ROZDZIAŁ XI – STATECZNOŚĆ PRĘTÓW

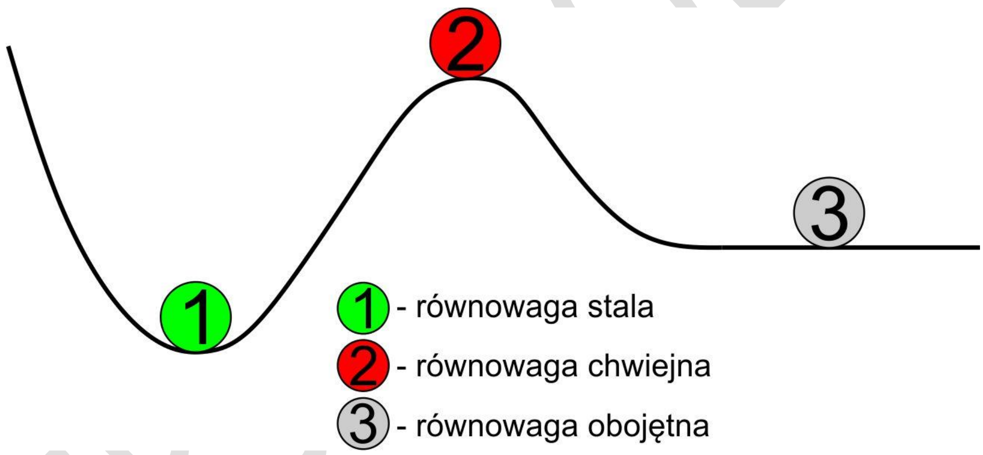
1) Zagadnienie stateczności w wytrzymałości materiałów.

Obserwując zachowanie się układu mechanicznego po wytrąceniu go ze stanu równowagi, stwierdzamy, że może ono odpowiadać jednemu z trzech podstawowych stanów równowagi:

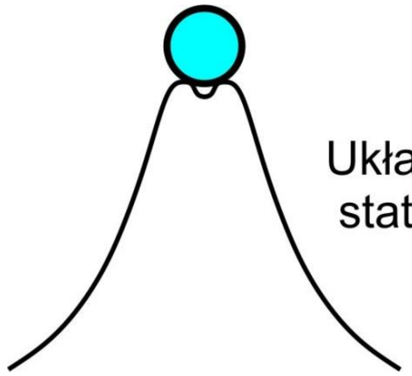
- Jeżeli po dowolnie małym początkowym wychyleniu z położenia równowagi ruch ciała jest taki, że wychylenia jakiegokolwiek punktu nie są większe od początkowych, to równowagę taką nazywamy **stałą** (stabilną, trwałą).

- W przeciwnym przypadku mówimy o równowadze **chwiejnej**.

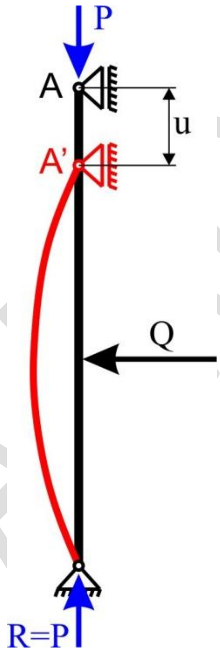
- W szczególnym przypadku, gdy przy dowolnie małym wychyleniu wartość energii potencjalnej pozostaje stała, mówimy o równowadze **obojętnej**.



