Teoria Sterowania
TEMAT 5b

Synteza układu sterowania o zadanych z góry biegunach

dr inż. Paweł Penar

POLITECHNIKA RZESZOWSKA
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Rzeszów 2024

Liczba laboratoriów w temacie: 2

1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest zapoznanie studentów z zagadnieniami syntezy układu sterowania o zadanych z góry biegunach w oparciu o formułę Ackermana z zastosowaniem Matlaba/Simulinka. Ten cel uzupełnia synteza algorytmu sterowania w oparciu o regulator liniowo-kwadratowy.

2 Wprowadzenie

Dany jest układ dynamiczny postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{1}$$

Z wyjściem

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{2}$$

gdzie $\mathbf{x}$ to n-wymiarowy wektor stanu (dlatego mówimy, że układ jest n-tego rzędu), $\mathbf{A}$ to **macierz stanu** o wymiarach $n \times n$, $\mathbf{B}$ to **macierz wejść** o wymiarach $n \times r$ a $\mathbf{C}$ to **macierz wyjścia** o wymiarach $m \times n$. Natomiast $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^r$ to sterowanie. W przypadku tego laboratorium $r = 1$, stąd równanie 2, przyjmie postać

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \tag{3}$$

2.1 Obserwowalność i sterowalność

Twierdzenie 1. Liniowy układ dynamiczny dany jako (1) z wyjściem postaci (3) nazywamy **sterowalnym** jeśli spełniona jest zależność

$$rz \begin{bmatrix} \mathbf{B}, & \mathbf{A}\mathbf{B}, & \dots, & \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B} \end{bmatrix} = n \tag{4}$$

gdzie rz oznacza rząd macierzy.

Uwaga 1. Rząd macierzy w Matlabie obliczamy funkcją *rank*.

Twierdzenie 2. Liniowy układ dynamiczny dany jako (1) z wyjściem postaci (3) jest **obserwowalny** gdy spełniona jest zależność

$$rz \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \tag{5}$$

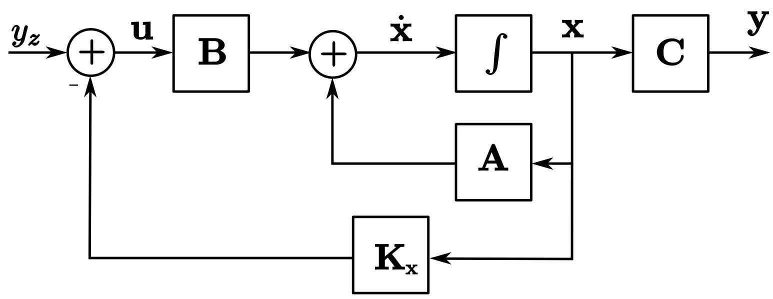
Inaczej mówiąc, układ dynamiczny jest obserwowalny jeśli rząd macierzy obserwowalności jest równy wymiarowi wektora stanu.

Co więcej

Uwaga 2. Obserwowalność jest, jak widać, algebraiczną własnością pary macierzy $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$ i mówi się o **obserwowalnej parze macierzy** $(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{A})$.

2.2 Sprzężenie od stanu. Formuła Ackermana

Wiadomo że bieguny tj. wartości własne macierzy stanu decydują o właściwościach (charakterze odpowiedzi) liniowego układu dynamicznego. Przy odpowiednich założeniach bieguny układu mogą być **lokowane** przez projektanta w ten sposób, by zapewnić stabilność i odpowiednie właściwości dynamiczne układu.
Zakładając, że **dysponujemy dostępem do całego wektora stanu**, warunkiem koniecznym rozwiązania zadania lokowania biegunów jest sterowalność pary $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$. W przypadku układów danych przez zależności (1) i (3) jest to warunek wystarczający.



Rysunek 1: Schemat blokowy zamkniętego układu dynamicznego ze sprzężeniem od stanu

Wiadomo, że macierzą stanu układu zamkniętego (rys. 1) jest macierz

$$\boldsymbol{A}_x = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}\boldsymbol{K}_x \tag{6}$$

z wielomianem charakterystyczny

$$M_x(s) = det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \ldots + a_0 \tag{7}$$

gdzie $\boldsymbol{K}_x = [k_1, k_2, \ldots, k_n]$ to n-elementowy wektor wzmocnień. Zakładając wartości własne macierzy $\boldsymbol{A}_x$ tj. znając wartości parametrów $a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ z zależności (7), (ta wiedza wynika ze znajomości założonych biegunów) wektor $\boldsymbol{K}_x$ może być wyznaczona z tzw. formuły Ackermana tj.

$$\boldsymbol{K}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} & \ldots & \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix}^{-1} M_x(\boldsymbol{A}) \tag{8}$$

Ostatecznie, procedurę wyznaczenie sprzężenia zwrotnego od stanu prowadzącą do lokowania biegunów, można zapisać w kilku punktach

