- Równania obserwacyjne w sieci niwelacyjnej
- Algebra macierzy
- Pseudoodwrotność

ZMOOG

Edward Preweda

Plan wykładu

Sieć wysokościowa

- ❑ Przypomnienie zasad układania równań obserwacyjnych

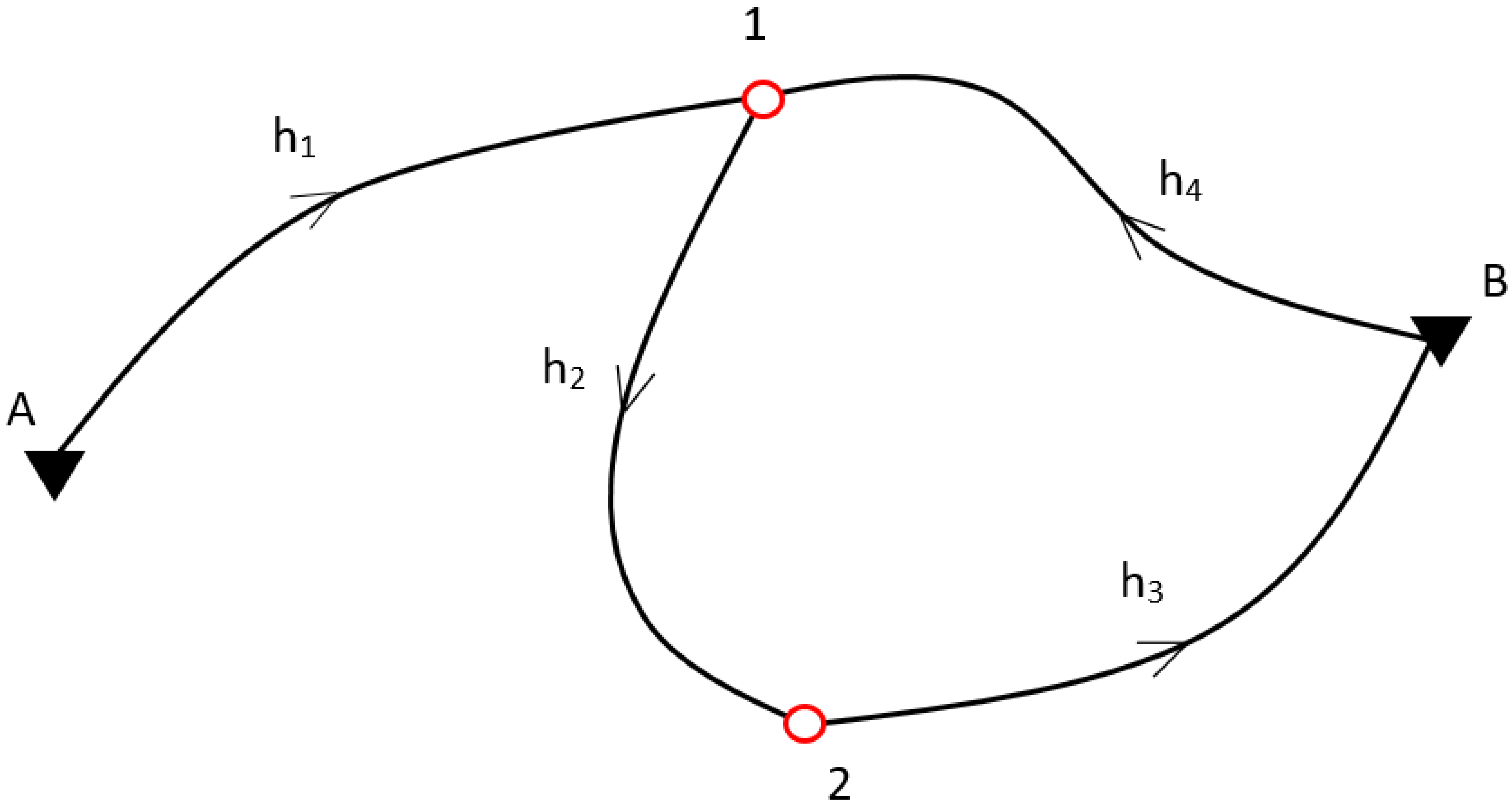
Wyznacznik macierzy

- ❑ Przypomnienie własności wyznacznika
- ❑ Obliczanie wyznacznika na podstawie rozkładu macierzy
- ❑ Obliczanie wyznacznika metodą Laplace'a

Pseudoodwrotność macierzy

- ❑ Definicja uogólnionej odwrotności macierzy
- ❑ Pseudoodwrotność Moore'a - Penrose'a
- ❑ Metody wyznaczania pseudoodwrotności
- ❑ Przykłady liczbowe