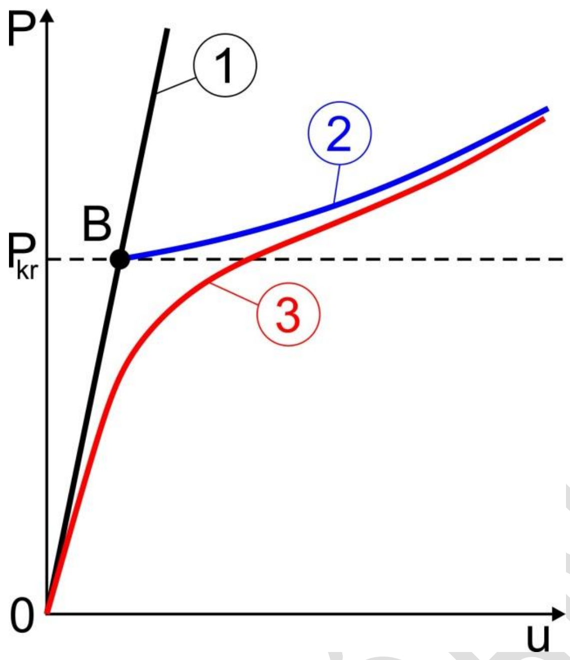
Przypadkiem często spotykanym w technice jest układ pozostający w równowadze stałej, którego wprowadzenie w stan równowagi chwiejnej wymaga tak niewielkiej ilości energii, że w danych warunkach może być ona dostarczona w sposób przypadkowy. Układy takie nazywamy układami o małej lub niedostatecznej stateczności.



Zagadnienie stateczności tego rodzaju układu ilustruje przykład odkształcalnego, nieważkiego pręta, ściskanego siłą P.



Jeżeli działamy na pręt w sposób statyczny siłą **Q**, normalną do osi pręta i spowodujemy jego ugięcie, to po usunięciu tej siły pręt powraca do swojej prostej postaci. Po przekroczeniu przez siłę **P** pewnej wartości, nazywanej ***siłą krytyczną***, po chwilowym zadziałaniu siły **Q**, pręt nie powróci do pierwotnej postaci, znajdzie się w stanie równowagi chwiejnej i w sposób gwałtowny przybierze nową postać, o osi wygiętej, odpowiadającą równowadze stałej. Towarzyszy temu nagły wzrost przemieszczenia punktu **A**.



Prosta „**1**” ilustruje zależność przy założeniu, że pręt jest wyłącznie ściskany. Po osiągnięciu przez siłę **P** wartości **P$_{kr}$** następuje rozdwojenie charakterystyki **P-u**. Punkt B nazywamy ***punktem bifurkacji***.

Przy zwiększaniu wartości siły **P** powyżej **P$_{kr}$** mogą wystąpić dwa rodzaje równowagi:

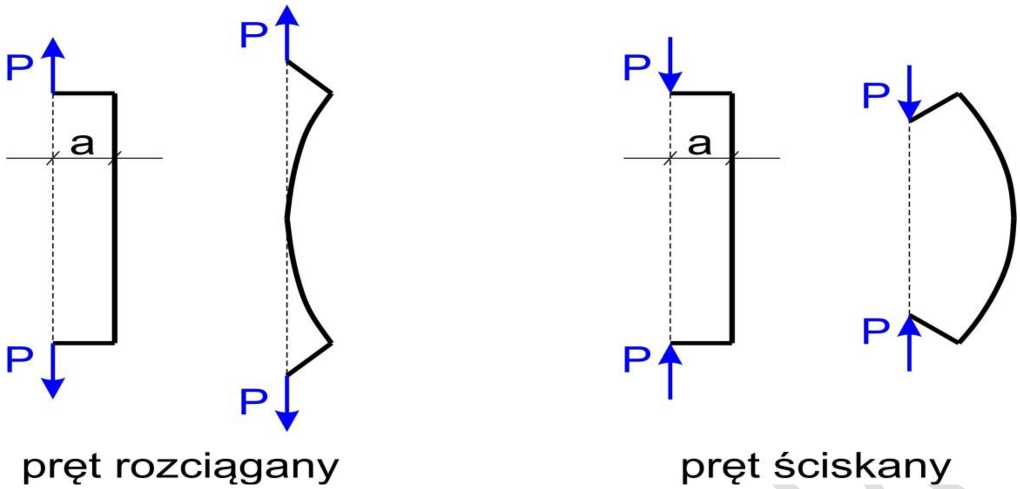
- Według linii „**1**” – równowaga stała, niedostateczna. Pręt pozostaje prostoliniowy. Stan taki może wystąpić przy założeniu idealnie centralnego przyłożenia siły oraz braku impulsu **Q**.

- Według linii „**2**” – równowaga stała. Pręt o osi zakrzywionej.

