Metoda warunkowa

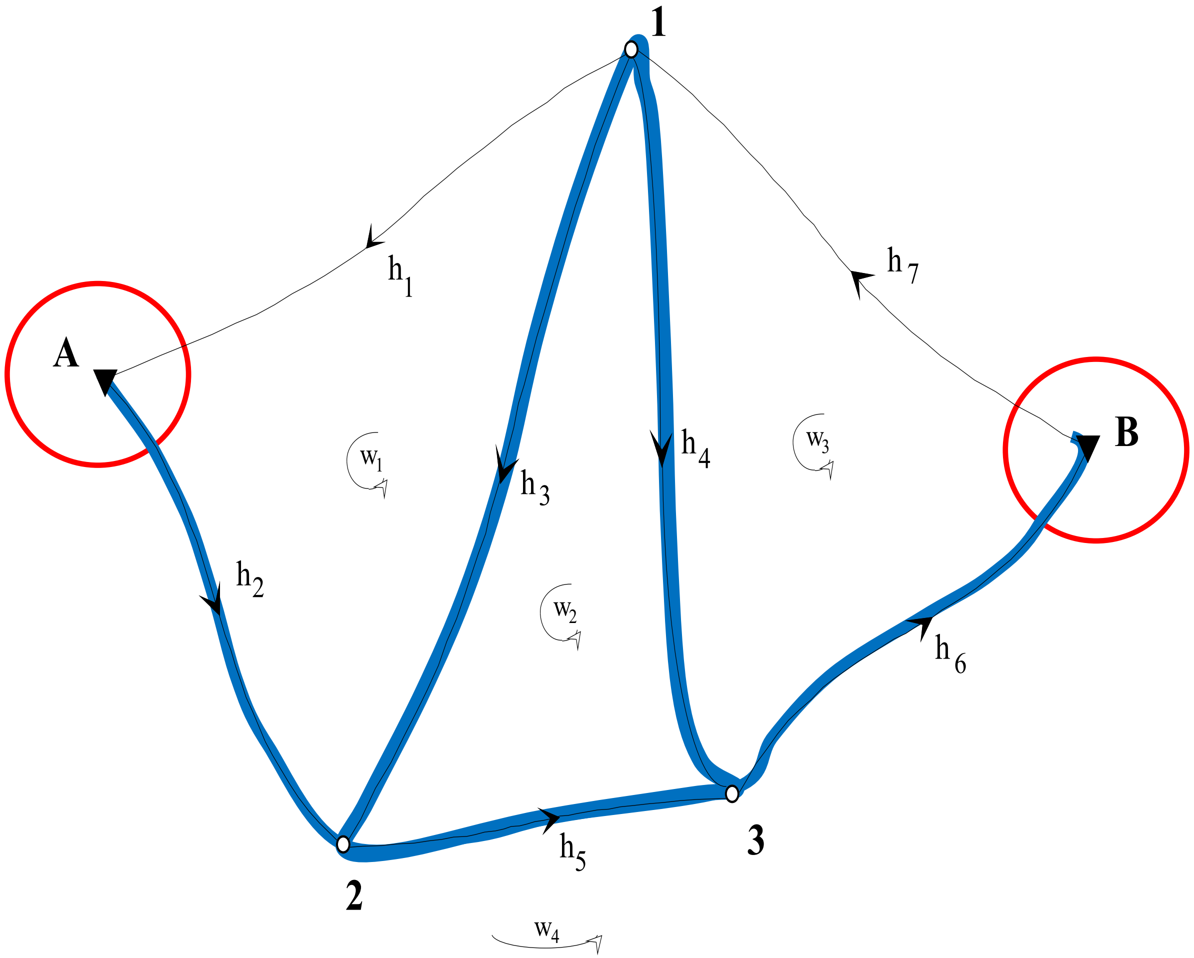
Edward Preweda

Zadanie

Wyrównać sieć wysokościową metodą warunkową wraz z pełną oceną dokładności.