Sieć niwelacyjna - przypomnienie

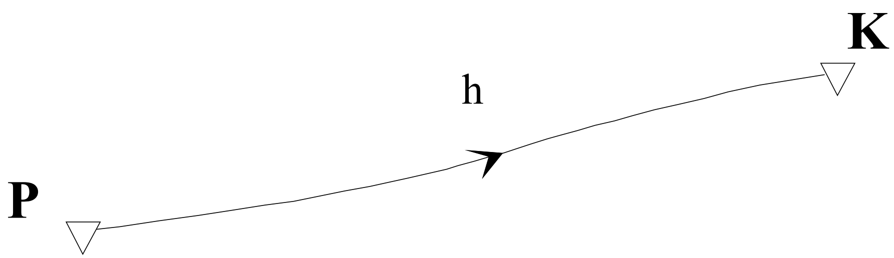


Czym różni się forma pierwotna od różniczkowej?

Równanie obserwacyjne –

wyrażenie obserwacji jako funkcji niewiadomych, przy czym dotyczy obserwacji i niewiadomych wyrównanych (uzgodnionych).

Dla przewyższenia (różnicy wysokości pomiędzy dwoma reperami) równanie obserwacyjne w formie pierwotnej ma postać:



$$\hat{Z}_K - \hat{Z}_P = \hat{h}$$

„Daszek” nad zmienną oznacza estymator

Jak obliczyć $\hat{h}$?

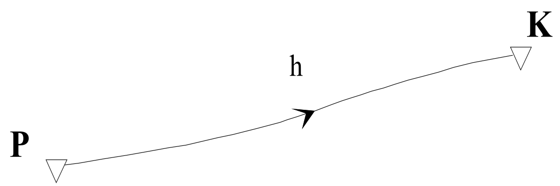
$$\hat{Z}_K - \hat{Z}_P = h^{pomierzone} + v_h$$

$$1 \times \left(\hat{Z}_K\right) - 1 \times \left(\hat{Z}_P\right) = h^{pomierzone} + v_h$$

Współczynniki przy niewiadomych tworzą macierz A układu równań, a wartości które potrafimy obliczyć – wyrazy wolne L układu równań, który w postaci macierzowej zapisać można jako

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{L} \quad \Leftarrow \quad \mathbf{P}$$

Postać różniczkowa równania obserwacyjnego



$$\hat{Z}_P = Z_P^o + dZ_P$$

$$\hat{Z}_K = Z_K^o + dZ_K$$

$$\hat{Z}_K - \hat{Z}_P = h^{pom} + v_h$$

$$\left(Z_K^o + dZ_K\right) - \left(Z_P^o + dZ_P\right) = h^{pom} + v_h$$

$$dZ_K - dZ_P = h^{pom} - \left(Z_K^o - Z_P^o\right) + v_h$$

$$dZ_K - dZ_P = \left(h^{pom} - h^o\right) + v_h$$

Wyznacznik macierzy

Niech **A** będzie macierzą kwadratową

- Jeżeli macierz **A** zawiera wiersz (kolumnę) składającą się z samych zer, to det(**A**) = 0;

- Jeżeli zamienimy miejscami dwa wiersze (kolumny) macierzy **A**, to wyznacznik zmieni znak na przeciwny;

- Jeżeli macierz **A** zawiera dwa jednakowe wiersze (kolumny), to det(**A**) = 0;

Wyznacznik macierzy

- Jeżeli wszystkie elementy pewnego wiersza (kolumny) macierzy A pomnożymy przez liczbę α, to wyznacznik otrzymanej macierzy będzie równy $\alpha \cdot \det(\mathbf{A})$;
- Transpozycja macierzy **A** nie zmienia jej wyznacznika, tj. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$;
- Jeżeli macierze **A** i **B** są tych samych stopni, to $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$.
- Wyznacznik macierzy **A** jest równy iloczynowi wartości własnych macierzy **A**;
- Wyznacznik macierzy trójkątnej równy jest iloczynowi wyrazów leżących na głównej przekątnej.

Wyznacznik macierzy

- Jeżeli do każdego z elementów pewnego wiersza (kolumny) macierzy **A** dodamy pomnożone przez tę samą liczbę odpowiednie elementy innego wiersza (kolumny) tej macierzy (tj. dodajemy elementy leżące w tych samych kolumnach (wierszach)), to wyznacznik macierzy **A** nie zmieni się.

