

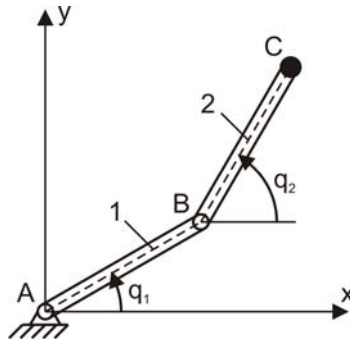
## **Laboratorium Sterowania Robotów**

### **Laboratorium nr 03**

**Temat:** Zadanie odwrotne kinematyki manipulatora dwuczłonowego

## Wprowadzenie

Rozważmy manipulator dwuczłonowy z parami obrotowymi pokazany na rys. 1.



Rys. 1. Manipulator 2-członowy z parami obrotowymi

Do opisu ruchu manipulatora w przestrzeni konfiguracyjnej zastosowano współrzędne uogólnione  $q_1$  i  $q_2$ , które wybrano jak pokazano na rys. 1. Współrzędne uogólnione to kąty obrotu członów manipulatora mierzone od poziomej osi  $x$  układu odniesienia.

W przypadku manipulatora pokazanego na rysunku, współrzędne wybranego punktu  $C$  w układzie odniesienia będą określone przez następujące równania

$$\begin{cases} x_C = l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2 \\ y_C = l_1 \sin q_1 + l_2 \sin q_2 \end{cases} \quad (1)$$

gdzie  $l_1$  i  $l_2$  to długości członów manipulatora. Różniczkując równania (1) otrzymano rzuty prędkości punktu  $C$  na osie układu odniesienia

$$\begin{cases} V_{Cx} = \dot{x}_C = -l_1 \dot{q}_1 \sin q_1 - l_2 \dot{q}_2 \sin q_2 \\ V_{Cy} = \dot{y}_C = l_1 \dot{q}_1 \cos q_1 + l_2 \dot{q}_2 \cos q_2 \end{cases} \quad (2)$$

a wartość prędkości punktu  $C$  to

$$V_C = \sqrt{V_{Cx}^2 + V_{Cy}^2} \quad (3)$$

Zadanie odwrotne kinematyki formułowane jest w następujący sposób. Niech tor ruchu punktu  $C$  będzie zdefiniowany jako

$$f_C(x_C, y_C) = 0 \quad (4)$$

Prędkość punktu  $C$  w układzie  $xy$  to

$$\bar{V}_C = \begin{bmatrix} V_{Cx} \\ V_{Cy} \end{bmatrix} \quad (5)$$

a jej wartość określa wzór (3). Aby prędkość punktu  $C$  była realizowalna, wektor prędkości musi być styczny do toru ruchu, zatem musi być spełnione następujące równanie

$$\text{grad}_C \bar{V}_C = 0 \quad (6)$$

czyli po uwzględnieniu równań (4) i (5) będzie ono miało postać

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_c}{\partial x_c} & \frac{\partial f_c}{\partial y_c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{cx} \\ V_{cy} \end{bmatrix} = 0 \quad (7)$$

Oznaczając  $f_x = \frac{\partial f_c}{\partial x_c}$  i  $f_y = \frac{\partial f_c}{\partial y_c}$  otrzymamy równanie

$$f_x V_{cx} + f_y V_{cy} = 0 \quad (8)$$

Spełnienie tego równania jest gwarancją styczności wektora prędkości do toru ruchu. Rozwiązując równanie (3) i (8) otrzymano

