Teoria Sterowania
TEMAT 3

Rozwiązanie równania stanu. Analiza ruchu układu.

dr inż. Paweł Penar

POLITECHNIKA RZESZOWSKA
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Rzeszów 2024

Liczba labolatoriów w temacie: 2

1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest analiza rozwiązania równania stanu i jego trajektorii w odniesieniu do rozwiązania równania charakterystycznego (wartości własnych) układu.

2 Wprowadzenie i przykłady

2.1 Wektory własne i wartości własne

Niezerowy wektor $\mathbf{v}$ (rzeczywisty lub zespolony) jest nazywany **wektorem własnym** macierzy kwadratowej $\mathbf{A}$ z odpowiadającą mu **wartością własną** λ (która może być rzeczywista lub zespolona), jeśli [1]

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \tag{1}$$

lub równoważnie

$$(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{v} = 0 \tag{2}$$

Niezerowe rozwiązanie tego równania jest możliwe wtedy i tylko wtedy, gdy spełniony jest warunek

$$det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{3}$$

Przykład 1. Dla macierzy kwadratowej

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

wyznacz jej wartości własne (oznaczając je jako s) korzystając z metody analitycznej

Rozwiązanie

Wyznacznik $det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$ dla macierzy dla danej macierzy to

$$det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 3 & s+4 \end{vmatrix} = s(s+4) + 3 = s^2 + 4s + 3.$$

Rozwiązując równanie

$$s^2 + 4s + 3 = 0$$

otrzymano $s_1 = \frac{-4-2}{2} = -3$, $s_2 = \frac{-4+2}{2} = -1$. Są to wartości własne macierzy $\mathbf{A}$.

2.2 Rozwiązanie równania stanu z zastosowaniem transformaty Laplace'a

Równanie

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{5}$$

można rozwiązać, stosując transformatę Laplace'a, tj.

$$s\mathbf{X}(s) - x(0) = \mathbf{A}\mathbf{X}(s) + \mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{6}$$

Po prostym przekształceniu transformata Laplace'a pozwala na wyznaczenie wektora stanu $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ w przestrzeni s:

$$\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - A)^{-1}x_0 + (s\mathbf{I} - A)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s) \tag{7}$$

Stosując odwrotną transformatę Laplace'a, można otrzymać

$$\mathbf{x}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - A)^{-1}\right\} x_0 + \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - A)^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)\right\} \tag{8}$$

Rozwiązanie równania stanu składa się z odpowiedzi **swobodnej** i **wymuszonej**.

Przykład 2. Na podstawie zależności (8) wyznaczyć odpowiedz wymuszoną silnika DC, dla którego opis w przestrzeni stanów ma postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 1 \\ -0.02 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_{in} \tag{9}$$

Jako wymuszenie przyjąć skok jednostkowy.
Rozwiązanie
Poniżej przytoczono kod wykorzystujący procesor symboliczny do wyznaczenia odpowiedzi wymuszonej dla modelu silnika DC na podstawie odwrotnej transformaty Laplace'a. Kod rozdzielono krótkimi komentarzami.

```
clear all;
```

Deklaracja macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, sterowania u_{in} oraz zmiennej symbolicznej s

```
syms s
A=[-10 1;-0.02 -2];
B=[0;2];
u=1;
```

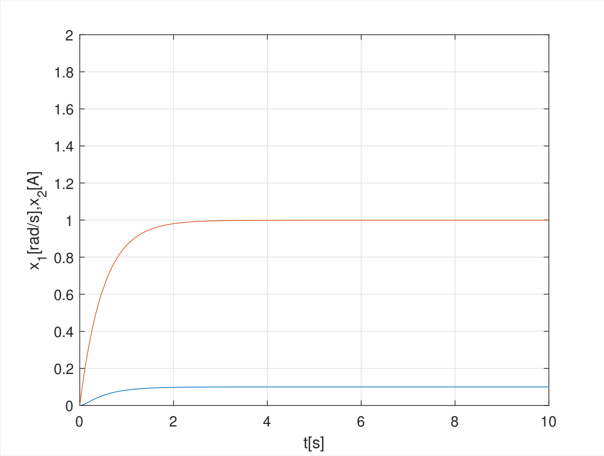
Odpowiedz wymuszona: $\mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}BU(s)\right\}$

```
uLap = laplace(u,s)
I=eye(2);
res = inv(s*I-A)
xWym = ilaplace(res*B*uLap)
```

Przebieg zmiennych x_1, x_2

```
fplot(xWym,[0 10])
xlabel('t[s]'); ylabel('x_1[rad/s],x_2[A]'); grid on;
axis([0 10 0 1.2])
```

Na rys.1 zamieszczono przebieg zmiennych stanu x_1, x_2.



