7.2.1.1. Macierz sztywności w układzie globalnym

Wyprowadzone dotychczas macierze sztywności przedstawiają związki pomiędzy siłami i przemieszczeniami odniesionymi do układu współrzędnych związanego z rozpatrywanym elementem. Układ taki, jak wspomniano w rozdziale 3, nazywamy *lokalnym*. Jedna z osi tego układu pokrywa się z osią pręta, pozostałe są głównymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego.

Przy analizie konstrukcji jako całości musimy dysponować macierzami sztywności poszczególnych elementów odniesionymi do jednego, wspólnego układu współrzędnych zwanego *globalnym*. Zachodzi więc konieczność przetransformowania macierzy sztywności z układu lokalnego (ξ, η, ζ) do globalnego x, y, z. Wektorom i macierzom w układzie lokalnym przypiszemy indeks l, natomiast obiekty te w układzie globalnym nie będą indeksowane.

Operację transformacji omówimy na przykładzie macierzy (7.37). Transformację macierzy sztywności elementu ramy płaskiej przeprowadzono w punkcie 3.3.1.

W wektorze sił trzy pierwsze składowe są siłami, trzy pozostałe momentami. Podobnie pierwsze trzy składowe wektorów przemieszczeń są przemieszczeniami liniowymi, trzy pozostałe kątowymi.

Oznaczamy, w odróżnieniu od (7.28) wektor sił i przemieszczeń globalnych jako:

$$
\begin{aligned}
S_i &= \left\{ S_1 \quad S_2 \quad S_3 \quad S_4 \quad S_5 \quad S_6 \right\}_i \\
v_i &= \left\{ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \right\}_i
\end{aligned}
\tag{7.38}
$$

Niechaj S_1 oznacza składową wektora sił w układzie globalnym odpowiadającą osi x. Zależność tej składowej od sił w układzie lokalnym będzie miała postać:

$$
S_1 = N_l \cos(x,\xi) + T_\eta \cos(x,\eta) + T_\zeta \cos(x,\zeta). \tag{7.39}
$$

Podobnie będzie z innymi składowymi sił w elemencie i-tym.
Możemy więc napisać:

$$
\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}_i = c_i \cdot \begin{bmatrix} N \\ T_\eta \\ T_\zeta \end{bmatrix}_{i,l}, \tag{7.40}
$$

gdzie:

$$
c_i = \begin{bmatrix} \cos(x,\xi) & \cos(x,\eta) & \cos(x,\zeta) \\ \cos(y,\xi) & \cos(y,\eta) & \cos(y,\zeta) \\ \cos(z,\xi) & \cos(z,\eta) & \cos(z,\zeta) \end{bmatrix}, \tag{7.41}
$$

jest macierzą transformacji. Elementami jej są kosinusy kątów pomiędzy osiami układów lokalnego i globalnego.

Równanie odwrotne do (7.40) będzie miało postać:

$$
\begin{bmatrix} N \\ T_\eta \\ T_\zeta \end{bmatrix}_{i,l} = c_i^T \cdot \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}_i, \tag{7.42}
$$

co wynika z faktu, że macierz transformacji jest ortogonalna czyli $c_i^{-1} = c_i^T$

Podobnie jak wektor sił transformuje się także wektor momentów.

Dla całego wektora sił występującego w elemencie możemy napisać:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{bmatrix}_2 \\ \begin{bmatrix} S_4 \\ S_5 \\ S_6 \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} c & & & \\ & c & & \\ & & c & \\ & & & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T_\eta \\ T_\zeta \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} M_s \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} N \\ T_\eta \\ T_\zeta \end{bmatrix}_2 \\ \begin{bmatrix} M_s \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}_{i,l} \tag{7.43}$$

albo krótko

$$S_i = C_i \, S_{i,l}, \tag{7.44}$$

gdzie:

C_i – macierz quasidiagonalna, elementami której są podmacierze (7.41).

Równanie odwrotne do (7.44) będzie miało postać:

$$S_{i,l} = C_i^T \, S_i, \tag{7.45}$$

co wynika znowu z ortogonalności macierzy transformacji.

Przypomnijmy, że:

$$C_i^{-1} = C_i^T = \begin{bmatrix} c^T & & & 0 \\ & c^T & & \\ & & c^T & \\ 0 & & & c^T \end{bmatrix}_i . \tag{7.46}$$

Transformacja wektora przemieszczeń jest identyczna jak wektora sił.