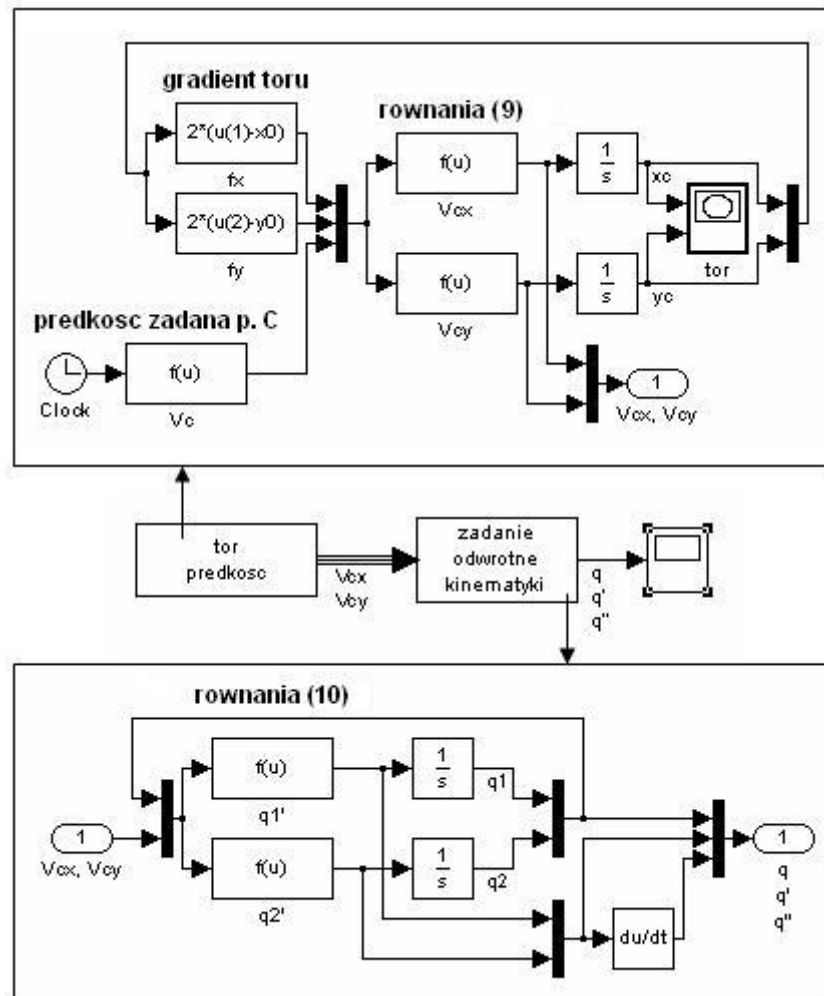
$$\begin{cases} V_{cx} = \dot{x}_c = \mp \frac{f_y V_c}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \\ V_{cy} = \dot{y}_c = \pm \frac{f_x V_c}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}} \end{cases} \quad (9)$$

Rozwiązanie układu równań różniczkowych (9) pozwala określić, jak zmieniają się składowe wektora prędkości oraz współrzędne punktu C dla zadanego toru ruchu i wartości prędkości tego punktu. Teraz przekształcając układ równań (2) określono prędkości uogólnione (prędkości kątowe) członów

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -\frac{V_{cx} \cos q_2 + V_{cy} \sin q_2}{l_1 \sin(q_1 - q_2)} \\ \dot{q}_2 = \frac{V_{cx} \cos q_1 + V_{cy} \sin q_1}{l_2 \sin(q_1 - q_2)} \end{cases} \quad (10)$$

Rozwiązując układ równań różniczkowych (10) można określić współrzędne uogólnione i prędkości uogólnione a różniczkując otrzymane prędkości uogólnione można wyznaczyć przyspieszenia uogólnione. Należy zauważyć, że rozwiązanie układu równań nie będzie możliwe w przypadku gdy wyrażenie  $\sin(q_1 - q_2)$  będzie równe 0, tzn. gdy  $q_1 = q_2 + k\pi$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ . Występuje wówczas konfiguracja osobliwa manipulatora, której interpretacja geometryczna jest taka, że osie członów 1 i 2 są równoległe.

Na rys. 2 przedstawiono schemat rozwiązania zadania odwrotnego kinematyki.



