

Teoria Sterowania
TEMAT 5a

Sterowalność i obserwowalność układu

dr inż. Paweł Penar

POLITECHNIKA RZESZOWSKA
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Rzeszów 2024

1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest zapoznanie studentów z zagadnieniami obserwowalności i sterowalności na podstawie układu kulka-belka z silnikiem DC.

2 Wprowadzenie

Dany jest układ dynamiczny postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1)$$

Z wyjściem

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (2)$$

gdzie \mathbf{x} to n -wymiarowy wektor stanu (dlatego mówimy, że układ jest n -tego rzędu), \mathbf{A} to **macierz stanu** o wymiarach $n \times n$, \mathbf{B} to **macierz wejść** o wymiarach $n \times r$ a \mathbf{C} to **macierz wyjścia** o wymiarach $m \times n$. Natomiast $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r$ to sterowanie. W przypadku tego laboratorium $r = 1$, stąd równanie 2, przyjmie postać

$$y = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad (3)$$

2.1 Obserwowalność i sterowalność

Twierdzenie 1. Liniowy układ dynamiczny dany jako (1) z wyjściem postaci (3) nazywamy **sterowalnym** jeśli spełniona jest zależność

$$\text{rz} [\mathbf{B}, \mathbf{A}\mathbf{B}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (4)$$

gdzie rz oznacza rząd macierzy.

Uwaga 1. Rząd macierzy w Matlabie obliczamy funkcją *rank*.

Twierdzenie 2. Liniowy układ dynamiczny dany jako (1) z wyjściem postaci (3) jest **obserwowalny** gdy spełniona jest zależność

$$\text{rz} \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5)$$

Inaczej mówiąc, układ dynamiczny jest obserwowalny jeśli rząd macierzy obserwowalności jest równy wymiarowi wektora stanu.

Co więcej

Uwaga 2. Obserwowalność jest, jak widać, algebraiczną własnością pary macierzy (\mathbf{C}, \mathbf{A}) i mówi się o **obserwowalnej parze macierzy** (\mathbf{C}, \mathbf{A}) .

3 Zadania do wykonania

3.1 Zadanie 1

Zbadać obserwowalność i sterowalność układu kulka belka z silnikiem DC, który wyprowadzono w ramach wykładu. Przed wyznaczenie sterowalności i obserwowalności zapisać model, interpretacje jego stałych oraz opisać fizyczne znaczenie zmiennych stanu. Przyjąć, że macierz wyjścia $\mathbf{C} = \mathbf{I}_{4 \times 4}$.

3.2 Zadanie 2

Zbadać obserwowalność i sterowalność układu postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} k+1 & 0 \\ k+1 & k+3 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} k+2 \\ 0 \end{bmatrix} u, \mathbf{y} = \begin{bmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

gdzie k to numer przypisany zespołowi. Rozważyć interpretacje wynikającą z budowy układu.

4 Wymagania dotyczące sprawozdania

Realizacja laboratorium jest dokumentowana sprawozdaniem zawierającym rozwiązanie zadań 1-2. Należy pamiętać o tytule sprawozdania, nagłówkach wyróżniających zadania, schematach i potrzebie skomentowania wyników.

Sprawozdanie będące plikiem LiveScript przekazujemy prowadzącemu zgodnie z ustalonymi zasadami.