Teoria Sterowania
TEMAT 7

Badanie stabilności nieliniowych układów dynamicznych

dr inż. Paweł Penar

POLITECHNIKA RZESZOWSKA
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Rzeszów 2025

Liczba laboratorium w temacie : 1/2

1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest zapoznanie studentów z zagadnieniami badania stabilności układów dynamicznych z zastosowaniem metody Lapunowa z środowiska Matlaba/Simulinka.

2 Wprowadzenie

Jeśli w modelu układu nieliniowego wejście (sterowanie) $\boldsymbol{u}$ jest funkcją stanu $\boldsymbol{x}$ i nie występuje jawna zależność układu od czasu, to nieliniowy układ dynamiczny można zapisać jako

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

Taki układ nazywamy stacjonarnym. Jego rozwiązaniem jest trajektoria układu $\boldsymbol{x}(t)$, której początkiem jest warunek początkowy $\boldsymbol{x}_0 = f(\boldsymbol{x}(0))$.

Definicja 1. Punkty w przestrzenie zmiennych stanu dynamicznego układu nieliniowego, dla których spełniona jest zależność

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \tag{2}$$

dla każdej chwili t nazywamy **punktami równowagi** tego układu.

Przytoczona definicja prowadzi do twierdzenia Lapunowa, które dotyczy stabilności i standardowo jest podawane dla punktu równowagi $\boldsymbol{x}_e = 0$. Z drugiej strony nieliniowy układ dynamiczny postaci (1) może posiadać wiele punktów równowagi, gdyż są to pierwiastki równania algebraicznego $f(\boldsymbol{x}) = 0$. Punkt $\boldsymbol{x}_e = 0$ nie musi nim być. W takiej sytuacji tj. gdy $\boldsymbol{x}_e \neq 0$ jest punktem równowagi układu, to zamiana zmiennych określona równaniem $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e$ prowadzi do układu

$$\dot{\boldsymbol{z}} = f(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{x}_e) \tag{3}$$

w którym $\boldsymbol{z} = 0$ jest punktem równowagi. Dlatego założenie, że $\boldsymbol{x}_e = 0$ jest punktem równowagi nie wprowadza żadnych ograniczeń w analizie układów dynamicznych.

2.1 Podstawowe twierdzenie o stabilności

Dany jest układ stacjonarny postaci

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \tag{4}$$

Postępując za autorem [1], rozważono otoczenie D punktu zerowego w $\mathbb{R}^n$.

Definicja 2. Funkcja $V : D \rightarrow R$ jest nazywana:

- dodatnio określoną, jeśli $V(\mathbf{0}) = 0$ i $\wedge_{\boldsymbol{x}\neq 0} V(\boldsymbol{x}) > 0$
- dodatnio półokreślona, jeśli $V(\mathbf{0}) = 0$ i $\wedge_{\boldsymbol{x}\neq 0} V(\boldsymbol{x}) \geqslant 0$
- ujemnie określona (ujemnie półokreślona), jeśli $-V(\boldsymbol{x})$ jest dodatnio określona (dodatnio półokreślona)

Przykład 1. Zbadaj właściwości funkcji skalarnych z zastosowaniem procesora symbolicznego Matlaba.

- $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\left(x_1^2 + 3x_2^2\right)$
- $V(\boldsymbol{x}) = \left(x_1^2 - \frac{1}{2}x_2\right)^2 + \frac{1}{2}\left(x_2^3 - x_1\right)$

Niech $V : D \to R$ będzie funkcją różniczkowalną w sposób ciągły (tj. jej pierwsze pochodne cząstkowe są ciągłe). Jeśli obliczamy jej wartość wzdłuż trajektorii $\boldsymbol{x}(t)$ układu (4), to staje się ona funkcją czasu. Jej pochodną względem czasu można obliczyć tak jak pochodną funkcji złożonej

$$\frac{d}{dt}V(\boldsymbol{x}(t)) = \nabla V(\boldsymbol{x}(t))\dot{\boldsymbol{x}} = \nabla V(\boldsymbol{x}(t))f(\boldsymbol{x}) \tag{5}$$

gdzie

$$\nabla V(\boldsymbol{x}(t)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial V}{\partial x_1} & \frac{\partial V}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial V}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Definicja 3. Funkcja $V : D \to R$, $\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \nabla V(\boldsymbol{x}(t))f(\boldsymbol{x})$ jest nazywana pochodną funkcji V wzdłuż trajektorii układu (4).

Twierdzenie 1. Jeśli istnieje funkcja $V : D \to R$ różniczkowalna w sposób ciągły, dodatnio określona w D i taka, że jej pochodna wzdłuż trajektorii tj. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ jest ujemnie półokreślona w D, to punkt równowagi $\boldsymbol{x}_e = 0$ układu (4) jest stabilny. Jeśli jej pochodna wzdłuż trajektorii tj. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ jest ujemnie określona w D, to punkt równowagi $\boldsymbol{x}_e = 0$ układu (4) jest asymptotycznie stabilny.