Rys.2. Schemat realizacji zadania odwrotnego kinematyki

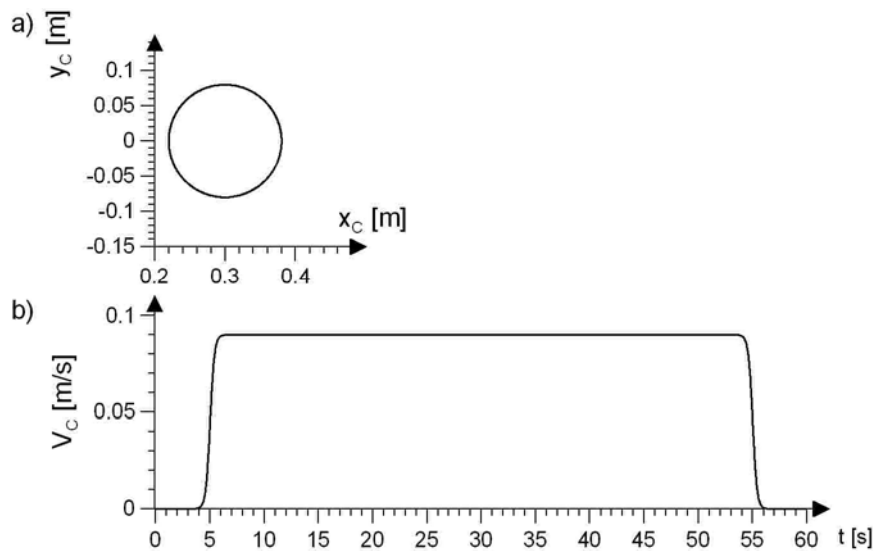
Rozwiążmy zadanie odwrotne kinematyki dla następujących warunków. Załóżmy, że punkt C manipulatora ma poruszać się po okręgu opisanym równaniem

$$f_C : (x_C - x_0)^2 + (y_C - y_0)^2 - R^2 = 0 \quad (11)$$

gdzie  $x_0 = 0.3$  [m] i  $y_0 = 0$  [m] to współrzędne środka okręgu,  $R = 0.08$  [m] to promień okręgu. Dla zadanego toru będzie  $f_x = \frac{\partial f_C}{\partial x_C} = 2(x_C - x_0)$ ,  $f_y = \frac{\partial f_C}{\partial y_C} = 2(y_C - y_0)$ . Prędkość punktu C określona jest wzorem

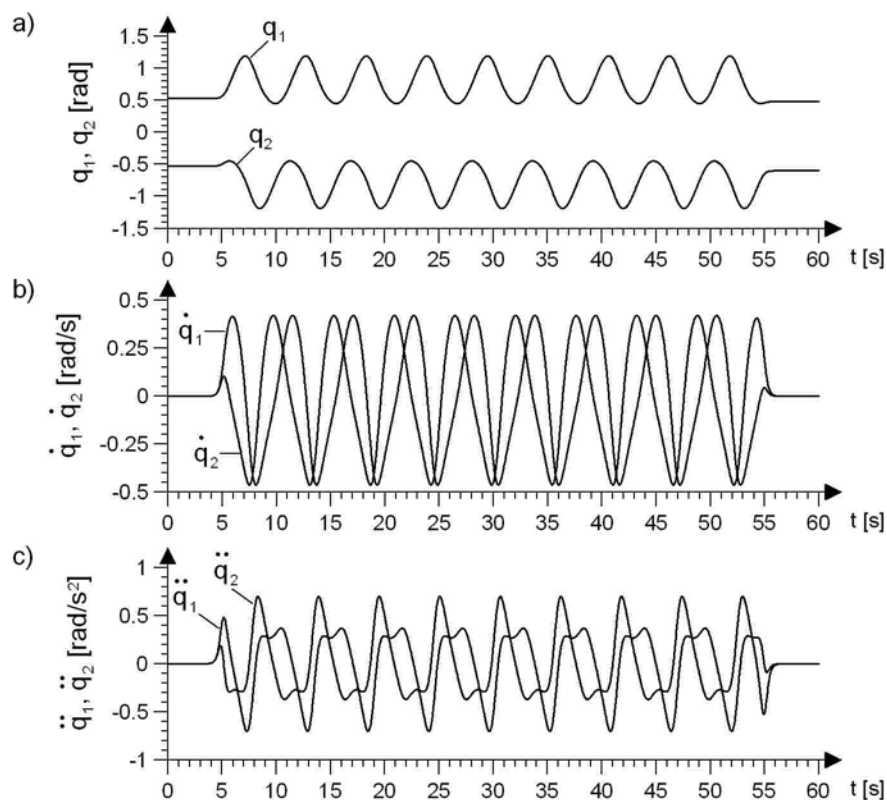
$$V_C = v_C \left[ \frac{1}{1 + \exp(-c(t - t_1))} - \frac{1}{1 + \exp(-c(t - t_2))} \right], \quad t \in \langle 0, t_k \rangle \text{ [s]} \quad (12)$$

