}$; $\xi_2^{\ 0}$; $\xi_3^{\ 0}$; $\xi_4^{\ 0}$ i obliczenie początkowej wartości wskaźnika niezawodności z zależności:

$$\beta^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (\xi_i^{\ 0})^2}$$

a) drugi krok iteracji

Obliczyć wartości a_i, gdy $i = 1,2,3,4$ dla przyjętych wartości $\xi_i^{\ 0}$, wyznaczyć nowe współrzędne standaryzowane z zależności:

$$\xi_i^{\ 1} = a_i \frac{\sum_{i=1}^{4} a_k^{\ 0} \xi_k^{\ 0} - \Delta(\xi_i^{\ o})}{\sum_{i=1}^{4} (a_k^{\ 0})^2}$$

oraz wskaźnik niezawodności:

$$\beta^1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (\xi_i^{\ 1})^2}$$

a) kolejne kroki iteracji polegają na powtórzeniu drugiego kroku, aż do osiągnięcia ustabilizowanej wartości

$$\beta = min \sqrt{\sum_{i=1}^{4} \xi_i^{\ 2}}$$

Do wyznaczenia wartości β_{min} można skorzystać z Solvera (funkcja EXCEL).

a) pierwszy krok iteracji

Wartości $\xi_i^{\ 0}$ przyjęto jak w metodzie półprobabilistycznej:

$$\xi_1^{\ o} = \frac{f_{yd} - f_{ym}}{\sigma_y} = \frac{434,78 \ - 544,81}{27,24} = -4,04$$

$$\xi_2^{\ 0} = \frac{f_{cd} - f_{cm}}{\sigma_c} = \frac{14,28 - 28}{4,76} = -2,88$$

$$\xi_3^{\ 0} = \frac{g_d - g_m}{\sigma_g} = \frac{9,59 - 6,56}{0,33} = 9,18$$

$$\xi_4^{\ 0} = \frac{p_d - p_m}{\sigma_p} = \frac{12,39 - 5,35}{1,66} = 4,24$$

$$\beta^0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (\xi_i{}^0)^2} = \sqrt{(-4{,}04)^2 + (-2{,}88)^2 + (9{,}18)^2 + (4{,}24)^2} = 11{,}26$$

a) drugi krok iteracji

$$a_1 = A_s\sigma_y d - \frac{2A_s{}^2 f_{ym}\sigma_y + A_s{}^2\sigma_y{}^2 2\xi_1}{2bf_{cm} + 2b\xi_2\sigma_c} = 5{,}12kNm$$

$$a_2 = 2b\sigma_c \frac{A_s{}^2 f_{ym}{}^2 + 2A_s{}^2 f_{ym}\xi_1\sigma_y + A_s{}^2\xi_1{}^2\sigma_y{}^2}{\left(2bf_{cm} + 2b\xi_2\sigma_c\right)^2} = 17{,}83kNm$$

$$a_3 = -1{,}6kNm$$

$$a_4 = -7{,}6kNm$$

$$\Delta = A_s d f_{ym} + A_s\xi_1\sigma_y d - \frac{A_s{}^2 f_{ym}{}^2 + 2A_s{}^2 f_{ym}\xi_1\sigma_y + A_s{}^2\xi_1{}^2\sigma_y{}^2}{2bf_{cm} + 2b\xi_2\sigma_c} - 0{,}125\, l_{eff}{}^2 g_m$$
$$-0{,}125\, l_{eff}{}^2\xi_3\sigma_g - 0{,}125\, l_{eff}{}^2 p_m - 0{,}125\, l_{eff}{}^2\xi_4\sigma_p = 34{,}72kNm$$

$$\xi_1{}^1 = a_1 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k{}^0\xi_k{}^0 - \Delta(\xi_i{}^o)}{\sum_{i=1}^4 (a_k{}^0)^2} = -1{,}93$$

$$\xi_2{}^1 = a_2 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k{}^0\xi_k{}^0 - \Delta(\xi_i{}^o)}{\sum_{i=1}^4 (a_k{}^0)^2} = -6{,}71$$

$$\xi_3{}^1 = a_3 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k{}^0\xi_k{}^0 - \Delta(\xi_i{}^o)}{\sum_{i=1}^4 (a_k{}^0)^2} = 0{,}56$$

$$\xi_4{}^1 = a_3 \frac{\sum_{i=1}^4 a_k{}^0\xi_k{}^0 - \Delta(\xi_i{}^o)}{\sum_{i=1}^4 (a_k{}^0)^2} = 2{,}85$$

$$\beta^1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} (\xi_i{}^1)^2} = \sqrt{(-1{,}93)^2 + (-6{,}71)^2 + (0{,}56)^2 + (2{,}85)^2} = 7{,}56$$

a) trzeci krok iteracji

$$a_1 = A_s\sigma_y d - \frac{2A_s{}^2 f_{ym}\sigma_y + A_s{}^2\sigma_y{}^2 2\xi_1}{2bf_{cm} + 2b\xi_2\sigma_c} = 39{,}31kNm$$

$$a_2 = 2b\sigma_c \frac{A_s{}^2 f_{ym}{}^2 + 2A_s{}^2 f_{ym}\xi_1\sigma_y + A_s{}^2\xi_1{}^2\sigma_y{}^2}{\left(2bf_{cm} + 2b\xi_2\sigma_c\right)^2} = 299{,}85kNm$$

$a_3 = -1{,}6kNm$

$a_4 = -7{,}6kNm$

$$\Delta = A_s d f_{ym} + A_s \xi_1 \sigma_y d - \frac{{A_s}^2 {f_{ym}}^2 + 2{A_s}^2 f_{ym} \xi_1 \sigma_y + {A_s}^2 {\xi_1}^2 {\sigma_y}^2}{2bf_{cm} + 2b\xi_2 \sigma_c} - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 g_m$$

$$-0{,}125\, {l_{eff}}^2 \xi_3 \sigma_g - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 p_m - 0{,}125\, {l_{eff}}^2 \xi_4 \sigma_p = 384{,}20kNm$$

$${\xi_1}^1 = a_1 \frac{\sum_{i=1}^4 {a_k}^0 {\xi_k}^0 - \Delta({\xi_i}^o)}{\sum_{i=1}^4 ({a_k}^0)^2} = -1{,}07$$

$${\xi_2}^1 = a_2 \frac{\sum_{i=1}^4 {a_k}^0 {\xi_k}^0 - \Delta({\xi_i}^o)}{\sum_{i=1}^4 ({a_k}^0)^2} = -8{,}17$$

$${\xi_3}^1 = a_3 \frac{\sum_{i=1}^4 {a_k}^0 {\xi_k}^0 - \Delta({\xi_i}^o)}{\sum_{i=1}^4 ({a_k}^0)^2} = 0{,}04$$

$${\xi_4}^1 = a_3 \frac{\sum_{i=1}^4 {a_k}^0 {\xi_k}^0 - \Delta({\xi_i}^o)}{\sum_{i=1}^4 ({a_k}^0)^2} = 0{,}21$$

$$\beta^2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} ({\xi_i}^1)^2} = \sqrt{(-1{,}93)^2 + (-6{,}71)^2 + (0{,}56)^2 + (2{,}85)^2} = 8{,}25$$