

**Teoria Sterowania**  
*TEMAT 2*

*Modelowanie układów dynamicznych opisanych w przestrzeni stanów.*

*dr inż. Paweł Penar*

POLITECHNIKA RZESZOWSKA  
Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki  
Rzeszów 2024

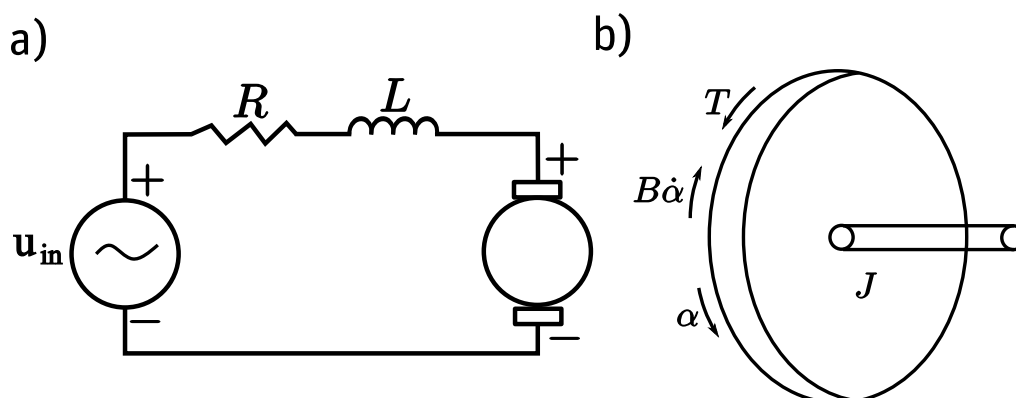
Liczba laboratoriów w temacie: 2

## 1 Cel laboratorium

Celem laboratorium jest zapoznanie się z modelowaniem liniowych układów dynamicznych opisanych w przestrzeni stanów w procesorze symbolicznym Matlab-a oraz Simulinku. [2]

## 2 Przykład

Schemat elektryczny silnika prądu stałego pokazano na rys. 1.



Rysunek 1: Schemat elektryczny silnika prądu stałego (a); schemat wirnika (b)

Z II prawa Kirchhoffa wynika, że [1, 4]:

$$u_{in}(t) = L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_m(t) \quad (1)$$

gdzie  $u_{in}(t)$  to napięcie na wirniku,  $u_m(t) = K_m \dot{\alpha}$  to siłą przeciwelektromotoryczna,  $L$  to indukcyjność wirnika,  $R$  to rezystancja wirnika,  $i(t)$  prąd na wirnika,  $K_m$  to stała siły przeciwelektromotorycznej a  $\alpha$  to kąt obrotu silnika.

Z II zasady dynamiki Newtona wynika

$$J\ddot{\alpha} = T(t) - B\dot{\alpha} \quad (2)$$

gdzie  $T = K_T i(t)$  to moment na wirniku,  $K_T$  to stała momentowa,  $B$  to współczynnik tarcia wiskotycznego a  $J$  to moment bezwładności wirnika.

Prędkość wału silnika  $\dot{\alpha}$  jest kontrolowana przez zmianę napięcia na wirniku, tj.  $u_{in}$ . Dlatego napięcie  $u_{in}$  będzie traktowane jako wielkość sterująca (sterowanie), natomiast wyjście będzie stanowić prędkość kątowna  $\dot{\alpha}$ .

Wybierając zmienne stanu  $x_1(t) = \dot{\alpha}$ ,  $x_2(t) = i(t)$  oraz korzystając z zależności (1) i (2) otrzymano równania opisujące dynamikę silnika prądu stałego, tj.

$$\dot{x}_1 = -\frac{B}{J}x_1 + \frac{K_T}{J}x_2 \quad (3)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{K_m}{L}x_1 - \frac{R}{L}x_2 + \frac{1}{L}u_{in} \quad (4)$$

oraz równanie wyjścia

$$y = x_1 \quad (5)$$

Równania (3)-(5) można zapisać w formie wektorowo-macierzowej postaci

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (6)$$

gdzie

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{B}{J} & \frac{K_T}{J} \\ -\frac{K_m}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}, \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Przyjmując wartości stałych dla przykładowego silnika DC, tj.  $J = 0.01 \left[ \frac{kgm^2}{s^2} \right]$ ,  $B = 0.08[-]$ ,  $K_T = 0.02 \left[ \frac{Nm}{A} \right]$ ,  $K_m = 0.1 \left[ \frac{Nm}{A} \right]$ ,  $R = 1[\Omega]$ ,  $L = 0.5[H]$  wyznaczono model konkretnego silnika. Jego postać to:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 20 \\ -0.02 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u_{in} \quad (8)$$

## Rozwiązanie w procesorze symbolicznym

Poniżej przytoczono kod wykorzystujący procesor symboliczny do wyznaczenia rozwiązania równania stanu będącego modelem silnika DC. Kod rozdzielono krótkimi komentarzami.

```
clear all;
```