Linię „**O – B – 2**” nazywamy ***ścieżką równowagi***.

Ugięcie pręta spowodowane przekroczeniem przez siłę ściskającą wartości krytycznej, nazywamy ***wyboczeniem***.

Warunek centralnego działania siły osiowej może być w rzeczywistości spełniony z pewną tolerancją. Załóżmy, że siła przyłożona do osi pręta przesunięta jest w stosunku do niej o mały mimośród **a**. Wówczas, w położeniu początkowym pręt jest rozciągany lub ściskany oraz zginany.



W przypadku pręta rozciąganego, powstałe wskutek zginania odkształcenia zmniejszają wartość momentu gnącego, a zatem udział zginania ze wzrostem siły maleje.

W przypadku ściskania, odkształcenia powodowane zginaniem powodują wzrost mimośrodu, w konsekwencji zwiększając udział zginania. Wpływ zginania na odkształcenia pręta może być gwałtowny, stwarzający wysokie prawdopodobieństwo utraty spójności materiału.

Krzywa „3” jest wykresem zależności siły i przemieszczenia przy założeniu małego początkowego mimośrodu. Kształt krzywej uwidacznia istotny jakościowy wpływ wstępnych przemieszczeń na stan równowagi. Rozpatrywany układ nie jest układem liniowo-sprężystym. Im mimośród jest mniejszy, tym mniejsze jest początkowe odstępstwo krzywej „3” od prostej „1” i tym bardziej gwałtowne jest jej zakrzywienie, równoznaczne z gwałtownym przyrostem przemieszczeń.

Rozpatrzenie stanu równowagi i określenie obciążenia krytycznego różni się w sposób zasadniczy od rozpatrywanych dotąd zagadnień, w których ograniczaliśmy się do analizy naprężeń i odkształceń, z góry zakładając spełnienie przez układ warunku stateczności.

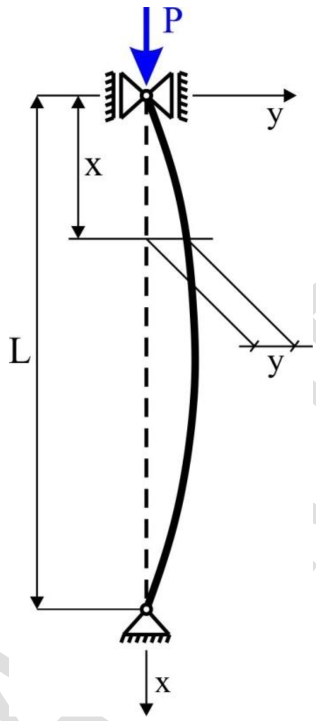
Powstawanie odkształceń w wyniku utraty stateczności nie musi prowadzić do zniszczenia, w praktyce jednak uważa się obciążenie krytyczne za szczególnie niebezpieczne i nie przeprowadza się analizy równowagi ustroju prętowego po wyboczeniu.

<u>Im konstrukcja jest lżejsza, tym większe jest prawdopodobieństwo utraty stateczności!</u>

2) **Sprężyste wyboczenie pręta.**

Zagadnienie wyznaczenia krytycznej wartości siły ściskającej pręt prosty można rozwiązać w sposób podany przez Eulera.

Rozpatrujemy pręt prosty, obustronnie zamocowany przegubowo, obciążony siłą ściskającą **P**.



Ponieważ warunki podparcia nie wyznaczają uprzywilejowanego kierunku ugięcia, decydujący wpływ ma tutaj sztywność zginania pręta, tzn. wyboczenie następuje w płaszczyźnie najmniejszej sztywności zginania $\mathbf{EJ_{min}}$, gdzie $\mathbf{J_{min}}$ jest minimalnym osiowym momentem bezwładności przekroju pręta.