Ogólnie, wyznacznik macierzy **A** nie zmieni się, jeżeli do pewnego wiersza (kolumny) tej macierzy dodamy kombinację liniową innych wierszy (kolumn) macierzy **A**;

Definicja uogólnionej odwrotności macierzy

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{w}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{w}$$

Co zrobić, jeśli $\det(\mathbf{A}) = 0$?

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-}\mathbf{w}$$

$$\mathbf{AA}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

Definicja pseudoodwrotności macierzy

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\mathbf{A} = \mathbf{A}$$

$$\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{+}$$

$$\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{+}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}\mathbf{A}^{+}$$

$$\left(\mathbf{A}^{+}\mathbf{A}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{A}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{-}\mathbf{w}$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^{+}\mathbf{w}$$

Własności

$$\text{dla} \quad \left.\begin{array}{c} n > u \\ r(\mathbf{A}) = u \end{array}\right\} \quad (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w})^T(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}) \to \text{minimum}$$

$$\text{dla} \quad \left.\begin{array}{c} n < u \\ r(\mathbf{A}) = n \end{array}\right\} \quad \hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{x}} \to \text{minimum}$$

$$\text{dla} \quad \left.\begin{array}{c} n > u \\ r(\mathbf{A}) < u \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} (\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w})^T(\mathbf{A}\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{w}) \\ \hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{x}} \end{array}\right\} \to \text{minimum}$$

$$\text{dla} \quad \left.\begin{array}{c} n < u \\ r(\mathbf{A}) < n \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{c} \hat{\mathbf{x}}^T\hat{\mathbf{x}} \\ \hat{\mathbf{k}}^T\hat{\mathbf{k}} \end{array}\right\} \to \text{minimum}$$

$$\text{gdzie} \quad \hat{\mathbf{k}} = (\mathbf{A}\mathbf{A}^T)^+ \mathbf{w}$$

Własności

Jeżeli macierz jest pełnego rzędu, wtedy zachodzą równości

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{-1} \quad , \qquad \text{gdy} \quad \mathrm{n} = \mathrm{u}$$

$$\mathbf{A}^{+} = \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\right)^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \quad , \qquad \text{gdy} \quad \mathrm{n} \geq \mathrm{u}$$

$$\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} \quad , \qquad \text{gdy} \quad \mathrm{n} \leq \mathrm{u}$$

Metody wyznaczenia pseudoodwrotności

Jeżeli macierz **A** jest rzędu r < min(n,u), wtedy pseudoodwrotność $\mathbf{A}^{+}$ można obliczyć na kilka sposobów.

Jeżeli znany jest rząd macierzy, często korzysta się z odwrotności normalnej, metody Helmerta-Wolfa, metody opartej na wektorach własnych macierzy.

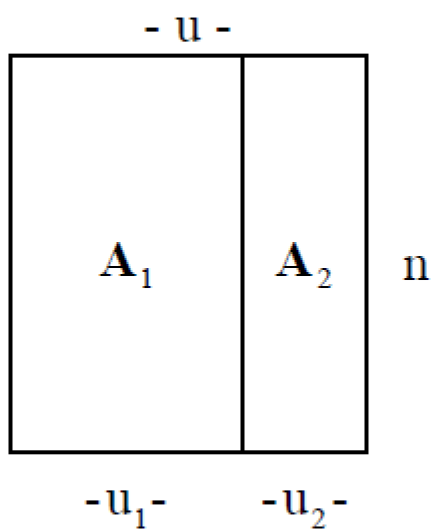
Istnieją też numeryczne metody wyznaczenia pseudoodwrotności macierzy, bazujące na przykład na rozkładzie QR, najczęściej na rozkładzie SVD.

Metody wyznaczenia pseudoodwrotności

Jeżeli $n \geq u$

a). Metoda Helmerta-Wolfa.

z macierzy $\mathbf{A}$ wybiera się dwie podmacierze $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ w taki sposób, że $\mathbf{r}(A_1) = \mathbf{r}(A)$, $u_1 = r(\mathbf{A})$, $u_2 = d(\mathbf{A})$, $n_1 = n_2 = n$.