Deklaracja macierzy  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$  oraz zmiennych symbolicznych

```
syms B_J K_T K_m L R u x_1(t) x_2(t) t
A=[-B/J,K_T/J;-K_m/L,-R/L]
Bvec=[0;1/L] C=[1 0]
```

Definicja modelu matematycznego

```
model = [diff(x_1(t),t);diff(x_2(t),t)]==A*[x_1(t);x_2(t)]+Bvec*u
```

Rozwiązanie układu równań różniczkowych z warunkami początkowymi

```
cond =[x_1(0)==0;x_2(0)==0]
sol = dsolve(model,cond)
```

Określenie wartości stałych

```
Jval=0.01; Bval = 0.08; KTval=0.2;
Kmval=0.1; Lval=0.5; Rval=1; uval=5;
```

Podstawienie

```
solVal=subs(sol,[B_J K_T K_m L R u],[Bval Jval KTval Kmval Lval Rval uval])
```

Przebieg zmiennych  $x_1, x_2$

```
fplot(solVal.x_1,[0,15]);
xlabel('t[s]');
ylabel('alphap[rad]');
fplot(solVal.x_2,[0,15]);
xlabel('t[s]'); ylabel('i[A]');
```

## Rozwiązanie z użyciem funkcji lsim

Poniżej przytoczono kod wykorzystujący funkcje *lsim* do wyznaczenia rozwiązania równania stanu będącego modelem silnika DC.

```
clear all;
```

Deklaracja stałych oraz macierzy  $A, B, C$  oraz  $D = 0$  (ze względu na składnię funkcji *lsim*)

```
Jval=0.01; Bval = 0.08;
KTval=0.2; Kmval=0.1;
Lval=0.5; Rval=1
uval=5;
A=[-Bval/Jval,KTval/Jval;-Kmval/Lval,-Rval/Lval];
Bvec=[0;1/Lval];
C=eye(2);
D=0;
```

Deklaracja wektora czasu oraz wektora, którego elementy odpowiadają wartością sterowania dla kolejnych kroków dyskretnych wektora czasu

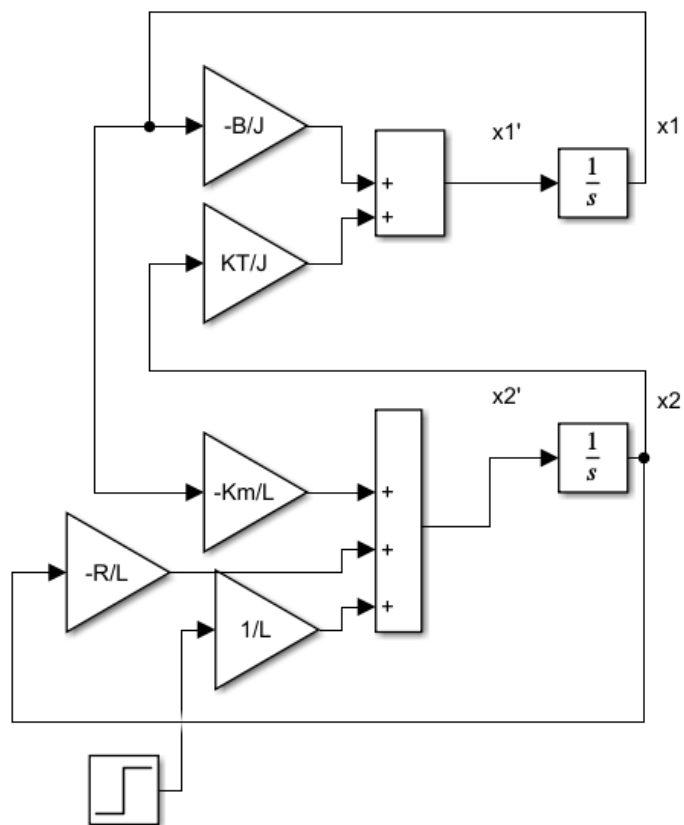
```
t=0:.01:15;
lenght_time = length(t);
```

Wykonanie funkcji *lsim* i wizualizacja wyników

```
ulsim = ones(1,lenght_time)*uval;
Y=lsim(A,Bvec,C,D,ulsim,t);
plot(t,Y(:,1)); xlabel('t[s]');
ylabel('alphap[rad/s]');
plot(t,Y(:,2)); xlabel('t[s]');
ylabel('i[A]');
```

## Rozwiązanie z użyciem Simulinka

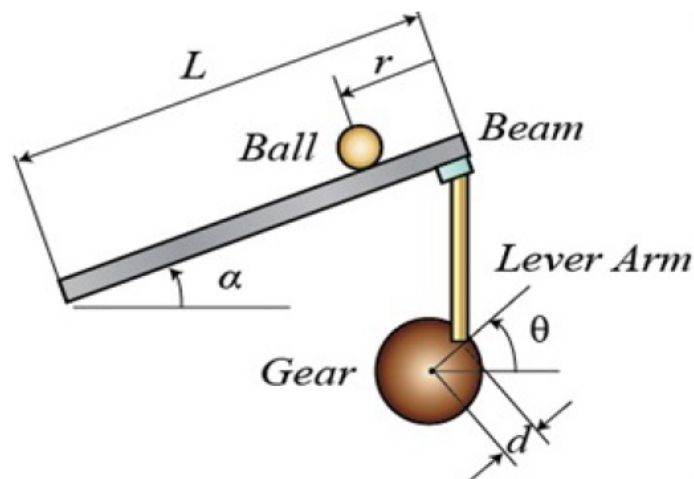
Na rys. 2 pokazano model Simulinka służący do wyznaczenia rozwiązania równania stanu będącego modelem silnika DC.