W stanie równowagi, w postaci ugiętej pręta, oprócz siły podłużnej pojawia się również moment gnący, który w dowolnym przekroju, określonym współrzędną **x** wynosi:

$$M_g = P \cdot y \tag{1}$$

Równanie różniczkowe linii ugięcia pręta wyboczonego ma następującą postać:

$$EJ_{min}\frac{d^2y}{dx^2} = -M_g \tag{2}$$

Po podstawieniu (1) do (2):

$$EJ_{min}\frac{d^2y}{dx^2} = -P \cdot y \qquad (3)$$

Po przekształceniu:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EJ_{min}}y = 0 \qquad (4)$$

Wprowadzamy oznaczenie: $k^2 = \frac{P}{EJ_{min}}$ (5)

Równanie przyjmuje postać:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^2 \cdot y = 0 \qquad (6)$$

Całka ogólna równania (6) ma następującą postać:

$$y = A \cdot \sin kx + B \cdot \cos kx \qquad (7)$$

Do wyznaczenia stałych **A** i **B** należy uwzględnić warunki brzegowe w miejscach podparcia.

$$\begin{cases} y|_{x=0} = 0 & (8.a) \\ y|_{x=L} = 0 & (8.b) \end{cases}$$

Z warunku 8.a wynika, że **B=0**, zatem równanie (7) przyjmuje postać:

$$y = A \cdot \sin kx \qquad (9)$$

Warunek 8.b można wyrazić w postaci:

$$A \cdot \sin kL = 0 \qquad (10)$$

Powyższy warunek może być spełniony gdy:

--- A=0 – dla każdego x otrzymujemy y=0 – pręt pozostaje prosty – rozwiązanie trywialne,

--- sin kL=0 – stąd otrzymujemy szereg wartości: kL=nπ : n=1, 2, 3, …
Zatem, uwzględniając związek (5):

$$kL = L\sqrt{\frac{P}{EJ_{min}}} = n \cdot \pi \tag{11}$$

Stąd:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot n^2 \cdot EJ_{min}}{L^2} \tag{12}$$

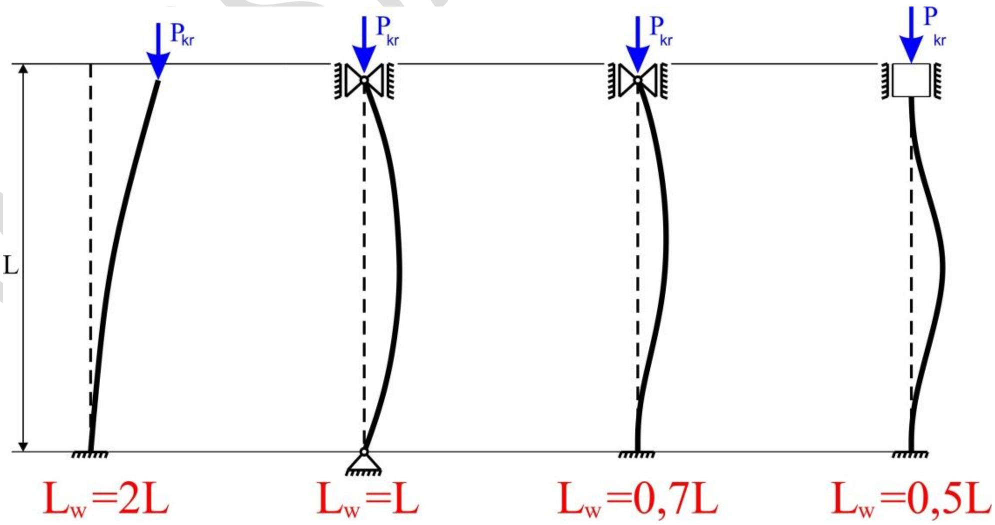
Przyjmując n=0 otrzymujemy rozwiązanie trywialne: P=0

Przyjmując n=1 obliczamy najmniejszą wartość siły P, dla której możliwe jest zachowanie równowagi pręta w postaci wygiętej. Jest to tzw. ***eulerowska siła krytyczna***.

Zmiana sposobu zamocowania pręta wyraża się w zmianie warunków brzegowych i wpływa na zmianę ostatecznego wzoru na siłę krytyczną. Wzór ten można wyrazić w postaci:

$$\boxed{P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{{L_w}^2}} - wzór\ Eulera \tag{13}$$

L_w – długość wyboczeniowa, zależna od sposobu zamocowania pręta.



