Teoria Sterowania
TEMAT 6

Układy dyskretne. Filtr Kalmana

dr inż. Paweł Penar

POLITECHNIKA RZESZOWSKA
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Rzeszów 2024

Liczba laboratoriów w temacie: 2

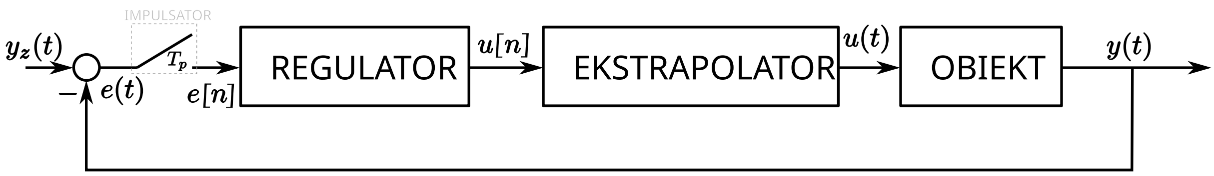
1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest zapoznanie studentów z dyskretnymi liniowymi układami dynamicznymi z zastosowaniem środowiska Matlaba/Simulinka.

2 Wprowadzenie

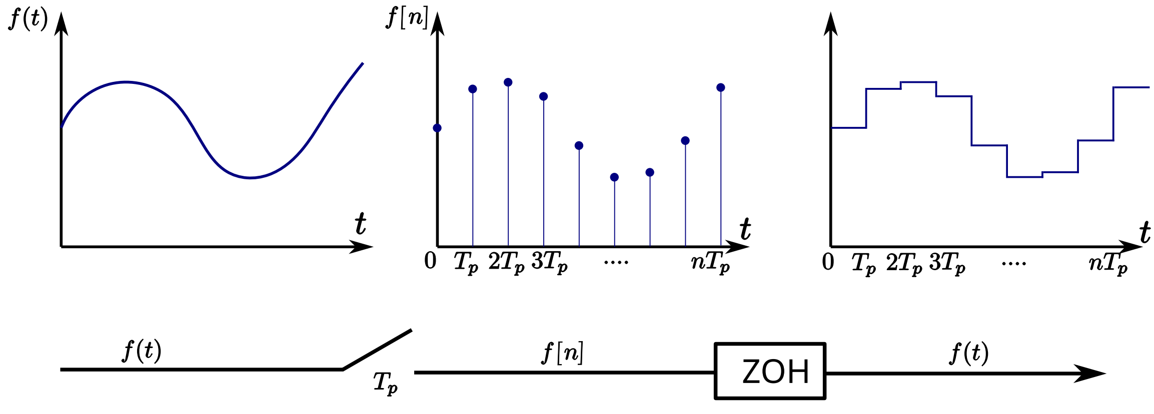
2.1 Układ z próbkowaniem

Na rys. 1 przedstawiono klasyczny układ regulacji ze sprzężeniem zwrotnym, gdzie wyróżniono obiekt, regulator i pętle sprzężenia zwrotnego. Z uwagi a fakt, że regulator jest realizowany w formie cyfrowej, poprzedza go **impulsator** a od obiektu oddziela **ekstrapolator**.



Rysunek 1: Schemat układu dyskretnego

Impulsator to element próbkujący sygnał. W omawianym przypadku (rys. 1) jest to sygnał błędu, który jako sygnał ciągły $e(t)$ jest próbkowany z krokiem dyskretyzacji T_p. Wówczas wejściem regulatora jest ciąg impulsów $e(n)$.
Ekstrapolator (*ang. zero order holder, ZOH*) zamienia ciąg impulsów na sygnał ciągły poprzez przedłużenie wartość sygnału o okres próbkowania, co pokazano na rys. 2



Rysunek 2: ZOH

Przykład 1. Wykorzystując środowisko Matlab narysuj ciągły (jako zależność od czasu, tj. $f(t)$) oraz dyskretny (jako zależność od ciągu próbek, tj. $f[n]$) przebieg funkcji $f(t) = e^{-t}sin3t$. Przyjmij $T_p = 0.25[s]$
Rozwiązanie
Poniżej przytoczono skrypt Matlab-a służący do wyznaczenia wartości funkcji dla kolejnych próbek dyskretnych. Kod rozdzielono krótkimi komentarzami.