Algorytm 1. *Sposób postępowania przy prowadzeniu analizy stabilności bezpośrednią metoda Lapunowa można przedstawić w następujących etapach [1]:*

1. *Zapisz równanie stanu układu dynamicznego $\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x})$, wyznacz punkty równowagi, ustal, który punkt równowagi będzie analizowany.*
2. *Wybierz funkcję Lapunowa $V(\boldsymbol{x})$, która jest dodatnio określoną funkcją zmiennych stanu $\boldsymbol{x}$ w otoczeniu punktu równowagi. Niech L_+ oznacza to otoczenie.*
3. *Zbadaj pochodną funkcji Lapunowa tj. $\dot{V}(\boldsymbol{x})$*

W praktyce, jako funkcje V często wybiera się tzw. **formę kwadratową** wektora stanu, która przyjmuje postać

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{x} \tag{7}$$

gdzie $\boldsymbol{C}$ to symetryczna ($c_{ij} = c_{ji}$) to macierz kwadratowa $n \times n$ gdzie n to wymiar wektora stanu. Forma kwadratowa jest dodatnio określona (o czym mówią warunki Sylwestra), gdy wszystkie wyznaczniki utworzone z wyrazów macierzy $\boldsymbol{C}$ są dodatnie, zatem:

$$|c_{11}| > 0, \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots \tag{8}$$

Jeśli wymiar wektora stanu wynosi $n = 2$ a macierz C zostanie wybrana w ten sposób, że:

$$\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \frac{c_1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{c_2}{2} \end{bmatrix} \tag{9}$$

wówczas funkcja skalarna V przyjmie postać

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{c_1}{2}x_1^2 + \frac{c_2}{2}x_2^2 \tag{10}$$

a jej pochodna będzie określona jako

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = c_1 x_1 \dot{x}_1 + c_2 x_2 \dot{x}_2 \tag{11}$$

2.2 Sterująca funkcja Lapunowa

Rozważmy nieliniowy, stacjonarny układ dynamiczny opisany równaniem [1]

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}) \tag{12}$$

W sytuacji gdy układ jest wyposażony w r-wymiarowe wejście $\boldsymbol{u}$, układ można zapisać jako

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \tag{13}$$

Gdy spełniony jest warunek $f(0,0) = 0$, wejście sterujące można użyć do stabilizacji układu. Zwykle będzie to nieliniowe sprzężenie od zmiennych stanu, tj. $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Wtedy algorytm wykorzystania funkcji Lapunowa do projektowania sterowania zapewniającego stabilność układu, jest realizowany w trzech krokach:

Algorytm 2. *Algorytm projektowania sterowania stabilizującego układ* (13) *z wykorzystaniem funkcji Lapunowa:*

1. *Należy zaproponować funkcji skalarną (funkcje Lapunowa)* $V(\boldsymbol{x})$*.*
2. *Należy wyprowadzić postać pochodnej* $\dot{V}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ *funkcji skalarnej (funkcji Lapunowa) obliczanej wzdłuż trajektorii układu* (13)*.*
3. *Należy zaprojektować sterowanie* $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$*, które zapewni ujemność pochodnej* $\dot{V}(\boldsymbol{x})$

Przykład 2. Wykorzystując funkcji skalarną postaci $V(x) = \frac{1}{2}x^2$ zaprojektować sterowanie $u = u(x)$, które stabilizuje układ opisany równaniem

$$\dot{x} = cosx - x^3 + u. \tag{14}$$

Rozwiązanie
Jako funkcje skalarna spełniająca założenia twierdzenia Lapunowa, można wykorzystać funkcje

$$V(x) = \frac{1}{2}x^2 \tag{15}$$

Wtedy

$$\dot{V}(x) = x\dot{x} = xcosx - x^4 + xu \tag{16}$$

sterowanie

$$u(x) = -cosx + x^3 - kx, k > 0 \tag{17}$$

powoduje, że

$$\dot{V}(x) = -kx^2 <= 0 \tag{18}$$

czyli na pewno stabilizuje układ.

2.3 Stabilność Lapunowa układów liniowych

Badanie stabilności w sensie Lapunowa układów dynamicznych postaci

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \tag{19}$$

gdzie $\boldsymbol{x}$ to n-wymiarowy wektor stanu, rozpoczyna się od przyjęcia funkcji Lapunowa

$$V(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P} \boldsymbol{x} \tag{20}$$

gdzie $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^T$ to symetryczna i dodatnio określona (Pomocne okaże się kryterium Sylwestra.) macierz wymiaru $n \times n$. Jej pochodna wzdłuż trajektorii ma postać

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = \dot{\boldsymbol{x}}^T \boldsymbol{P}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x}^T(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A})\boldsymbol{x} \tag{21}$$

Przyjmując, że

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q} \tag{22}$$

równanie (21) można zapisać jako

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} \tag{23}$$

Z równania (23) Wynika, że o znaku pochodnej $\dot{V}(\boldsymbol{x})$ decyduje macierz $\boldsymbol{Q}$. Stąd wynika twierdzenie dotyczące stabilności układów linowych [2].