Estymacje przedziałową dla wariancji i odchylenia standardowego oraz niewiadomych przeprowadzić na poziomie ufności $(1-\alpha)=0{,}95$

Dane



$$Z_A = 231.314 \text{ m}$$
$$Z_B = 227.597 \text{ m}$$

h_1	=	2.710 m	/ 1 km
h_2	=	−4.730 m	/ 2 km
h_3	=	−2.013 m	/ 4 km
h_4	=	1.111 m	/ 4 km
h_5	=	3.120 m	/ 1 km
h_6	=	−2.115 m	/ 1 km
h_7	=	0.998 m	/ 1 km

Rozwiązanie

W pierwszym etapie należy określić warunki. Liczba warunków ma być równa liczbie stopni swobody, czyli

$$\boldsymbol{w = n - u = 7 - 3 = 4}$$

Warunki muszą być niezależne i obejmować wszystkie obserwacje.

Przykładowe warunki jakie można zdefiniować dla rozpatrywanej sieci zaznaczono symbolicznie na szkicu.

Równania warunkowe przyjmują np. postać:

$$
\begin{aligned}
h_1 + v_1 + h_2 + v_2 - h_3 - v_3 &= 0 \\
h_3 + v_3 - h_4 - v_4 + h_5 + v_5 &= 0 \\
h_4 + v_4 + h_6 + v_6 + h_7 + v_7 &= 0 \\
h_2 + v_2 + h_5 + v_5 + h_6 + v_6 &= Z_B - Z_A
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie układu równań

Macierz współczynników równań warunkowych i wyrazy wolne wynikają z warunków. Macierz wag – w tym przypadku z liczby stanowisk na poszczególnych ciągach.

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c|ccccccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 & v_7 \\ \hline w_1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ w_3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ w_4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0,25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,00 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{L}$$

Wyrazy wolne w modelu warunkowym

Jeżeli za niewiadome $\hat{\mathbf{x}}$ przyjmiemy odchyłki od modelu $\hat{\boldsymbol{\delta}}$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} h_1 + h_2 - h_3 \\ h_3 - h_4 + h_5 \\ h_4 + h_6 + h_7 \\ h_2 + h_5 + h_6 - (Z_B - Z_A) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 \\ -4 \\ -6 \\ -8 \end{bmatrix} [mm]$$

Wyrównane przewyższenia $\Rightarrow$ $\hat{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{h} - \hat{\boldsymbol{\delta}}$

Wyrazy wolne w modelu warunkowym

Jeżeli za niewiadome $\hat{\mathbf{x}}$ przyjmiemy poprawki do obserwacji $\hat{\mathbf{v}}$:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0-(h_1+h_2-h_3) \\ 0-(h_3-h_4+h_5) \\ 0-(h_4+h_6+h_7) \\ 0-\left(h_2+h_5+h_6-(Z_B-Z_A)\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix} [mm]$$

Wyrównane przewyższenia $\Rightarrow$ $\hat{\boldsymbol{h}} = \boldsymbol{h} + \hat{\boldsymbol{v}}$

Kontrole w modelu warunkowym

Kontrola obliczeń:

Sprawdzamy, czy $$\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{v} = \left(\left(\mathbf{A}\,\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{L}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{L}$$