Czyszczenie przestrzeni roboczej i deklaracja kroku dyskretyzacji

```
clear all;
Tp=0.25;
```

Wyznaczenie wektora, którego elementami są dyskretne kroki czasowe. Wyznaczenie jego długości

```
t=0:Tp:10
N=length(t)
```

Wyznaczenie wartości funkcji dla kolejnych kroków dyskretnych, tj. $f[n]$

```
for n=1:N
  f(n)=exp(-t(n))*sin(3*t(n));
end
```

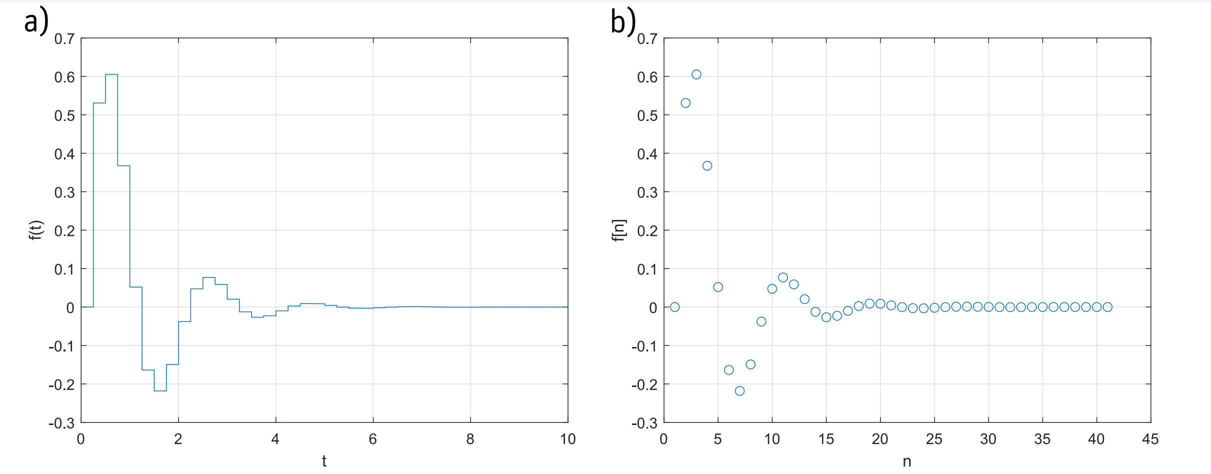
Wyznaczenie przebiegu funkcji w zależności od czasu, tj. $f(t)$ (przebieg schodkowy)

```
stairs(t,f) %!!
 xlabel('t');
 ylabel('f(t)');
 grid on;
```

Wyznaczenie przebiegu funkcji w zależności od ciągu próbek, tj. $f[n]$

```
plot(1:1:N,f,'o');
xlabel('n');
ylabel('f[n]');
grid on;
```

Na rys. 1a pokazano przebieg $f(t)$ a na rys. 1b przebieg $f[n]$.



Rysunek 3: Przebieg $f(t)$ (a) i $f[n]$ (b)

2.2 Metoda różnic skończonych

Metoda różnic skończonych pozwala na dyskretną reprezentacje układu ciągłego. Pozwala na zamianę równania różniczkowego na równania różnicowe, a zatem przybliża pochodną $\frac{dx}{dt}$ ilorazem $\frac{\Delta x}{\Delta t}$. W przypadku metody *w przód* iloraz dany jest zależnością

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(n+1) - x(n)}{T_p} \tag{1}$$

gdzie T_p to krok dyskretyzacji.

Przykład 2. Dane jest równanie różniczkowe postaci

$$a\dot{x} + x = u$$

gdzie a to stała. Używając metody różnic skończonych **w przód**, przeprowadź jego dyskretyzacje oraz wyznacz przebieg $x[n]$ w Matlabie (kod) i Simulinku. Przyjmij $u = 1$.
Rozwiązanie
Korzystając z metody różnic skończonych równanie ciągłe $a\dot{x} + x = u$ zapisano w postaci