Możemy więc napisać:

$$v_i = C_i \; v_{i,l} \tag{7.47}$$

oraz

$$v_{i,l} = C_i^T v_i . \tag{7.48}$$

Możliwa jest teraz transformacja macierzy sztywności elementu. Wychodzimy z równania (7.44)

$$S_i = C_i \; S_{i,l} .$$

Zależność (7.37) możemy przedstawić w postaci

$$S_{i,l} = k_{i,l} \, v_{i,l} .$$

Uwzględniając powyższe w równaniu (7.44), otrzymujemy :

$$S_i = C_i \; k_{i,l} \; v_{i,l} . \tag{7.49}$$

Podstawiając (7.48) do (7.49) mamy:

$$S_i = C_i \; k_{i,l} \; C_i^T v_i , \tag{7.50}$$

czyli

$$k_i = C_i \; k_{i,l} \; C_i^T . \tag{7.51}$$

Jeżeli macierz (7.37) podzielić na 16 podmacierzy o wymiarze 3 x 3, wówczas możemy odpowiednie podmacierze $k_{i,j}$ macierzy (7.51) obliczać ze wzoru:

$$k_{i,j} = c \, k_{ij,l} \, c^T . \tag{7.51.1}$$

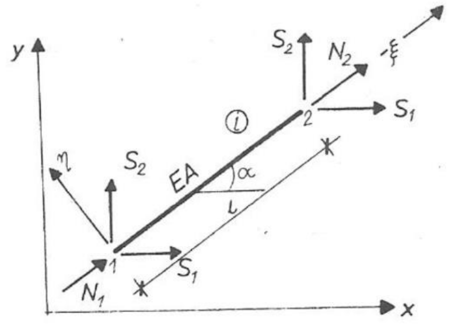
Wprowadzone równania są ważne także dla innych typów elementów.

Przykład. Znaleźć macierz sztywności pręta osiowo obciążonego, w układzie globalnym (x, y) (rys. 7.14)*.

Każdy z węzłów rozpatrywanego elementu będzie miał w układzie globalnym dwa składowe przemieszczenia, którym odpowiadają dwie składowe siły. Zależność pomiędzy tymi wielkościami będzie miała postać:

---

*Zagadnienie to w inny sposób rozwiązano w punkcie 3.3.2.



Rys. 7.14

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:cc} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ \hdashline k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{array}\right]_i \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}_i. \qquad \text{(a)}$$

Jak widać, poszukiwana macierz sztywności ma wymiar 4 x 4. Dla jej określenia wykorzystujemy macierz (7.25) będącą macierzą sztywności elementu w układzie lokalnym (ξ, η). Przed tym jednak należy ją nieco zmodyfikować.

Macierz (7.25) została zbudowana przy zastrzeżeniu, że przemieszczenia węzłów prostopadłe do osi pręta i odpowiadające im siły w układzie lokalnym są równe zeru. Dlatego wymiar macierzy jest 2 x 2. W układzie globalnym natomiast węzły mają po dwa składowe przemieszczenia i po dwie siły. Należy zatem do wektorów przemieszczeń i sił w układzie lokalnym wprowadzić przyjęte z góry zerowe składowe i przedstawić zależność (7.24) w postaci:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} N \\ 0 \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}_{i,1} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{i,1} \cdot \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}_{i,1} \qquad \text{(b)}$$

Stąd

$$\mathbf{k}_{i,l} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{c}$$

Składowa macierz transformacyjna (7.41) będzie w naszym przypadku równa (por. rys. 7.14):

$$\mathbf{c}_i = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \tag{d}$$

natomiast transformacyjna macierz quasidiagonalna (por. (7.43)) będzie miała postać:

$$\mathbf{C}_i = \left[\begin{array}{cc|cc} c & s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & s & c \end{array}\right], \tag{e}$$

gdzie oznaczyliśmy $c = \cos\alpha$, $s = \sin\alpha$.

Macierz sztywności w układzie globalnym znajdujemy na podstawie wzoru (7.51).

$$\begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & s & c \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & cs^2 \end{bmatrix}$$

Zatem poszukiwana macierz sztywności ma postać:

$$\boldsymbol{k}_i = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & cs^2 \end{bmatrix}$$