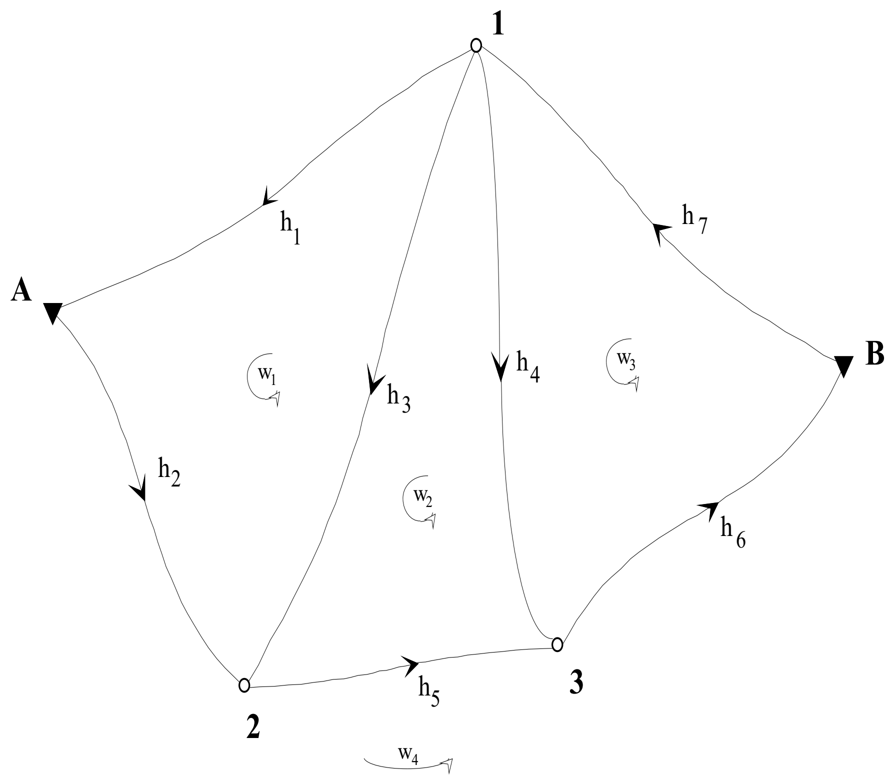
Kontrola poprawności ułożenia układu równań:

Sprawdzamy, czy wyrównane przewyższenia spełniają układ równań warunkowych. W tym przypadku, czy

$$
\begin{aligned}
\hat{h}_1 + \hat{h}_2 - \hat{h}_3 &= 0 \\
\hat{h}_3 - \hat{h}_4 + \hat{h}_5 &= 0 \\
\hat{h}_4 + \hat{h}_6 + \hat{h}_7 &= 0 \\
\hat{h}_2 + \hat{h}_5 + \hat{h}_6 &= Z_B - Z_A
\end{aligned}
$$

Wyrównane wysokości

Obliczamy je na podstawie wysokości reperów nawiązania i wyrównanych przewyższeń – dowolną drogą, np.



$$\hat{Z}_1 = Z_A - \hat{h}_1$$

$$\hat{Z}_2 = Z_A + \hat{h}_2$$

$$\hat{Z}_3 = Z_B - \hat{h}_6$$

Ocena dokładności

Wariancję resztową i odchylenie standardowe (m_0) obliczamy identycznie jak w modelu parametrycznym, czyli:

$$\hat{\sigma}_0^{\ 2} = m_0^{\ 2} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\ \mathbf{v}}{n-u} = 14.26 \ \ \mathrm{mm}^2$$

Macierz kowariancji dla obserwacji:

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{h}}) = \sigma_o^{\ 2}\left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}\right]$$

Ocena dokładności

Wariancję resztową i odchylenie standardowe (m0) obliczamy identycznie jak w modelu parametrycznym, czyli:

$$\hat{\sigma}_0^{\ 2} = m_0^{\ 2} = \frac{\mathbf{v}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\ \mathbf{v}}{n-u} = 14.26 \ \ \mathrm{mm}^2$$

Macierz kowariancji dla obserwacji:

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{h}}) = \sigma_o^{\ 2}\left[\mathbf{P}^{-1} - \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{AP}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\mathbf{AP}^{-1}\right]$$

Ocena dokładności

Macierz kowariancji dla wyrównanych wysokości wyznaczamy zgodnie z zasadą propagacji kowariancji (**F^{T}CovF**).

