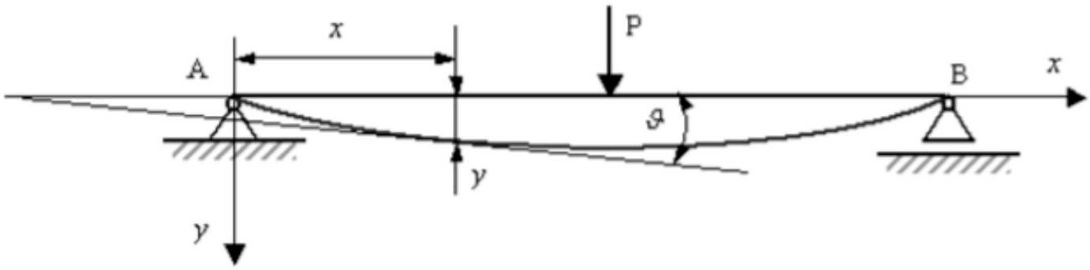
Różniczkowe równanie linii ugięcia belki

Działanie momentu gnącego powoduje zakrzywienie osi belki. W omawianym zginaniu prostym, w którym kierunek wektora momentu gnącego pokrywa się z kierunkiem głównej osi bezwładności przekroju, oś belki po odkształceniu jest krzywą płaską.

Rozpatrzmy belkę swobodnie podpartą na końcach i zginaną siłą skupioną P (rysunek 8.10).



Rysunek 8.10

Przyjmijmy w początku belki układ współrzędnych prostokątnych, którego oś x stanowi oś geometryczną nieodkształconej belki, a oś y skierowana jest do dołu. Dowolny przekrój o współrzędnej x obraca się o kąt ϑ, a jego środek ciężkości przemieszcza się pionowo o y. Oś ugiętą belki opisuje równanie $y = f(x)$, a jej krzywiznę wzór (8.15). Krzywiznę dowolnej krzywej płaskiej określa znana z geometrii różniczkowej zależność

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}} \tag{8.24}$$

Z porównania wzorów (8.15) i (8.24) otrzymujemy równanie różniczkowe ugiętej osi belki

$$-\frac{M_g}{EJ} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^3}} \tag{8.25}$$

Ze względu na stosunkowo dużą sztywność belek, a zatem małe przemieszczenia liniowe i kątowe, z dostateczną dokładnością można przyjąć, że współrzędna y reprezentuje całkowite przemieszczenie liniowe, a kąt obrotu przekroju ϑ (zawarty między osią belki nieodkształconej i styczną do osi ugiętej) oznacza przemieszczenie kątowe. Przemieszczenie liniowe y nazywane jest ugięciem, a kąt ϑ – kątem ugięcia.

Przy założonych małych przemieszczeniach kątowych mamy $\frac{dy}{dx} = tg\,\vartheta \approx \vartheta$ i mianownik prawej strony równości (8.25) można przyjąć równy jedności. Otrzymujemy równanie uproszczone, które zapisujemy w postaci

$$EJ\,\frac{d^2 y}{dx^2} = -M_g \tag{8.26}$$

Jest to tzw. równanie techniczne ugiętej osi belki, w którym iloczyn EJ jest ogólnym oznaczeniem sztywności na zginanie. Znak „–" we wzorach (8.25) i (8.26) wynika z przyjętej umowy określającej znak momentu gnącego.

W celu wyznaczenia ugięć belki całkujemy dwukrotnie równanie (8.26), otrzymujemy

$$EJ\,\frac{dy}{dx} = -\int M_g\,dx + C \quad \text{stąd} \quad \vartheta = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{EJ}\left(\int M_g\,dx + C\right) \tag{8.27}$$

$$EJ\;y = -\int\!\!\int M_g\,dx\,dx + Cx + D$$

stąd

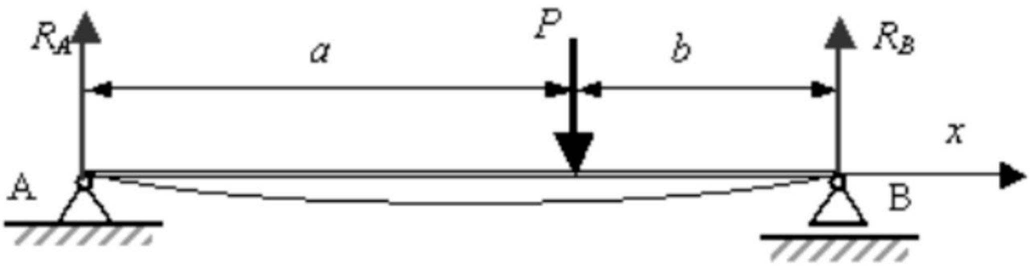
$$y = -\frac{1}{EJ}\left(\int\left(\int M_g\,dx\right)dx + Cx + D\right) \tag{8.28}$$

gdzie: C i D oznaczają stałe całkowania.