Twierdzenie 2. Układ liniowy postaci (19) jest stabilny, gdy istnieje symetryczna i dodatnio określona macierz $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^T$, która spełnia równanie (22).

W pracy [2] podano algorytm, który pozwala na sprawdzenie stabilności układu postaci (19).

Algorytm 3. *Sprawdzenie stabilności układów liniowych.*

1. *Należy ustalić macierz $\boldsymbol{Q}$. Można przyjąć, że $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$.*
2. *Wyznacz rozwiązanie równania (22) ze względu na elementy macierzy $\boldsymbol{P}$.*
3. *Jeśli można wykazać, że macierz $\boldsymbol{P}$ jest symetryczna i dodatnio określona, układ jest stabilny.*

3 Zadania do wykonania

3.1 Zadanie 1

Dla poniższych przykładów (wybrać przykład zgodnie z numerem komputera) wyznaczyć punkty równowagi. Dla tych, które są niezerowe (nawet gdy inne są zerowe), należy sprowadzić je do zera. Następnie, korzystając z Simulinka, należy zbudować model układu we współrzędnych pierwotnych (wektor stanu oznaczyć przez $\boldsymbol{x}$) oraz po transformacji (wektor stanu należy oznaczyć przez $\boldsymbol{z}$). Na podstawie zrealizowanych modeli należy pokazać trajektorię układu we współrzędnych pierwotnych i po transformacji dla dowolnego warunku początkowego $\boldsymbol{x}(0)$. Warunek początkowy $\boldsymbol{z}(0)$ wynika z przekształcenia $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_e$.

(I) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + \frac{1}{6}x_1^3 - x_2 \end{cases}$

(II) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_2(1 + x_1) \\ \dot{x}_2 = -x_1(1 - x_1) \end{cases}$

(III) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1 - x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1^2 - x_2 \end{cases}$

(IV) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = (2x_1 - 1)x_1 - 3x_2 \end{cases}$

(V) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0.5x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1^2 - 4x_2 \end{cases}$

(VI) $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2 \end{cases}$

(VII) $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1(x_2 - 2)^2 \end{cases}$

(VIII) $\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 - 1)(x_1 + x_2) \\ \dot{x}_2 = x_2 - x_1^2 \end{cases}$

3.2 Zadanie 2

Dla układu dynamicznego wybranego zgodnie z numerem komputera, należy dobrać sterowanie, które zapewni stabilizacje układu. Jego wybór należy uzasadnić przyjmując funkcje skalarną $V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}x^2$ i korzystając z metody bezpośredniej Lapunowa. Uzyskane rozwiązanie należy potwierdzić w symulacji dla dowolnie przyjętego warunku początkowego. Należy pokazać trajektorię układu, przebieg zmiennej stanu oraz przebieg sterowania.

(I) $\dot{x} = sinx - x^2 + u$

(II) $\dot{x} = cosx - \frac{1}{2}x^2 + u$

(III) $\dot{x} = cosx - \frac{1}{5}x^3 + u$

(IV) $\dot{x} = sin2x - x^3 + u$

(V) $\dot{x} = cosx - sinx - \frac{1}{7}x^3 + u$

(VI) $\dot{x} = cos3x - \frac{1}{9}x^3 + u$

(VII) $\dot{x} = sinx - cosx - x^2 + u$

(VIII) $\dot{x} = sin0.5x - x^3 + 2u$

3.3 Zadanie 3

Dany jest opis matematyczny układu modułu napędowego, który wyprowadzono i zidentyfikowano w ramach tematu 3. Wykazać jego stabilność, przyjmując że w układzie zastosowano sterowanie od stanu postaci $u = -\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}$ gdzie $\boldsymbol{K} = [k_1, k_2]$ a $k_1, k_2 > 0$. W tym celu należy użyć algorytmu 3.

4 Wymagania dotyczące sprawozdania

Realizacja laboratorium jest dokumentowana sprawozdaniem zawierającym część teoretyczną i rozwiązanie zadań 1-3.
Należy pamiętać o tytule sprawozdania, nagłówkach wyróżniających zadania, schematach i potrzebie skomentowania wyników. Prócz kodu programu (który powinien być skomentowany i zawierać odniesienia do wzorów z części teoretycznej) w pliku Livescript należy umieścić część teoretyczną będącą opisem problemu. Z plikiem Livescript należy dostarczyć pliki Simulink. Osie układu współrzędnych na wykresach mają być podpisane. Jeśli osie układu współrzędnych reprezentują wielkości fizyczne, należy podać jednostki.
Sprawozdanie będące plikiem LiveScript przekazujemy prowadzącemu zgodnie z ustalonymi zasadami.

Bibliografia

[1] Jacek Kabziński. *Projektowanie Nieliniowych Układów Sterowania*. Wydawnictwo Naukowe PWN, 2018.

[2] Mark W. Spong i M Vidyasagar. *Dynamika i Sterowanie Robotów.* Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP Warszawa Przemysłowy, 1997.