Rysunek 1: Przebieg zmiennych stanu x_1, x_2 dla rozważanego silnika DC

2.3 Macierz fundamentalna

Z równania (8) wynika, że odpowiedz swobodna i wymuszona zależy od macierzy, którą nazywamy **fundamentalną**. Jej postać to

$$\Psi(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{(s\mathbf{I} - A)^{-1}\right\} \tag{10}$$

Macierz $\Psi(t)$ można zapisać jako (patrz wykład) [1]:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{V}\begin{bmatrix} e^{s_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{s_2 t} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e^{s_n t} \end{bmatrix}\mathbf{W} = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i t}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T \tag{11}$$

gdzie $\mathbf{V}$ to macierz postaci $\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \dots & \mathbf{v}_n\end{bmatrix}$, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ to wektory własne macierzy $\mathbf{A}$, $s_1, s_2, \dots, s_n$ to wartości własne macierzy $\mathbf{A}$, natomiast $\mathbf{W} = \mathbf{V}^{-1}$.

2.4 Analiza rozwiązania równania stanu w dziedzinie czasu. Mody układu

Bazując za równaniu (8) oraz macierzy fundamentalnej $\mathbf{\Phi}(t)$, trajektorię układu można zapisać w postaci

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{\Psi}(t-\tau)\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i t}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T\mathbf{x}_0 + \int_0^t \sum_{i=1}^{n} e^{s_i(t-\tau)}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{12}$$

Jest to **modalna postać trajektorii stanu** [1]. Każdy ze składników sumy w równaniu (12) jest nazywany **modem**. W każdym z nich można wyróżnić **składowe swobodne modu** tj. $\sum_{i=1}^{n} e^{s_i t}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T\mathbf{x}_0$ i **składowe wymuszone**, czyli $\sum_{i=1}^{n} e^{s_i t}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T \int_0^t e^{-s_i\tau}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau$.

Przykład 3. Korzystając z procesora symbolicznego oraz wiedząc, że macierz stanu ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix}$$

należy wyznaczyć wartości stałych a, b tak, by jej wartości własne s_1, s_2 miały wartość $s_1 = -2 + 2i, s_2 = -2 - 2i$.
Następnie, na podstawie zależności (12), należy wyznaczyć odpowiedz swobodną i wymuszoną

(dla skoku jednostkowego), przyjmując $x(0) = [0.5, 0.5]^T, \mathbf{B} = [0, 1]^T$.
Rozwiązanie
Poniżej przytoczono kod wykorzystujący procesor symboliczny do wyznaczenia stałych a, b oraz odpowiedzi układu. Kod rozdzielono krótkimi komentarzami.
Czyszczenie przestrzeni roboczej

```
clear all;
```

Deklaracja macierzy $\mathbf{A}, \mathbf{B}$, warunku początkowego, sterowania u oraz zmiennych pomocniczych i symbolicznych

```
syms a b t tau s
A=[0 1;-a -b];
B=[0;1];
x0=[0.5;0.5];
u=1;
I=eye(2);
```

Wyznaczenie równania charakterystycznego macierzy $\mathbf{A}$ i jego współczynników

```
rchA = det(s*I-A)
coeffRchA = coeffs(rchA,s)
```

coeffRchA =
$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \end{pmatrix}$$

Definicja pożądanych wartości własnych macierzy A i wyznaczenie współczynników równania charakterystycznego

```
s1=-2+2*i;
s2=-2-2*i;
projRch = expand((s-s1)*(s-s2))
coeffProjRch=coeffs(projRch,s)
```

coeffProjRch =
$$\begin{pmatrix} 8 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Wyznaczanie współczynników a i b oraz podstawienie wartości do macierzy $\mathbf{A}$

```
solvRch=solve([coeffRchA(1)==coeffProjRch(1),...
coeffRchA(2)==coeffProjRch(2)],[a,b])
```

```
solvRch =
    a: 8
    b: 4
```

```
A=subs(A,solvRch)
```