$$a\frac{x[n+1] - x[n]}{T_p} + x[n] = u[n]$$

Stąd wynika

$$ax[n+1] - ax[n] + T_p x[n] = T_p u[n]$$

i ostatecznie

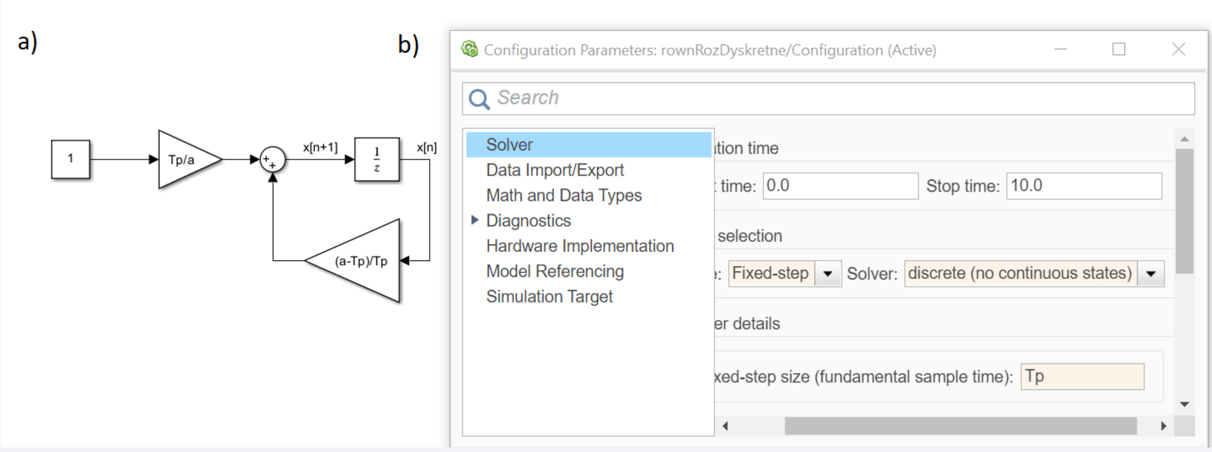
$$x[n+1] = \frac{a - T_p}{a} x[n] + \frac{T_p}{a} u[n] \tag{2}$$

Powyższe równanie to dyskretna wersja równania ciągłego $a\dot{x} + x = u$ gdzie T_p to czas dyskretyzacji. Jego implementacja w Matlabie/Simulinku pozwoli na wyznaczenie przebiegu $x[n]$ oraz $x(t)$ dla przyjętego kroku dyskretyzacji $T_p = 0.2$
Metoda I: Matlab
Poniższy kod, wyznacza przebieg $x[n]$ oraz $x(t)$

```
clear all
clc
Tp=0.2;
t=0:Tp:10;
N=length(t);
a=0.1;
u=1;
x(1)=1;
for n=1:N
    x(n+1) = ((a-Tp)/Tp)*x(n)+(Tp/a)*u;
end
stairs(t,x(1:N));
xlabel('t[s]'); ylabel('x(t)');
plot(1:1:N,x(1:N),'o');
xlabel('n');
ylabel('x[n]')
```

Metoda II: Simulink
Poniżej wywołano kod wywołujący model Simulinka (rys. 2a), dzięki któremu można wyznaczyć przebieg $x[n]$ oraz $x(t)$. Przyjęte ustawienia symulacji pokazano na rys. 2b

```
clear all;
clc;
Tp=0.2;
a=0.1;
u=1;
x0=1;
out=sim('rownRozDyskretne');
t=out.logsout{1}.Values.Time;
N=length(t);
xn=out.logsout{1}.Values.Data;
stairs(t,xn);
xlabel('t[s]'); ylabel('x(t)');
plot(1:1:N,xn(1:N),'o');
xlabel('n'); ylabel('x[n]');
```



Rysunek 4: Model Simulinka wyznaczający rozwiązanie równania (2) (a) oraz przyjęte ustawienia symulacji (b)

3 Zadania do wykonania

3.1 Zadanie 1

Wykorzystując środowisko Matlab (pętle *for*) narysuj ciągły (jako zależność od czasu, tj. $f(t)$) oraz dyskretny (jako zależność od ciągu próbek, tj. $f(n)$) przebieg funkcji $f(t)$, którą należy wybrać zgodnie z numerem przypisanym zespołowi. Przyjmij $T_p = 0.25, 0.1, 0.01[s]$. Zanotuj wnioski, które wynikają ze zmiany okresu próbkowania T_p.