Nie ma jednego wzoru, ponieważ sposobów wyznaczenia wyrównanych wysokości reperów może być wiele. Jeżeli:

$$\begin{aligned}\hat{Z}_1 &= Z_A - \hat{h}_1 \\ \hat{Z}_2 &= Z_A + \hat{h}_2 \\ \hat{Z}_3 &= Z_B - \hat{h}_6\end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ocena dokładności

$$\mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{Z}}) = \mathbf{F}^T \mathbf{Cov}(\hat{\mathbf{h}})\,\mathbf{F} \;=\begin{bmatrix} 6.0096 & 1.6622 & 1.4065 \\ 1.6622 & 11.3798 & 5.2424 \\ 1.4065 & 5.2424 & 8.8225 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_{\hat{Z}_i} = \begin{bmatrix} 2.4 \\ 3.4 \\ 3.0 \end{bmatrix} [\mathrm{mm}]$$

Estymację przedziałową wykonuje się według zasad znanych z poprzedniego semestru.

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

Sieci poziome (kątowo-liniowe) stanowią geodezyjną konstrukcję, w której punkty są wzajemnie połączone liniami prostymi, wzdłuż których wyznaczane są odległości poziome oraz między nimi kąty poziome.

Zarówno pomierzone kąty jak i odległości muszą spełniać określone warunki geometryczne w konstrukcji geodezyjnej tej sieci.

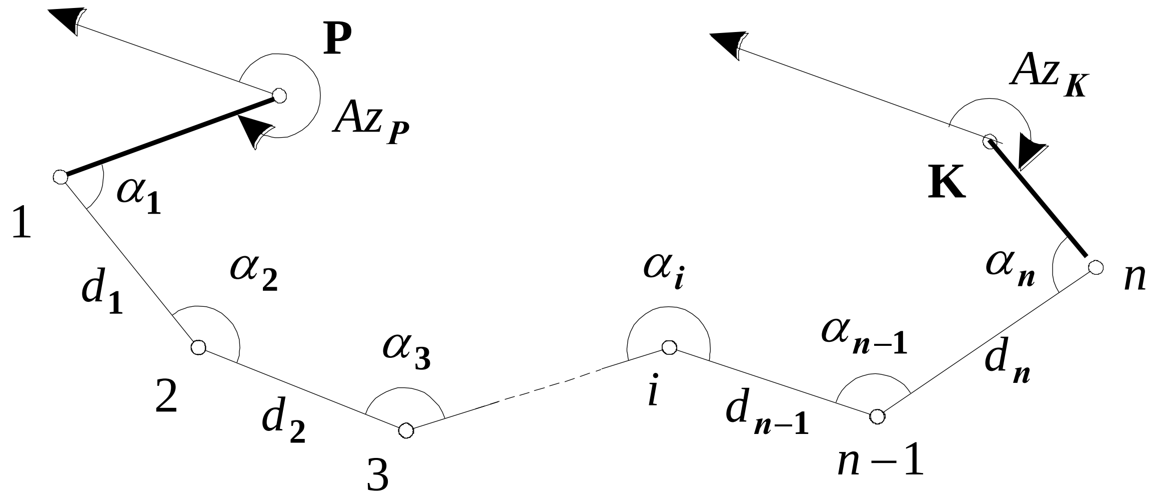
Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

Warunki dla kątów w figurach zamkniętych mają zawsze postać liniową. Ich ogólna forma jest następująca

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\,200^{\mathbf{g}}$$

przy czym *n* oznacza liczbę wierzchołków (kątów) w rozpatrywanej figurze zamkniętej.