A =

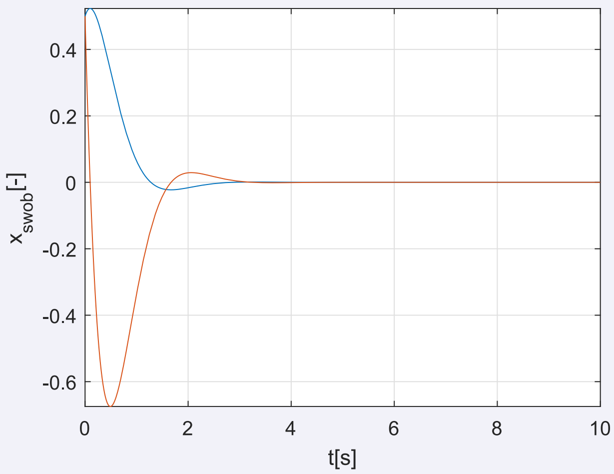
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$$

Wyznaczenie macierzy $\Phi(t)$

```
A=vpa(A); %obciecie dokładności
[V S] = eig(A);
W=inv(V);
St = [exp(S(1,1)*t),0;0,exp(S(2,2)*t)];
Phi =V*St*W
```

Wyznaczenie odpowiedzi swobodnej $\mathbf{x}_{swob}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{x}_0 = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i t}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T\mathbf{x}_0$ (rys. 2)

```
xSwob = Phi*x0
fplot(xSwob,[0 10])
xlabel('t[s]'); ylabel('x_{swob}[-]'); grid on
```



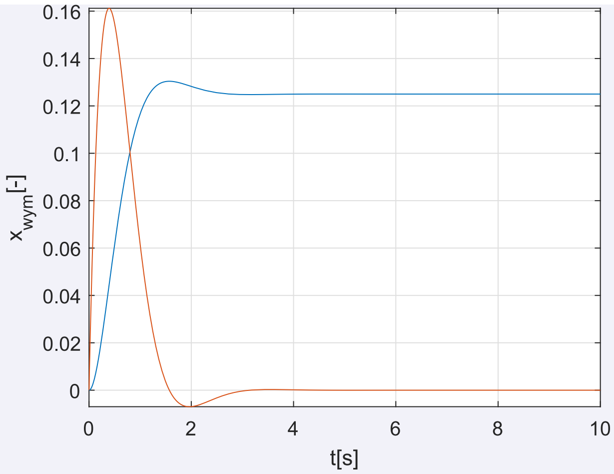
Rysunek 2: Odpowiedz swobodna układu

Wyznaczenie macierzy $\mathbf{\Psi}(t-\tau) = \sum_{i=1}^{n} e^{s_i(t-\tau)}\mathbf{v}_i\mathbf{w}_i^T$

```
St = [exp(S(1,1)*(t-tau)),0;0,exp(S(2,2)*(t-tau))];
PhiTau =V*St*W
```

Wyznaczenie odpowiedzi wymuszonej (rys. 3)

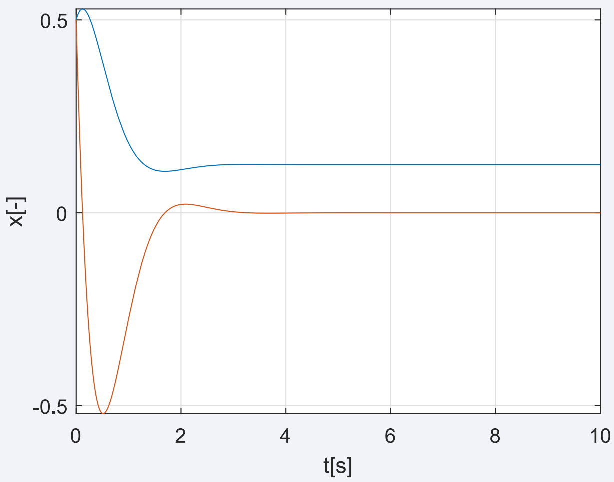
```
xWym=int(PhiTau*B*u,tau,[0 t])
fplot(xWym,[0 10])
xlabel('t[s]'); ylabel('x_{wym}[-]'); grid on
```



Rysunek 3: Odpowiedz wymuszona układu

Wyznaczenie sumy odpowiedzi (rys. 4)

```
fplot(xSwob+xWym,[0 10])
xlabel('t[s]'); ylabel('x[-]'); grid on
```