(I) $f(t) = 2e^{-3t}$

(II) $f(t) = e^{-t}sin(3t)$

(III) $f(t) = 2t^2 - cos(3t)$

(IV) $f(t) = t(sin(t) + 2sin(12t))$

(V) $f(t) = t - sin(t)$

(VI) $f(t) = 2e^{t/10}cos(5t)$

(VII) $f(t) = t - \frac{2}{3}sin(10t)$

(VIII) $f(t) = 2 - cos(t)e^{-t}$

3.2 Zadanie 2

Używając metody różnic skończonych **w przód**, przeprowadź dyskretyzacje równania różniczkowego, które należy wybrać zgodnie z numerem zespołu. Następnie w Matlabie (kod) i Simulinku należy wyznaczyć przebieg $x[n]$ przyjmując krok dyskretyzacji $T_p = 0.2, x[1] = 1$. Znając krok dyskretyzacji T_p, wyznacz przebieg $x(t)$.

(I) $\dot{x}(t) = -0.2sin(x(t)) - x(t) + 1$

(II) $\dot{x}(t) = -0.2x(t)^2 - x(t) + 1$

(III) $\dot{x}(t) = 3x(t) - 2$

(IV) $\dot{x}(t) = -0.2sin(x(t))^2 + 1$

(V) $\dot{x}(t) = cos(x(t)) - x(t) + 1$

(VI) $\dot{x}(t) = 5x(t) - 3sin(x(t))$

(VII) $\dot{x}(t) = 3x(t) - cos(x(t))$

(VIII) $\dot{x}(t) = 3x(t)^2 - sin(x(t))$

Uwaga: W przypadku gdy układ jest niestabilny, dokonaj jego modyfikacji w celu uzyskania stabilności.

3.3 Zadanie 3

Dany jest układ silnika DC z przekładnią, którego dynamika została opisana w ramach tematu dotyczącego identyfikacji. Używając metody różnic skończonych **w przód**, przeprowadź dyskretyzacje modelu układu silnika DC z przekładnią oraz wyznacz przebieg $x(n)$ w Matlabie (kod) i Simulinku. Przyjmij $V = \xi 1[n]$, gdzie ξ to numer przypisany do zespołu. Zbadaj wpływ kroku dyskretyzacji na dokładność odwzorowania układu.

3.4 Zadanie 4

Model wyprowadzony w poprzednim zadaniu można rozszeżyć o wektor $\mathbf{w}$ nazywany szumem procesowym, który wynika z zewnętrznych czynników mających wpływ na obiekt oraz niedoskonałości wybranego modelu matematycznego. Drugą modyfikacją modelu względem poprzedniego zadania jest przyjęcie wyjścia jako $y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}[n] + v[k]$ gdzie v to szum pomiarowy będący rezultatem zakłóceń działania czujnika, a także niepewności samego sensora.
Tak przygotowany model należy uzupełnić o sprzężenie zwrotne (które wymusi odpowiednie zachowanie układu przy sprowadzaniu go z niezerowych warunków początkowych do zera) od stanu postaci $u[n] = -\mathbf{K}\mathbf{x}_{est}[n]$, gdzie $\mathbf{x}_{est}[n]$ to estymacja stanu uzyskana poprzez zastosowanie filtu Kalmana. Pondato należy przyjąć, że:

1. Warunek początkowy: $\mathbf{x}[0] = [(12 + \xi)\pi, 0]^T$ gdzie ξ to numer przypisany do zespołu,
2. Wartość wzmocnienia $\mathbf{K}$ wyznaczyć w porozumieniu z prowadzącym,
3. Krok dyskretyzacji: $T_p = 0.01$.

Poziomy wariancji szumów i wartości początkowe KFnależy dobrać samodzielnie. Wyniki symulacji zwizualizować na wykresach przedstawiających symulowany oraz estymowany stan układu, a także pomiar i estymację wyjścia układu.

4 Wymagania dotyczące sprawozdania

Realizacja laboratorium jest dokumentowana sprawozdaniem zawierającym rozwiązanie zadań 1-4, które poprzedza niezbędny opis teoretyczny.
Należy pamiętać o tytule sprawozdania, nagłówkach wyróżniających zadania, schematach i potrzebie skomentowania wyników. Prócz kodu programu (który powinien być skomentowany i zawierać odniesienia do wzorów z części teoretycznej) w pliku Livescript należy umieścić część teoretyczną będącą opisem problemu. Z plikiem Livescript należy dostarczyć pliki Simulink. Osie układu współrzędnych na wykresach mają być podpisane. Jeśli osie układu współrzędnych reprezentują wielkości fizyczne, należy podać jednostki.
Sprawozdanie będące plikiem LiveScript przekazujemy prowadzącemu zgodnie z ustalonymi zasadami.