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych



Warunki dla kątów w figurach otwartych o znanych na końcowych odcinkach kątach kierunkowych (azymutach), mają postać:

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{\alpha_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + Az_P - Az_K - (n-1)\,200^{g}$$

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

Warunki funkcyjne na kąty i długości w figurach otwartych lub zamkniętych, o znanych współrzędnych punktów

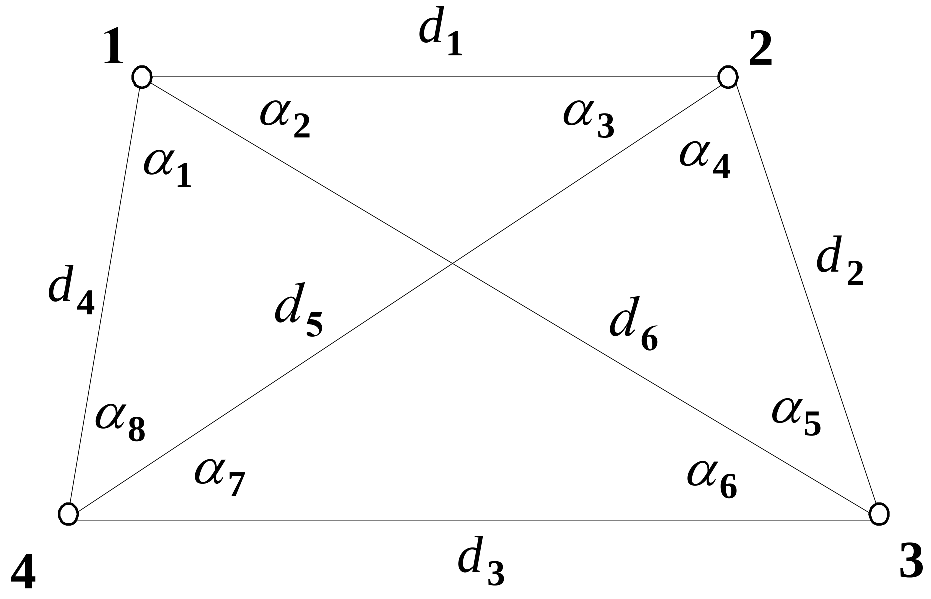
$$\left(X_1, Y_1\right) \qquad \left(X_n, Y_n\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\cos Az_i\right)\delta_{d_i} - \sum_{i=1}^{n-1}\left(\Delta y_{i,n}\right)\delta_{\alpha_i} = X_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \cos Az_i - X_n$$

$$\sum_{i=1}^{n-1}\left(\sin Az_i\right)\delta_{d_i} + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\Delta x_{i,n}\right)\delta_{\alpha_i} = Y_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i \sin Az_i - Y_n$$

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

Warunki funkcyjne na kąty i długości w figurach geometrycznych trójkątnych



$$\frac{d_1}{d_5}\frac{d_5}{d_3}\frac{d_3}{d_2}\frac{d_2}{d_1}=\frac{\sin\alpha_8\sin(\alpha_5+\alpha_6)\sin\alpha_4\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin\alpha_4\sin\alpha_7\sin\alpha_5}$$

$$\frac{d_4}{d_6}\frac{d_6}{d_2}=\frac{\sin\alpha_6\sin(\alpha_3+\alpha_4)}{\sin(\alpha_7+\alpha_8)\sin\alpha_2}$$

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

Warunek ten można zapisać w postaci zwanej warunkiem baz

$$\frac{d_4}{d_2} = \frac{\sin\alpha_6 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)}{\sin(\alpha_7 + \alpha_8)\sin\alpha_2}$$