Wprowadzając oznaczenia $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}_1^{T}\mathbf{A}_1$, $\mathbf{N}_2 = \mathbf{A}_1^{T}\mathbf{A}_2$

pseudoodwrotność wyraża się wzorem:

$$\mathbf{A}^{+} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 \\ \mathbf{N}_2^{T} \end{bmatrix} \left(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^{T}\right)^{-1} \mathbf{A}_1^{T} \qquad (20)$$

Metody wyznaczenia pseudoodwrotności

b). Metoda oparta na wektorach własnych.

$$\mathbf{A}^{+} = \left[\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \mathbf{A} + \mathbf{S}_{\mathrm{o}} \mathbf{S}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} - \mathbf{S}_{\mathrm{o}} \mathbf{S}_{\mathrm{o}}^{\mathrm{T}} \right] \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

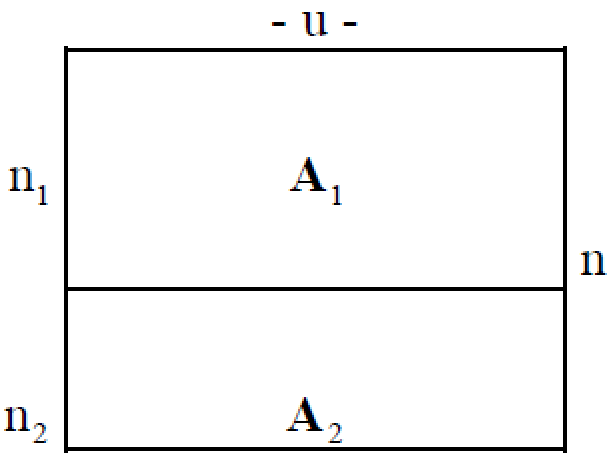
przy czym macierz $\mathbf{S}_{\mathrm{o}}$ jest podmacierzą unormowanej macierzy modalnej (własnej) - złożoną z wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}$ przynależnych różnym od zera wartościom własnym tej macierzy.

Metody wyznaczenia pseudoodwrotności

Jeżeli $m \leq n$

a). Metoda Helmerta-Wolfa.

Macierz $\mathbf{A}$ dzielimy na dwie podmacierze $\mathbf{A}_1$ i $\mathbf{A}_2$ w taki sposób, że $\mathbf{r}(A_1) = \mathbf{r}(A)$, $n_1 = r(\mathbf{A})$, $n_2 = d(\mathbf{A})$, $u_1 = u_2 = u$.



Oznaczając $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T$, $\mathbf{N}_2 = \mathbf{A}_1\mathbf{A}_2^T$

pseudoodwrotność określa wzór:

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}_1^T \left(\mathbf{N}_1\mathbf{N}_1 + \mathbf{N}_2\mathbf{N}_2^T\right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1 & \mathbf{N}_2 \end{bmatrix}$$

Metody wyznaczenia pseudoodwrotności

b). Metoda oparta na wektorach własnych.

$$\underline{\mathbf{A}^{+} = \mathbf{A}^{T}\left[\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{T} + \mathbf{S}_{o}\mathbf{S}_{o}^{T}\right)^{-1} - \mathbf{S}_{o}\mathbf{S}_{o}^{T}\right]} \qquad (23)$$

gdzie $\mathbf{S}_{o}$ jest podmacierzą unormowanej macierzy modalnej - złożoną z wektorów własnych

Metody wyznaczenia pseudoodwrotności

Przedstawiane metody obliczania psuedoodwrotności, oprócz tego, że wymagają znajomości rzędu macierzy **A**, nie uwzględniają problemów numerycznych związanych z ich realizacją.

Ze względów numerycznych efektywne wyznaczanie macierzy $\mathbf{A}^{+}$ i mnożenie przez nią wektora wyrazów wolnych dla oszacowania wektora niewiadomych nie jest zalecane.

Takie rozwiązanie cechuje się stosunkowo niską dokładnością obliczeń, wynikającą z błędów zaokrągleń. Estymowany wektor niewiadomych można obliczyć szybciej i przy mniejszym obciążeniu pamięci komputera, korzystając z odpowiedniego rozkładu macierzy **A** na czynniki.

Przykłady wyznaczenia pseudoodwrotności

Zadanie. Rozwiązać układ równań: $\underline{A}\underline{x} = \underline{L}$, stosując trzy metody wyznaczenia pseudoodwrotności macierzy. Macierz $\underline{A}$ jest macierzą prostokątną pionową.

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]; \underline{L} = \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ 8 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$r\{\underline{A}\} = 3, \quad d = 1$ - macierz nieregularna

Dlaczego kolumna 4 powoduje defekt?

Metoda odwrotności normalnej

Rozwiązanie : $\underline{\hat{x}} = \underline{A}^{+}\underline{L}$ ($\underline{A}^{+}$ - **pseudoodwrotność**)

Metoda 1 - z zastosowaniem odwrotności normalnej.

