Edward Preweda

Aproksymacja

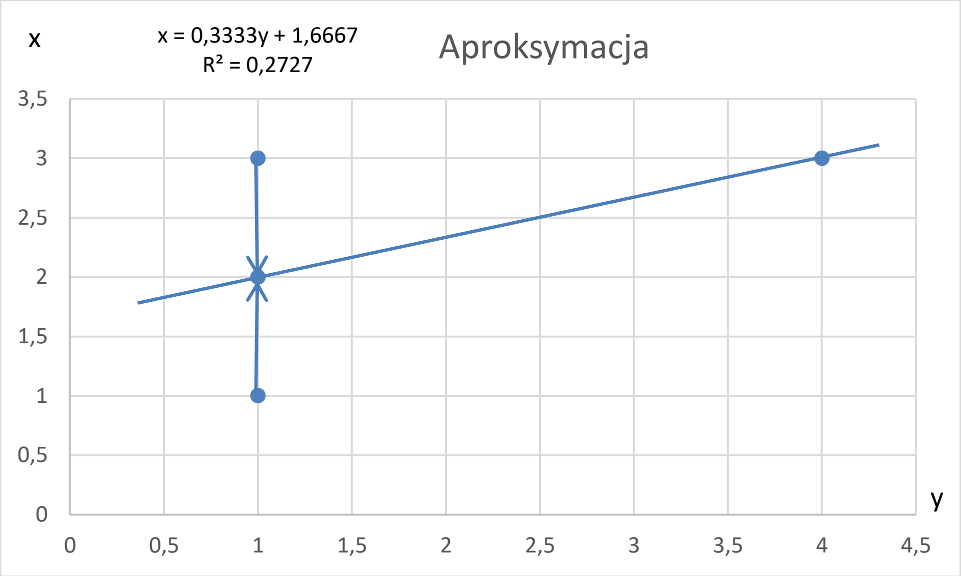
Wpasować prostą w podany zbiór punktów:

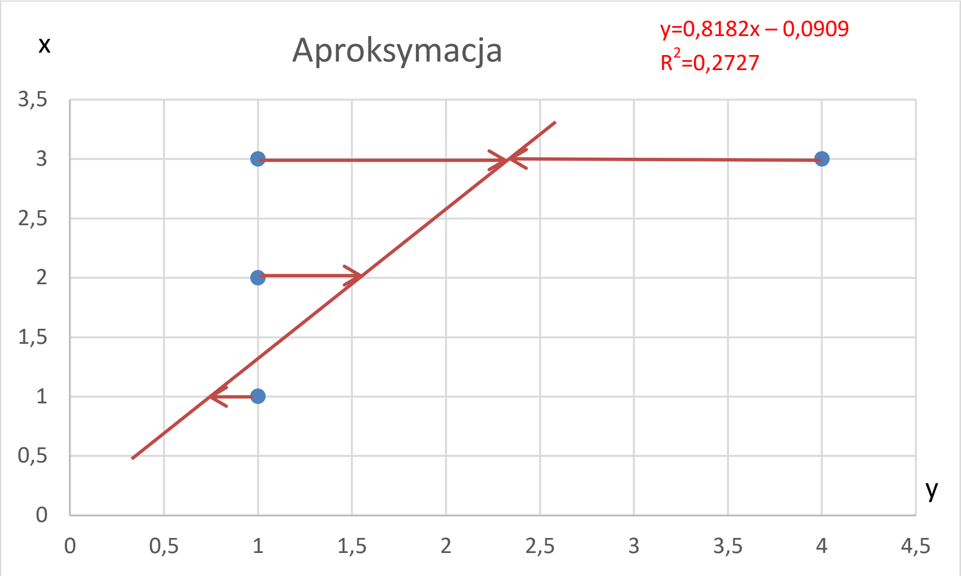
x	y
1	1
2	1
3	1
3	4

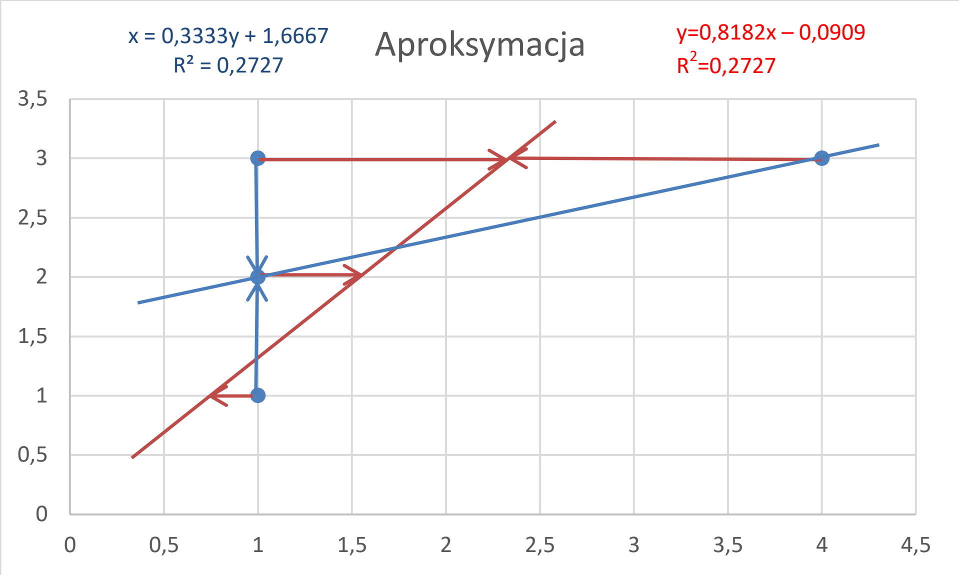
Wyznaczyć:

x=ay+b

y=ax+b







Wyciągnąć wnioski. Umieć wykonać zadanie: Wpasować prostą w podany zbiór punktów w taki sposób, suma kwadratów odchyłek rozumianych jako najkrótsza odległość punktu od aproksymowanej prostej była minimalna.

Wprowadzenie

Aproksymacja jest przybliżeniem funkcji $y = f(x)$ za pomocą funkcji „prostszej", należącej do określonej klasy funkcji $y = F(x)$.

W jakim celu stosuje się aproksymację?

- funkcja aproksymowana $y = f(x)$ wyrażona jest za pomocą zbyt skomplikowanej zależności analitycznej (co nie jest praktyczne),
- znany jest tylko skończony (dyskretny) zbiór wartości funkcji , pochodzący na przykład z pomiarów geodezyjnych.

Funkcji aproksymującej (przybliżającej) poszukuje się najczęściej w określonej rodzinie funkcji, na przykład wśród wielomianów, funkcji wykładniczych, itd..

Przybliżanie jednej funkcji przez inną zawsze powoduje pojawianie się błędów aproksymacji (przybliżenia). W zależności od sposobu mierzenia błędu aproksymacji rozróżnia się dwa rodzaje aproksymacji.

Aproksymacja jednostajna

Zakłada się, że funkcje $y = f(x)$ oraz $y = F(x)$ są określone i ciągłe w przedziale $[a;b]$. Błąd aproksymacji jest mierzony za pomocą normy Czebyszewa:

$$\|f - F\| = \sup_{a \le x \le b} \|f(x) - F(x)\|$$

Aproksymacja średniokwadratowa (ciągła lub dyskretna)

- **aproksymacja ciągła** - funkcja $y = f(x)$ jest określona i ciągła w przedziale $[a;b]$. Błąd aproksymacji wyraża się zależnością:

$$\|f - F\| = \int_a^b p(x)\left[f(x) - F(x)\right]^2 dx$$

gdzie $p(x)$ - nieujemna, rzeczywista funkcja wagowa.

aproksymacja dyskretna - funkcja jest funkcją dyskretną, to znaczy jej znane wartości można przedstawić za pomocą tabeli:

x_i	x_1	x_2	...	x_n
$y_i = f(x_i)$	y_1	y_2	...	y_n

Błąd aproksymacji wyraża się zależnością:

$$\|f - F\| = \sum_{i=1}^{n} p(x_i)[f(x_i) - F(x_i)]^2$$

Funkcję aproksymującą wybiera się najczęściej w postaci wielomianu uogólnionego

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_m\varphi_m(x)$$

w którym funkcje $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_m(x)$ są wybranymi a priori funkcjami bazowymi m+1 wymiarowej przestrzeni liniowej. W takim przypadku zadanie aproksymacji sprowadza się do określenia współczynników $a_0, a_1, \ldots, a_m$.