Naprężenie krytyczne wyraża się wzorem:

$$\sigma_{kr} = \frac{P_{kr}}{A} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{{L_w}^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 E}{{L_w}^2 \left(\frac{A}{J_{min}}\right)} \qquad (14)$$

Wprowadzamy oznaczenie:

$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$ - minimalny ***promień bezwładności przekroju***

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{{L_w}^2 \left(\frac{1}{i_{min}}\right)^2} \qquad (15)$$

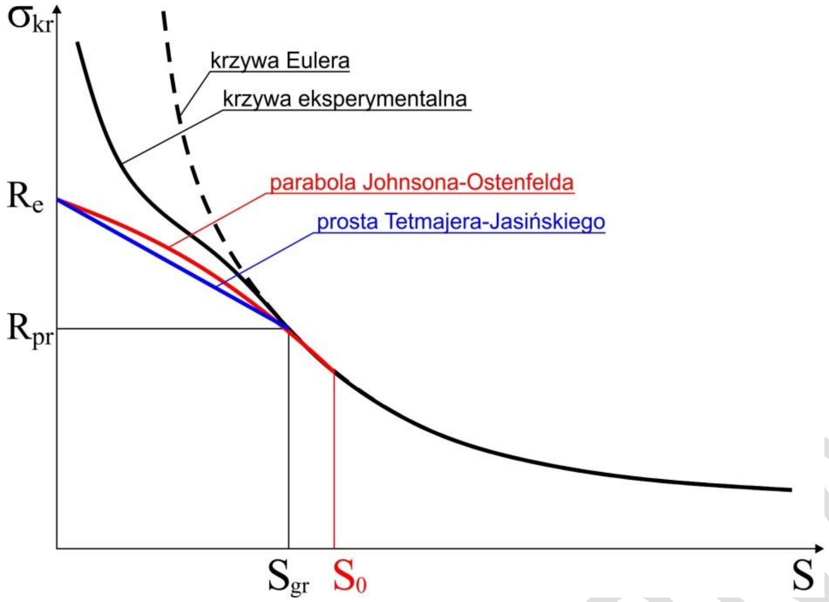
Def:

$$S = \frac{L_w}{i_{min}} - \textit{smukłość pręta} \qquad (16)$$

Podstawiając (16) do (15):

$$\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{S^2} \qquad (17)$$

Przy założeniu dla danego materiału stałej wartości E, wzór (17) wyraża zależność naprężenia krytycznego od smukłości: $\sigma_{kr} = f(S)$ i na wykresie w układzie $\sigma_{kr} - S$ przedstawia się jako tzw. krzywa Eulera:



Wzór Eulera wyprowadzony został przy założeniu, że wyboczenie zaistnieje w obrębie ważności prawa Hooke'a, nie można zatem opierać się na nim w przypadku występowania naprężeń o wartościach większych niż granica proporcjonalności.

Wartość smukłości, odpowiadająca granicy proporcjonalności, nazywana jest ***smukłością graniczną***.

$$S_{gr} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{R_{PR}}} \tag{18}$$

Zastosowanie wzoru Eulera do wyznaczania naprężeń krytycznych ogranicza się zatem wyłącznie do prętów o smukłości większej od granicznej.

W zakresie smukłości mniejszych od granicznych, stosuje się aproksymację krzywej eksperymentalnej wzorami empirycznymi, którym odpowiadają:

- Prosta Tetmajera-Jasińskiego – zależność liniowa,
- Parabola Johnsona-Ostenfelda – zależność 2-go stopnia.

3) Techniczne metody obliczeń prętów na wyboczenie.

W zakresie smukłości mniejszych od granicznych obowiązuje teoria wyboczenia sprężysto-plastycznego, kłopotliwa w zastosowaniu.