Algorytm 1. *Lokowanie biegunów:*

1. *Sprawdzenie sterowalność pary* $(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})$
2. *Przyjęcie żądanych biegunów* $s_1, s_2, \ldots, s_n$.
3. *Wyznaczenie wielomianu charakter. postaci* (7) *i odczytanie wsp.* $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$
4. *Wyznaczenie macierzy* $M_x(\boldsymbol{A})$
5. *Wyznaczenie macierzy wzmocnień* $\boldsymbol{K}_x$ *zgodnie z formułą Ackermana postaci* (8)

Uwaga 3. W przypadku, gdy wymiar układu $n = 2$ tj. macierz $\boldsymbol{A}$ ma wymiar 2×2, równania (7) i (8) mają postać:

$$M_x(s) = det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c) = s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\boldsymbol{K}_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} \end{bmatrix}^{-1} M_x(\boldsymbol{A})$$

Uwaga 4. W przypadku, gdy wymiar układu $n = 4$ tj. macierz $\boldsymbol{A}$ ma wymiar 4×4, równania (7) i (8) mają postać:

$$M_x(s) = det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}_c) = s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\boldsymbol{K}_x = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{A^2B} & \boldsymbol{A^3B} \end{bmatrix}^{-1} M_x(\boldsymbol{A})$$

Uwaga 5. Sposób wyznaczenia $M_x(\boldsymbol{A})$ może nie być jasny. Dlatego, na podstawie zależności (7), rozpisano wyrażenie na $M_x(\boldsymbol{A})$. Zatem

$$M_x(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^n + a_{n-1}\boldsymbol{A}^{n-1} + \ldots + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I} \tag{9}$$

W szczególności, gdy macierz $\boldsymbol{A}$ ma wymiar 2×2 wyrażenia $M_C(\boldsymbol{A})$ przyjmuje postać

$$M_x(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^2 + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I}$$

W przypadku gdy macierz $\boldsymbol{A}$ ma wymiar 4×4 wyrażenia $M_C(\boldsymbol{A})$ przyjmuje postać

$$M_x(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{A}^4 + a_3\boldsymbol{A}^3 + a_2\boldsymbol{A}^2 + a_1\boldsymbol{A} + a_0\boldsymbol{I}$$

2.2.1 Przykład

Wykorzystując sprzężenie zwrotne od stanu, wyznaczyć wektor wzmocnienia $\boldsymbol{K}_x$ dla układu

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -34 & -40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} F \tag{10}$$

gdzie przez F oznaczono sterowanie. Wyznaczone wzmocnienie od stanu $\boldsymbol{K}_x$ ma powodować, że bieguny układu zamkniętego będą równe $s_1 = -1-5i, s_2 = -1+5i$. Należy wykonać symulacje działania układu przyjmując sensowe warunki początkowe i wymuszenie $F = 0$.
Poniżej przytoczono fragmentu kodu (w Matlabie) wykorzystywane do wyznaczenia wzmocnienia $\boldsymbol{K}_x$. Kod rozdzielono krótkimi komentarzami.
Sprawdzenie sterowalność pary $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$

```
rank([B A*B])
```

```
ans = 2
```

Wniosek: Układ dynamiczny jest sterowalny.
Przyjęcie żądanych biegunów s_1, s_2

```
s1=-1-5*i;
s2=-1+5*i;
```

Wyznaczenie wielomianu charakterystycznego $M_c(s)$ przy użyciu zmiennej symbolicznej

```
  Mc_zalozone = (s-s1)*(s-s2)
```

Odczytanie jego współczynników

```
  a=coeffs(Mc_zalozone,s)
```

a =

$$\begin{pmatrix} 26 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Po wyznaczeniu macierzy wzmocnień $\boldsymbol{K}_x$ zgodnie z formułą Ackermana otrzymano

K =

$$\begin{pmatrix} -4 & -19 \end{pmatrix}$$

Następnie sprawdzono bieguny układu zamkniętego

```
eig(A-B*K)
```

ans =

$$\begin{pmatrix} -1-5\,\mathrm{i} \\ -1+5\,\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

Znając wektor wzmocnień i wykorzystując model w Simulinku implementujący układ z rys. 1, można wyznaczyć przebieg zmiennych stanu w przypadku układu zamkniętego biegunów układu zamkniętego.