W charakterze funkcji bazowych wybiera się najczęściej jednomiany lub funkcje trygonometryczne.

- jednomiany: 1, x, $x^2, \ldots, x^m$ (baza jednomianów).

Zgodnie z *twierdzeniem Weierstrassa*, dla każdej funkcji $y = f(x)$ określonej i ciągłej na domkniętym i ograniczonym odcinku $[a\,;b]$ istnieje taki wielomian $W_m = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_mx^m$, który przybliża jednostajnie funkcję $y = f(x)$ na odcinku $[a\,;b]$.

- funkcje trygonometryczne: 1, $\cos(x), \sin(x)$, $\cos(2x), \sin(2x), \ldots, \cos(mx), \sin(mx)$ (baza trygonometryczna).

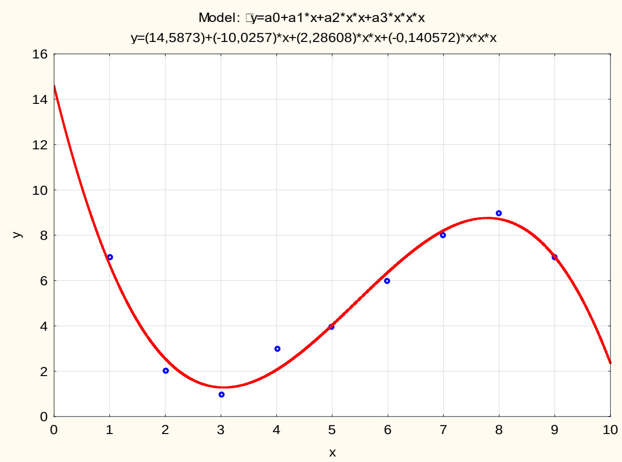
Zgodnie z *twierdzeniem Weierstrassa*, dla każdej funkcji $y = f(x)$ określonej i ciągłej na R oraz okresowej o okresie 2π istnieje taki wielomian trygonometryczny

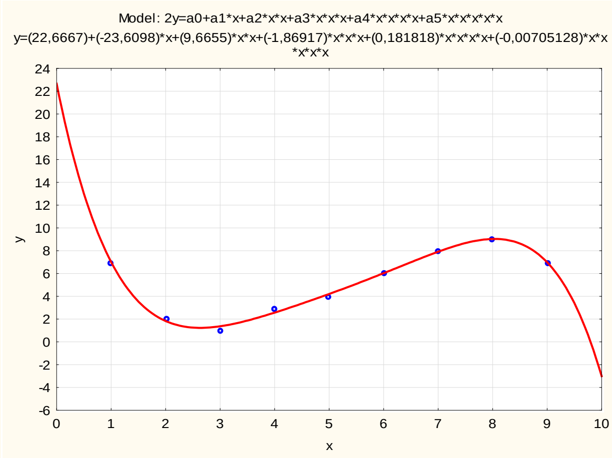
$S_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{m} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$, który przybliża jednostajnie funkcję $y = f(x)$.