W przypadku gdy moment gnący opisany jest inną funkcją w kolejnych przedziałach belki, należy napisać równania różniczkowe osi ugiętej osobno dla każdego przedziału. Ze względu na ciągłość i gładkość linii ugięcia, stałe całkowania muszą spełniać warunki ciągłości ugięć i kątów ugięcia na granicach przedziałów. W takim przypadku sposób całkowania równania różniczkowego ma istotne znaczenie.

Przykład

Wyznaczmy równanie osi ugiętej belki swobodnie podpartej na końcach i obciążonej siłą P (rysunek 8.11).



Rysunek 8.11

Z warunków równowagi wyznaczamy reakcje podpór, które wynoszą odpowiednio:

$$R_A = Pb/(a+b) \text{ oraz } R_B = Pa/(a+b).$$

Przyjmijmy układ współrzędnych x, y o początku w punkcie A belki. Moment gnący $M_g(x)$ należy określić w dwóch przedziałach

$$0 \le x \le a \quad M_g(x) = R_A x = \frac{Pb}{a+b} x$$

$$a \le x \le l \quad M_g(x) = R_A x - P(x-a) = \frac{Pb}{a+b} x - P(x-a)$$

Równania różniczkowe osi ugiętej odpowiadające tym przedziałom całkujemy osobno.

W przedziale $0 \le x \le a$ mamy

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -R_A x$$

$$EJ\frac{dy}{dx} = -R_A \int x\,dx + C_1 = -R_A \frac{x^2}{2} + C_1$$

$$EJ\,y = -\frac{R_A}{2}\int x^2 dx + C_1 x + D_1 = -R_A \frac{x^3}{6} + C_1 x + D_1$$

Całkowanie w przedziale $a \le x \le l$ przeprowadzamy nie rozwijając wyrażeń w nawiasach

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -R_A x + P(x-a)$$

$$EJ\frac{dy}{dx} = -R_A\int x\,dx + P\int(x-a)dx + C_2 =$$
$$= -R_A\frac{x^2}{2} + \frac{P(x-a)^2}{2} + C_2$$

$$EJy = \frac{-R_A}{2}\int x^2dx + \frac{P}{2}\int(x-a)^2dx + C_2x + D_2 =$$
$$= -R_A\frac{x^3}{6} + \frac{P(x-a)^3}{6} + C_2x + D_2$$

Stałe całkowania wyznaczamy z warunków brzegowych:

1) $y(0) = 0$

2) $y(l) = 0$

3) $y_1(a) = y_2(a)$

4) $\vartheta_1(a) = \vartheta_2(a)$

Pierwsze dwa warunki wynikają ze sposobu podparcia belki, dwa kolejne są warunkami ciągłości przemieszczeń.

Na podstawie warunku 4) mamy

$$-R_A\frac{a^2}{2} + C_1 = -R_A\frac{a^2}{2} + C_2\text{, a zatem jest } C_1 = C_2.$$

Z warunku 3) otrzymujemy

$$-R_A\frac{a^3}{6} + C_1a + D_1 = -R_A\frac{a^3}{6} + C_2a + D_2$$

a stąd, uwzględniając równość stałych C_1 i C_2, mamy $D_1 = D_2$

Z warunku [1)] jest $D_1 = 0$.

Na podstawie warunku [2)] otrzymujemy równanie

$$-R_A \frac{(a+b)^3}{6} + P\frac{b^3}{6} + C_2(a+b) = 0$$

z którego po podstawieniu $R_A = Pb/(a+b)$ wyznaczamy stałą C_2

$$C_2 = \frac{Pb}{6(a+b)}\left((a+b)^2 - b^2\right)$$

Zaletą zastosowanego sposobu całkowania równania różniczkowego osi ugiętej jest równość odpowiednich stałych całkowania w obu przedziałach $C_1 = C_2$ oraz $D_1 = D_2$. Sposób ten nazywany jest metodą Clebscha.

Metoda Clebscha wymaga przestrzegania następujących zaleceń.