gdzie  $v_C = 0.09$  [m/s],  $t_1 = 5$  [s],  $t_2 = 55$  [s],  $t_k = 60$  [s]  $c = 5$  [1/s] to współczynnik wpływający na szybkość zmiany prędkości podczas rozpędzania i hamowania. Zadany tor ruchu i zadaną prędkość punktu C przedstawiono na rys. 3.



Rys. 3. a) zadany tor ruchu punktu C, b) zadana prędkość punktu C

W symulacji przyjęto  $l_1 = l_2 = 0.22$  [m], warunki początkowe dla układu równań (9)  $x_C(0) = 0.38$  [m],  $y_C(0) = 0$  [m], warunki początkowe dla układu równań (10)  $q_1(0) = 0.5284$  [rad],  $q_2(0) = -0.5284$  [rad]. Uzyskane rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki przedstawiono na rys. 4.



Rys. 4. Rozwiązanie zadania odwrotnego kinematyki: a) współrzędne uogólnione, b) prędkości uogólnione, c) przyspieszenia uogólnione

### Zadania do wykonania

1. Na podstawie podanych zależności zbudować z wykorzystaniem pakietu Matlab/Simulink model realizujący zadanie odwrotne kinematyki manipulatora dwuczłonowego, przyjmując tor ruchu punktu C wg wzoru (11) oraz prędkość punktu C wg wzoru (12)
2. Przedstawić na wykresach następujące przebiegi: tor ruchu punktu C, prędkość punktu C, współrzędne uogólnione (kąty obrotu członów)  $q_1(t)$ ,  $q_2(t)$ , prędkości uogólnione  $\dot{q}_1(t)$ ,  $\dot{q}_2(t)$  i przyspieszenia uogólnione  $\ddot{q}_1(t)$ ,  $\ddot{q}_2(t)$ .

Dane do symulacji:

	A	B	C	D	E	F	G	H
$v_C$ [m/s]	0.1	0.05	0.1	0.06	0.8	0.8	0.05	0.05
$c$ [1/s]	8	8	8	8	8	8	8	8
$t_k$ [s]	30	30	30	30	30	30	30	30
$t_1$ [s]	1	1	1	1	1	1	1	1
$t_2$ [s]	29	29	29	29	29	29	29	29
$x_C(0)$ [m]	0.22	0.22	0.11	-0.22	0	-0.05	-0.05	-0.22
$y_C(0)$ [m]	0.22	0.22	0	0.22	0.4	0	0	0.22
$x_0$ [m]	0.22	0.22	0.22	-0.17	0	-0.23	-0.1	-0.25
$y_0$ [m]	0.11	0.27	0	0.17	0.31	0	0	0.25
$l_1$ [m]	0.22							
$l_2$ [m]	0.22							
$q_1(0)$ [rad]	0	$\pi/2$	1.3181	$\pi/2$	2.0005	1.6847	1.6847	$\pi$
$q_2(0)$ [rad]	$\pi/2$	0	-1.3181	$\pi$	1.1411	4.5985	4.5985	$\pi/2$

#### Sprawozdanie powinno zawierać:

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji,
- listingi programów,
- otrzymane wykresy (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- wnioski.