2.3 Regulator liniowo kwadratowy

Zdarza się, że w projektowaniu nie chodzi o precyzyjne umieszczenie poszczególnych biegunów a o osiągniecie pożądanych właściwości układu. Takie podejście jest realizowane w **problemie liniowo-kwadratowym**. Jest to metoda należąca do algorytmów sterowania optymalnego i pozwala na wyznaczanie współczynników sprzężeń dla układów wielowejściowych.
W problemie liniowo-kwadratowym (ang. **LQR**), dla wyjścia o wymiarze $r = 1$, zakładamy sterowanie od stanu

$$u = -\boldsymbol{K}_x \boldsymbol{x} \tag{11}$$

które stabilizuje układ. Wybrana wektor $\boldsymbol{K}_x$, zapewnia dążenie trajektorii układu do zera i ogranicza nadmierny wzrost sygnału sterującego u. Jest to pewien kompromis, który można sformalizować poprzez wybór funkcji celu, która będzie minimalizowana. W przypadku LQR jest to kwadratowy wskaźnik jakości postaci

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty [\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{Q} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{u}]dt \tag{12}$$

Macierz $\boldsymbol{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jest symetryczna i nieujemnie określona i ma interpretacje *kar* nakładanych za przebieg zmiennych stanu natomiast macierz $\boldsymbol{R} \in \mathbb{R}^{r \times r}$ która jest symetryczna i nieujemnie określona to koszt sterowania $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^r$. Wybór macierzy jest ilościowym opisem kompromisu pomiędzy szybkością dążenia trajektorii układu do zera a wielkością sterowania.
Dla wszystkich współczynników $k_1, k_2, \ldots, k_n$ będących elementami wektora $\boldsymbol{K}_x$, dla których wartość całki w funkcji celu J jest skończona, układ liniowy jest stabilny a sterowanie u sprowadza trajektorię układu z $\boldsymbol{x}(0) \neq \boldsymbol{0}$ do zera. W LQR wektor (a w przypadku $r > 1$ macierz) $\boldsymbol{K}_x$ jest wyznaczany z zależności

$$\boldsymbol{K}_x = \boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} \tag{13}$$

gdzie $\boldsymbol{P} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ to symetryczna i nieujemnie określona macierz wymiaru wyznaczana z **algebraicznego równania Riccatiego** postaci

$$\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{P} + \boldsymbol{P}\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{Q} \tag{14}$$

Można je rozwiązać analitycznie (jako układ równań) lub iteracyjnie.
Ostatecznie, problem liniowo-kwadratowy jest rozwiązywany w trzech krokach:

Algorytm 2. *Problem liniowo-kwadratowy*

1. *Wybrać* $\boldsymbol{Q}$ *i* $\boldsymbol{R}$
2. *Wyznaczyć macierz* $\boldsymbol{P}$ *rozwiązując równanie Riccatiego postaci* (14)
3. *Obliczyć wektor (w ogólności macierz) wzmocnień* $\boldsymbol{K}_x$ *w oparciu o zależność* (13)

> **Uwaga 6.** Rozwiązanie równania Riccatiego, wyznaczenie wzmocnienia $\boldsymbol{K}_x$ oraz określenie otrzymanych wartości własnych układu zamkniętego jest realizowane przez funkcję *lqr*.

3 Zadania do wykonania

3.1 Zadanie 1

Dla układu kulka-belka z silnikiem DC, który wyprowadzono na wykładzie należy wyznaczyć wzmocnienie od stanu, które zapewni, że układ zamknięty będzie posiadał następujące bieguny:

- $s_1 = -2 - 0.5k, s_2 = -1 - 0.5k, s_3 = -2.5 - 0.5k, s_4 = -1.5 - 0.5k,$
- $s_1 = -1 - (5 - 0.5k)i, s_2 = -1 + (5 - 0.5k)i, s_3 = -1.5 - (5 - 0.5k)i, s_4 = -1.5 + (5 - 0.5k)i$

gdzie k to numer przypisany do zespołu. Następne należy zrealizować (za pomocą Simulinka) symulacje w której układ z sprzężeniem zwrotnym od stanu będzie sprowadzany z niezerowych (sensownych) warunków początkowych do zera.

3.2 Zadanie 2

Dany jest model modułu napędowego, który wyprowadzono podczas realizacja identyfikacji w ramach tematu 3. Korzystając z funkcji *lqr* w Matlabie, należy dobrać macierz $\boldsymbol{Q}$ oraz stałą R w taki sposób by, układ sterowania osiągał wartość zadaną $y_z = c = 2k\pi$ przy czym:

- dążenie do wartości zadanej ma mieć charakter oscylacji gasnących,
- dążenie do wartości zadanej ma mieć charakter wykładniczy.

4 Wymagania dotyczące sprawozdania

Realizacja laboratorium jest dokumentowana sprawozdaniem zawierającym część teoretyczną i rozwiązanie zadań 1-5.
Należy pamiętać o tytule sprawozdania, nagłówkach wyróżniających zadania, schematach i potrzebie skomentowania wyników. Prócz kodu programu (który powinien być skomentowany i zawierać odniesienia do wzorów z części teoretycznej) w pliku Livescript należy umieścić część teoretyczną będącą opisem problemu. Z plikiem Livescript należy dostarczyć pliki Simulink. Osie układu współrzędnych na wykresach mają być podpisane. Jeśli osie układu współrzędnych reprezentują wielkości fizyczne, należy podać jednostki.
Sprawozdanie będące plikiem LiveScript przekazujemy prowadzącemu zgodnie z ustalonymi zasadami.