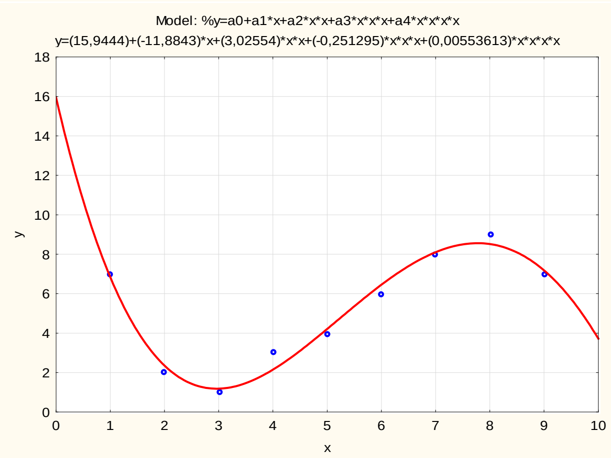
Aproksymacja średniokwadratowa dyskretna

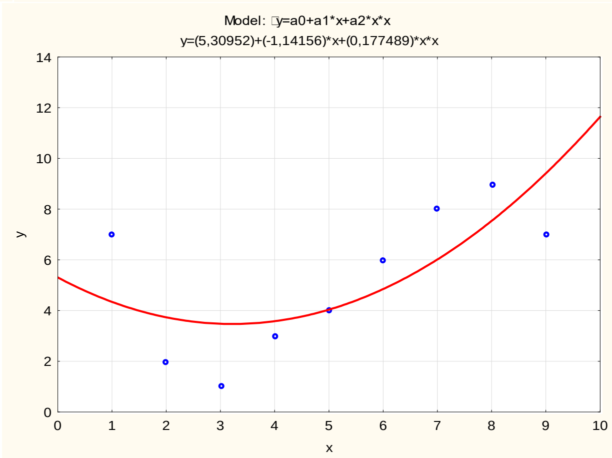
x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$y_i = f(x_i)$	7	2	1	3	4	6	8	9	7

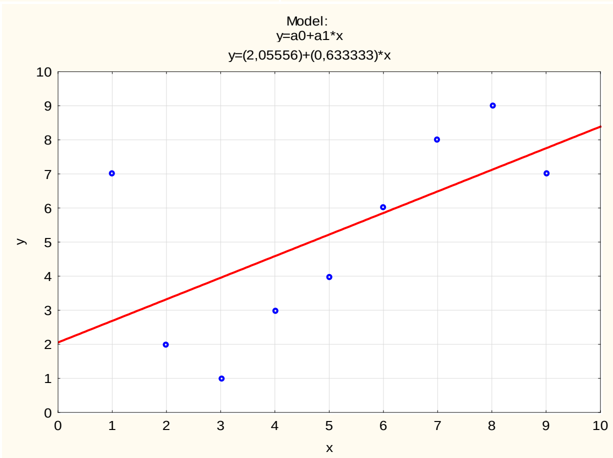
Narzędzie – Statistica

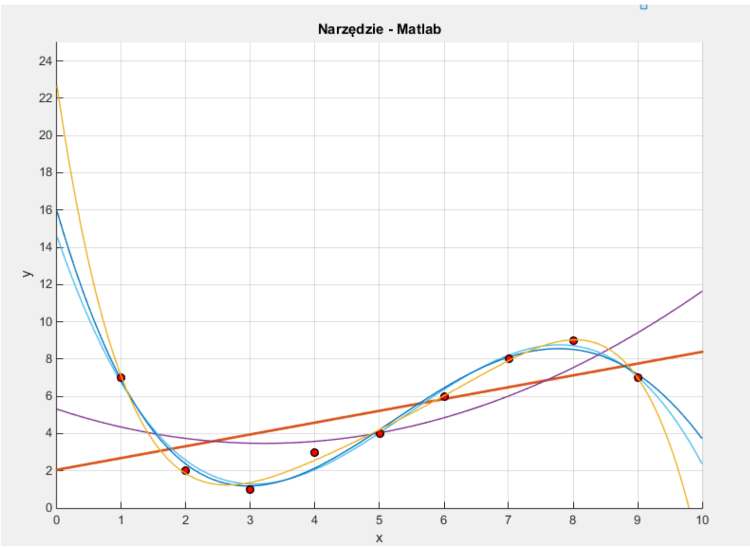











Narzędzie - Matlab
y
x
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10