W obliczeniach technicznych korzysta się najczęściej z nieskomplikowanych wzorów o charakterze empirycznym:

a) Prosta Tetmajera – Jasińskiego

Krzywa eksperymentalna aproksymowana jest wzorem:

$$\sigma_{kr} = a - b \cdot S$$

gdzie:

$$\begin{cases} a = R_e \\ b = \dfrac{R_e - R_{PR}}{S_{gr}} = \dfrac{R_e - R_{PR}}{\sqrt{\dfrac{\pi^2 E}{R_{pr}}}} \end{cases}$$

b) Parabola Johnsona – Ostenfelda

Krzywa eksperymentalna aproksymowana jest wzorem:

$$\sigma_{kr} = A - B \cdot S^2$$

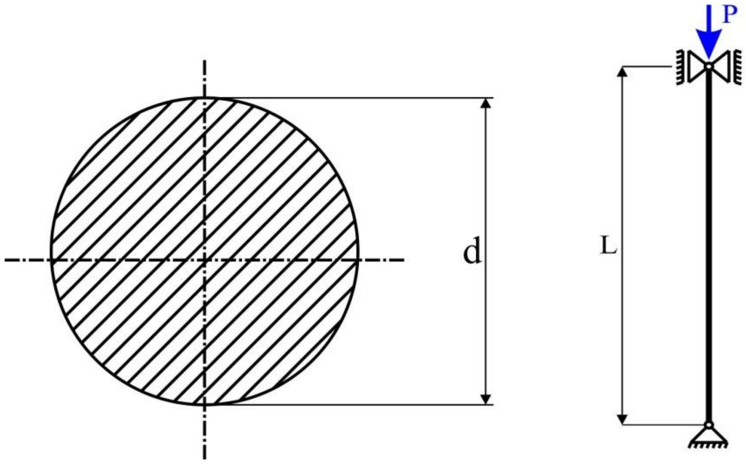
gdzie:

$$\begin{cases} A = R_e \\ B = \dfrac{{R_e}^2}{4\pi^2 E} \end{cases}$$

Przykładowo, dla stali konstrukcyjnej St2: R_{PR}=200 [MPa], E=2.1·10^5[MPa], R_e=240[MPa] => S_{gr}=100, S_0=131:

$$\sigma_{kr} = 240 - 0.395 \cdot S \quad - \quad wzór\ T - J$$
$$\sigma_{kr} = 240 - 0.007 \cdot S^2 \quad - \quad wzór\ J - O$$

Przykład:



P=100[kN]
n_w=4
L=0.5[m]
mat. stal

d=?

1) Charakterystyki geometryczne przekroju, w funkcji parametru **d**:

$$J_{min} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad ; \quad A = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \ ; \quad i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}} = \frac{d}{4}$$

2) Wzór Eulera:

$$n_w \cdot P = \frac{\pi^2 E J_{min}}{{L_w}^2} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{L^2} \qquad (L_w = L)$$

$$J_{min} = \frac{n_w \cdot P \cdot L^2}{\pi^2 E} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \ \rightarrow \ d^4 = \frac{64 \cdot n_w \cdot P \cdot L^2}{\pi^3 E}$$

$$d = \sqrt[4]{\frac{64 \cdot 4 \cdot 100[kN] \cdot (0.5)^2[m^2]}{\pi^3 \cdot 2.1 \cdot 10^8[kPa]}} = 0.0315[m] = 31.5[mm]$$

3) Kontrola smukłości dla uzyskanej wartości **d**:

$$S = \frac{L_w}{i_{min}} = \frac{L}{i_{min}} = \frac{4 \cdot 0.5[m]}{0.0315[m]} = 63.5 < 100 = S_{gr}$$

4) Parabola J-O:

$$\sigma_{kr} = 240 - 0.007 \cdot S^2$$

$$\frac{n_w \cdot P}{\frac{\pi d^2}{4}} = 240 - 0.007 \left(\frac{4 \cdot L}{d}\right)^2 \qquad | \ \cdot \pi d^2$$

$$4 \cdot n_w \cdot P = 240 \cdot \pi \cdot d^2 - 0.007 \cdot 16 \cdot L^2 \cdot \pi$$

$$d^2 = \frac{4 \cdot n_w \cdot P + 0.007 \cdot 16 \cdot \pi \cdot L^2}{240 \cdot \pi}$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 4 \cdot 0.1[MN] + 0.007 \cdot 16 \cdot \pi \cdot (0.5)^2[m^2]}{240[MPa] \cdot \pi}} = 0.0473[m] = 47.3[mm]$$