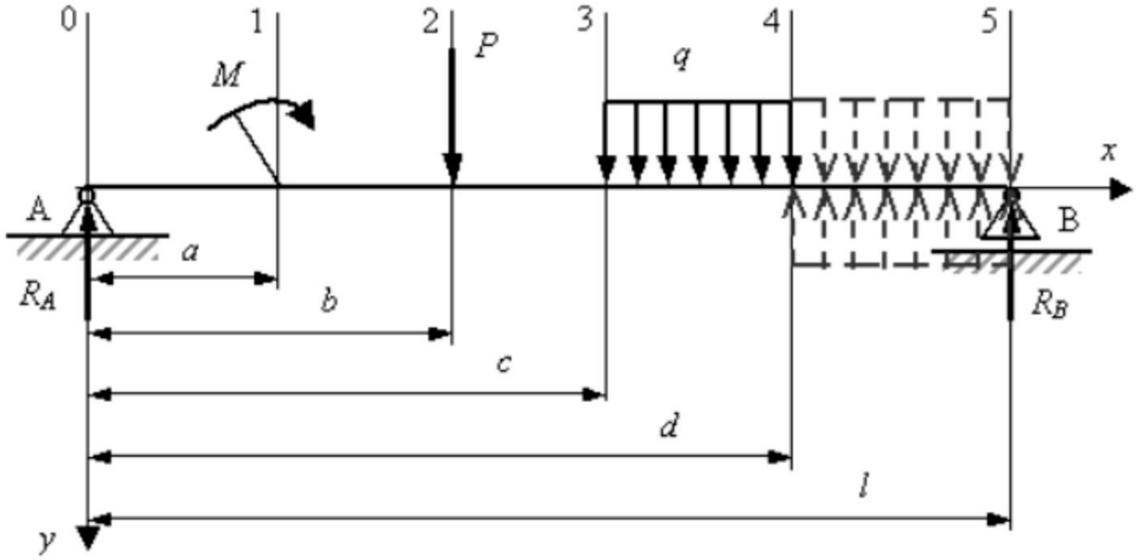
a. Należy przyjąć wspólny dla wszystkich przedziałów belki układ współrzędnych o początku w jednym z jej końców.

b. Jeśli współrzędne a_i określają położenie sił skupionych P_i lub początków obciążenia ciągłego q_i, to wyrażenia typu $P_i(x-a_i)$ lub $q_i\frac{(x-a_i)^2}{2}$ całkuje się według schematu $\int (x-a_i)^n dx = \frac{(x-a_i)^{n+1}}{n+1} + C$

c. W przypadku obciążenia ciągłego przyjmuje się układ równoważny w taki sposób, aby każde zaczęte obciążenie ciągłe przebiegało do końca belki.

d. W przypadku działania momentu skupionego do równania momentów gnących należy wprowadzić współrzędną określającą położenie tego momentu.

Rozpatrzmy belkę obciążoną momentem M, siłą P i obciążeniem ciągłym o intensywności q (rysunek 8.12)



Rysunek 8.12

Zgodnie ze stosowaną metodą rozpoczęte obciążenie ciągłe działa do końca belki, a zatem w przedziale 5 należy wprowadzić obciążenie równoważące ze znakiem przeciwnym ($-q$).

Ze względu na równość odpowiednich stałych całkowania równanie momentu gnącego można zapisać dla przedziału ostatniego, zaznaczając końce poszczególnych przedziałów pionowymi kreskami z numerami tych przedziałów.

Dla belki przedstawionej na rysunku 8.12 moment gnący określony jest zależnością

$$M_g = R_A x\Big|_1 + M(x-a)^0\Big|_2 - P(x-b)\Big|_3 - \frac{q(x-c)^2}{2}\Bigg|_4 + \frac{q(x-d)^2}{2}\Bigg|_5 \qquad (8.29)$$

Zapisując równanie różniczkowe osi ugiętej zmieniamy znak momentu gnącego

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = -R_A x\Big|_1 - M(x-a)^0\Big|_2 + P(x-b)\Big|_3 + \\ + \frac{q(x-c)^2}{2}\Bigg|_4 - \frac{q(x-d)^2}{2}\Bigg|_5 \tag{8.30}$$

Po scałkowaniu równania (8.3) otrzymujemy zależności określające kąt ugięcia i ugięcie

$$EJ\frac{dy}{dx} = C - R_A\frac{x^2}{2}\Bigg|_1 - M(x-a)\Big|_2 + \frac{P(x-b)^2}{2}\Bigg|_3 + \\ + \frac{q(x-c)^3}{6}\Bigg|_4 - \frac{q(x-d)^3}{6}\Bigg|_5 \tag{8.31}$$

$$EJ\ y = D + Cx - R_A\frac{x^3}{6}\Bigg|_1 - \frac{M(x-a)^2}{2}\Bigg|_2 + \\ + \frac{P(x-b)^3}{6}\Bigg|_3 + \frac{q(x-c)4}{24}\Bigg|_4 - \frac{q(x-d)^4}{24}\Bigg|_5 \tag{8.32}$$

Stałe całkowania C i D wyznaczamy z warunków brzegowych wynikających ze sposobu podparcia belki. Należy pamiętać, że obliczając przemieszczenia z równań (8.31) i (8.32) bierze się pod uwagę tylko wyrazy odpowiadające danemu przedziałowi. Stałe całkowania C i D, które zapisuje się w pierwszym przedziale, są proporcjonalne odpowiednio do kąta ugięcia i ugięcia belki w początku układu współrzędnych; mamy bowiem $\vartheta(0) = \vartheta_0 = C/EJ$ oraz $y(0) = y_0 = D/EJ$.