Rysunek 4: Odpowiedz układu

3 Zadania do wykonania

3.1 Wartości własne i wektory własne

Dla danej macierzy **A** wyznacz (ręcznie) jej wartości własne. Potwierdź wynik używając funkcji *eig* pakietu Matlab.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix}$
2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$
3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$
4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -0.5 \end{bmatrix}$
5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$
6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$

3.2 Rozwiązanie równania stanu z zastosowaniem transformaty Laplace'a

Korzystając z przekształcenia Laplace'a wyznaczyć odpowiedz swobodną i wymuszoną dla układu kulka-belka (ze wstawionymi wartościami parametrów), który wyprowadzono w poprzednim laboratorium. Przyjąć dowolny (sensowny) warunek początkowy i wymuszenie skokowe postaci $\theta = 0.1k$, gdzie k to numer przypisany do zespołu.

3.3 Wyznaczanie macierzy fundamentalnej cz. 1

Wybierając odpowiednią (dla danego zespołu) macierz $\mathbf{A}$ z punktu 3.1 oraz wspomagając się funkcją *eig* Matlaba, wyznacz analitycznie macierz fundamentalną $\mathbf{\Phi}(t)$ macierzy $\mathbf{A}$. Następnie wyznacz przebieg elementów wektora stanu $\boldsymbol{x} = \mathbf{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0$ dla $t = 0..8, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$. **W oparciu o postać macierzy fundamentalnej uzasadnij charakter otrzymany przebiegu elementów wektora stanu.**

3.4 Wyznaczanie macierzy fundamentalnej cz. 2

Przyjmując, że macierz stanu odpowiada układowi kulka-belka, tak jak w pkt. 3.2 oraz korzystając z procedury (kodu) zadania 3.3, wyznacz przebieg elementów wektora stanu $\boldsymbol{x} = \mathbf{\Phi}(t)\boldsymbol{x}_0$ dla $t = 0..2, \boldsymbol{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0.1k \end{bmatrix}^T$ (k to numer przypisany do zespołu). **W oparciu o postać macierzy fundamentalnej uzasadnij charakter otrzymany przebiegu elementów wektora stanu.**

3.5 Analiza rozwiązania równania stanu w dziedzinie czasu. Mody układu

Korzystając z procesora symbolicznego oraz wiedząc, że macierz stanu ma postać (wybieramy przykład zgodny z numerem zespołu)

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -2b & -a \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5a & -2 \\ 2 & b \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & b \\ 3 & 2a \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 3b \\ 2 & -a \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4b & 1 \\ -a & -3 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -0.5a \\ 1 & b \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2a \\ 3 & b \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & a \\ 3 & 2b \end{bmatrix}$

należy wyznaczyć wartości stałych a, b tak, by jej wartości własne s_1, s_2 miały wartość

- $s_1 = -2 - 0.2k, s_2 = -3 - 0.2k$
- $s_1 = -3 - 0.2k, s_2 = 1 + 0.2k$
- $s_1 = -2 - 0.2k + 2i, s_2 = -2 - 0.2k - 2i$

gdzie k to numer przypisany do osoby.
Następnie, na podstawie zależności (12), należy wyznaczyć odpowiedź swobodną i wymuszoną (dla skoku jednostkowego), przyjmując $\mathbf{x}(0) = [0.7, 0.7]^T, \mathbf{B} = [0, 1]^T$.

4 Wymagania dotyczące sprawozdania

Realizacja laboratorium jest dokumentowana sprawozdaniem, które powinno zawierać:

- wyprowadzenie teoretyczne
- rozwiązania analityczne (zad. 3.1) z komentarzami
- rozwiązania w procesorze symbolicznym (zad. 3.2-3.5) z komentarzami

Należy pamiętać o tytule sprawozdania i nagłówkach wyróżniających zadania. Prócz kodu programu w pliku Livescript należy umieścić część teoretyczną będącą opisem problemu. Komentarze do kodu powinny zawierać odniesienia do wzorów z części teoretycznej. Osie układu współrzędnych na wykresach mają być podpisane. Jeśli osie układu współrzędnych reprezentują wielkości fizyczne, należy podać jednostki.
Sprawozdanie będące plikiem LiveScript przekazujemy prowadzącemu zgodnie z ustalonymi zasadami.

Bibliografia

[1] Jacek Kabziński. *Teoria Sterowania.* 2021: Wydawnictwo Naukowe PWN.