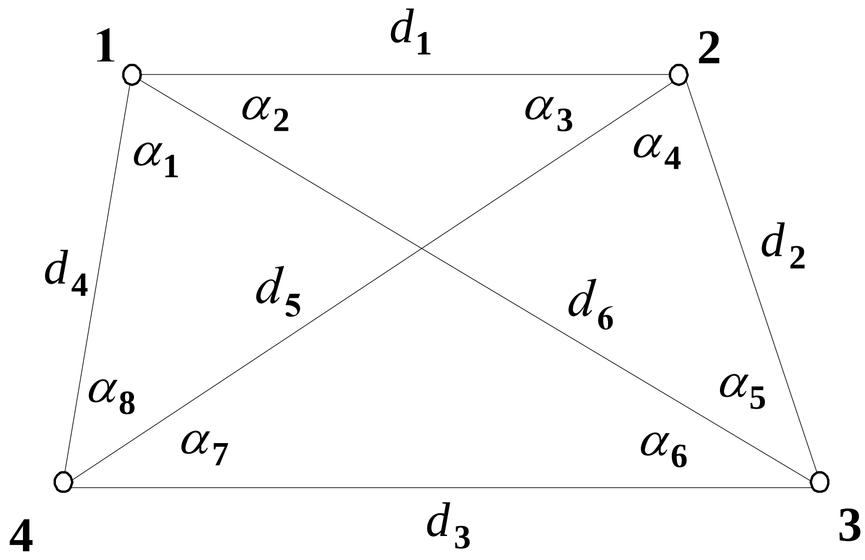
$$d_4 \sin(\alpha_7 + \alpha_8)\sin\alpha_2 - d_2 \sin\alpha_6 \sin(\alpha_3 + \alpha_4) = 0$$

Po rozwinięciu w szereg Taylora,

$$\begin{aligned} &\sin\alpha_2 \sin(\alpha_7 + \alpha_8)\cdot \delta_{d_4} - \sin\alpha_6 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)\cdot \delta_{d_2} + \\ &+ d_4 \sin\alpha_2\left(\delta_{\alpha_7} + \delta_{\alpha_8}\right)\cos(\alpha_7 + \alpha_8) + d_4 \cos\alpha_2 \cdot \sin(\alpha_7 + \alpha_8)\delta_{\alpha_2} - \\ &- d_2 \cos\alpha_6 \sin(\alpha_3 + \alpha_4)\cdot \delta_{\alpha_6} - d_2 \sin\alpha_6 \cos(\alpha_3 + \alpha_4)\cdot\left(\delta_{\alpha_3} + \delta_{\alpha_4}\right) = \\ &= d_4 \sin\alpha_2 \sin(\alpha_7 + \alpha_8) - d_2 \sin\alpha_6 \sin(\alpha_3 + \alpha_4) \end{aligned}$$

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

Warunki funkcyjne na długości boków w figurach czworokątnych z przekątnymi można rozpatrywać przez porównanie pól powierzchni odpowiednich trójkątów.



$$S_{123} + S_{341} = S_{234} + S_{412}$$

Uwzględniając wzór na pole trójkąta

$$S_{d_1,d_2,d_3} = \sqrt{p(p-d_1)(p-d_2)(p-d_3)}$$

$$p = \frac{1}{2}(d_1 + d_2 + d_3)$$

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

Warunek funkcyjny na współrzędne punktów na podstawie ustalonego pola S figury. Na podstawie wzoru Gaussa

$$2S = \sum_{i=1}^{n} \left(x_{i+1} - x_{i-1}\right) y_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{i-1}\right) \delta_{y_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{y}_{i-1} - \bar{y}_{i+1}\right) \delta_{x_i} = 2S - \sum_{i=1}^{n} \left(\bar{x}_{i+1} - \bar{x}_{i-1}\right) y_i$$

Warunki funkcyjne w sieciach kątowo-liniowych

$$\Big[\ (d_1+d_2+d_6)(-d_1+d_2+d_6)(d_1-d_2+d_6)(d_1+d_2-d_6)+$$
$$(d_3+d_4+d_6)(-d_3+d_4+d_6)(d_3-d_4+d_6)(d_3+d_4-d_6)+$$
$$(d_2+d_3+d_5)(-d_2+d_3+d_5)(d_2-d_3+d_5)(d_2+d_3-d_5)+$$
$$-(d_1+d_4+d_5)(-d_1+d_4+d_5)(d_1-d_4+d_5)(d_1+d_4-d_5)\ \Big]^{\frac{1}{2}}=0$$

Po wykonaniu działań i redukcji wyrazów podobnych a następnie rozwinięciu w szereg Taylora otrzymuje się równanie warunkowe w postaci liniowej.

Dyskusja

Dziękuję za uwagę