Rysunek 2: Schemat Simulinka realizujący rozwiązanie układu równań (8).

### 3 Zadania do wykonania

1. Używając procesora symbolicznego wykonać przykład opisany w punkcie 2 (bez Simulinka). Wyznaczyć przebiegi  $\dot{\alpha}(t)$  oraz  $i(t)$ .
2. Dany jest mechanizm *kulka belka*, który pokazano na rys. 3.



Rysunek 3: Układ kulka-belka [3]

Jak wynika z treści pracy [3], dynamikę układu *kulka belka* opisuje równanie różniczkowe drugiego rzędu postaci

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + m\right) \ddot{r} + mg \sin \alpha - mr \dot{\alpha}^2 = 0 \quad (9)$$

gdzie  $r$  to odległość zaznaczona na rys. 3,  $m$  to masa kulki,  $J_b$  to moment bezwładności belki,  $R$  to promień kulki,  $\alpha$  to kąt obrotu belki,  $g$  to przyspieszenie ziemskie. Uwzględniając fakt, że

$$\alpha L = d\theta \quad (10)$$

i przyjmując uproszczenia:  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\dot{\theta}^2 \approx 0$  otrzymano uproszczone równanie opisujące dynamikę układu *kulka belka*

$$\left(\frac{J_b}{R^2} + m\right) \ddot{r} = -mg \frac{d}{L} \theta \quad (11)$$

gdzie  $\theta$  to kąt obrotu pokazany na rys. 3.

Należy:

- przyjąć zmienne stanu  $x_1 = r$ ,  $x_2 = \dot{r}$  i zapisać model matematyczny układu w postaci (6), przyjmując, że sterowaniem jest kąt obrotu  $\theta$  a wyjściem układu jest pierwszy element wektora stanu.
- przyjąć wartości stałych w modelu (w porozumieniu z prowadzącym) i sensowne warunki początkowe według wskazówek prowadzącego. Swoj wybór należy uzasadnić.
- wykorzystując procesor symboliczny wyznaczyć rozwiązanie równania stanu układu,
- wykorzystując funkcje *lsim* wyznaczyć rozwiązanie równania stanu układu,
- wykorzystując Simulinka wyznaczyć rozwiązanie równania stanu układu (osobny plik).

## 4 Wymagania dotyczące sprawozdania

Realizacja laboratorium jest dokumentowana sprawozdaniem w formie pliku LiveScript i pliku Simulink, które powinno zawierać:

- rozwiązanie przykładu z punktu 2,
- wyprowadzenie modelu *kulka belka*,

- model matematyczny zapisany w formie wektorowo-macierzowej postaci (6),
- informacje o wybranych wartościach stałych modelu, jej uzasadnienie oraz wyjaśnienie wpływu wartości parametrów na odpowiedź układu,
- rozwiązanie w procesorze symbolicznym,
- rozwiązanie w Matlabie,
- rozwiązanie w Simulinku (osobny plik),

Należy pamiętać o tytule sprawozdania i nagłówkach wyróżniających zadania. Prócz kodu programu w pliku Livescript należy umieścić część teoretyczną będącą opisem problemu. Komentarze do kodu powinny zawierać odniesienia do wzorów z części teoretycznej. Osie układu współrzędnych na wykresach mają być podpisane. Jeśli osie układu współrzędnych reprezentują wielkości fizyczne, należy podać jednostki.

Sprawozdanie będące plikiem LiveScript przekazujemy prowadzącemu zgodnie z ustalonymi zasadami do 7 dni od daty realizacji ostatniego laboratorium z tematu.

## Bibliografia

- [1] Debabrata Pal and Aksum University, Ethiopia. “Modeling, Analysis and Design of a DC Motor Based on State Space Approach”. In: *International Journal of Engineering Research and V5.02* (Feb. 2016), IJERTV5IS020332. ISSN: 2278-0181. DOI: [10.17577/IJERTV5IS020332](https://doi.org/10.17577/IJERTV5IS020332). (Visited on 08/24/2022).
- [2] Jacek Kabziński. *Teoria Sterowania*. 2021: Wydawnictwo Naukowe PWN.
- [3] Vu Minh i in. “Performances of PID and Different Fuzzy Methods for Controlling a Ball on Beam”. W: *Open Engineering* 6 (maj 2016). DOI: [10.1515/eng-2016-0018](https://doi.org/10.1515/eng-2016-0018).
- [4] Mark W. Spong i M Vidyasagar. *Dynamika i Sterowanie Robotów*. Instytut Automatyki i Pomiarów PIAP Warszawa Przemysłowy, 1997.