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{A}^{+} &= \underline{N}^{*}\underline{A}^{T} \\ \underline{N}^{*} &= \underline{N}\left(\underline{N}\,\underline{N}\right)_{o}^{-1} \\ \underline{N} &= \underline{A}^{T}\underline{A} \end{aligned}}$$

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad (\,r\{\underline{N}\} = 3 \qquad d = 1\,)$$

Metoda odwrotności normalnej

$$(\underline{NN})_o = \left[\begin{array}{ccc:c} 12 & -4 & -4 & \\ -4 & 6 & -4 & \\ -4 & -4 & 12 & \\ \hdashline & & & \end{array}\right] = 2 \times \left[\begin{array}{ccc:c} 6 & -2 & -2 & \\ -2 & 3 & -2 & \\ -2 & -2 & 6 & \\ \hdashline & & & \end{array}\right]$$

$$(\underline{NN})_o^{-1} = \frac{1}{2 \times 32}\left[\begin{array}{ccc:c} 14 & 16 & 10 & 0 \\ 16 & 32 & 16 & 0 \\ 10 & 16 & 14 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \frac{1}{32}\left[\begin{array}{ccc:c} 7 & 8 & 5 & 0 \\ 8 & 16 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 7 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Metoda odwrotności normalnej

$$
\left(\underline{NN}\right)_{\circ}^{-1} = \frac{1}{2 \times 32}\left[\begin{array}{ccc:c} 14 & 16 & 10 & 0 \\ 16 & 32 & 16 & 0 \\ 10 & 16 & 14 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \frac{1}{32}\left[\begin{array}{ccc:c} 7 & 8 & 5 & 0 \\ 8 & 16 & 8 & 0 \\ 5 & 8 & 7 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]
$$

$$
\underline{N}^{*} = \underline{N}\left(\underline{N}\,\underline{N}\right)_{\circ}^{-1} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ -12 & -16 & -12 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & -3 & 0 \end{bmatrix}
$$

Metoda odwrotności normalnej

$$\underline{A}^{+} = \underline{N}^{*}\underline{A}^{T} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Metoda Helmerta - Wolfa

$$\underline{A}^{+} = \begin{bmatrix} \underline{N}_1 \\ \underline{N}_2{}^T \end{bmatrix} \left(\underline{N}_1 \underline{N}_1 + \underline{N}_2 \underline{N}_2{}^T \right)^{-1} \underline{A}_1{}^T$$

przy czym $\underline{N}_1 = \underline{A}_1{}^T \underline{A}_1 \quad , \qquad \underline{N}_2 = \underline{A}_1{}^T \underline{A}_2$

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \underline{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Metoda Helmerta - Wolfa

$$\underline{\mathbf{N}}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \left[\begin{array}{ccc:c} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc:c} 3 & -1 & -1 & 1 \vee \\ -1 & 2 & -1 & 0 \vee \\ -1 & -1 & 3 & 1 \vee \end{array}\right]$$

$$\underline{\mathbf{N}}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Metoda Helmerta - Wolfa

$$\underline{N}_1\underline{N}_1 = \begin{bmatrix} 11 & -4 & -5 \\ -4 & 6 & -4 \\ -5 & -4 & 11 \end{bmatrix} ; \qquad \underline{N}_2\underline{N}_2{}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{N}_1\underline{N}_1 + \underline{N}_2\underline{N}_2{}^T\right) = \begin{bmatrix} 12 & -4 & -4 \\ -4 & 6 & -4 \\ -4 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{N}_1\underline{N}_1 + \underline{N}_2\underline{N}_2{}^T\right)^{-1} = \frac{1}{256}\begin{bmatrix} 56 & 64 & 40 \\ 64 & 128 & 64 \\ 40 & 64 & 56 \end{bmatrix} = \frac{1}{32}\begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 8 & 16 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

Metoda Helmerta - Wolfa

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{N}}_1 \\ \underline{\mathbf{N}}_2{}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{N}}_1 \\ \underline{\mathbf{N}}_2{}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \left(\underline{\mathbf{N}}_1 \underline{\mathbf{N}}_1 + \underline{\mathbf{N}}_2 \underline{\mathbf{N}}_2{}^{\mathrm{T}} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \times \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 7 & 8 & 5 \\ 8 & 16 & 8 \\ 5 & 8 & 7 \end{bmatrix} = \frac{1}{32} \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 4 & 16 & 4 \\ 0 & 0 & 8 \\ -12 & -16 & -12 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{+} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ -3 & -4 & -3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Metoda z zastosowaniem wektorów własnych

$$\underline{A}^{+} = \left(\underline{A}^{T}\underline{A}\right)^{+}\underline{A}^{T} = \underline{N}^{+}\underline{A}^{T}$$

$$\underline{N}^{+} = \left\{\underline{N} + \underline{S}_{o}\,\underline{S}_{o}^{\,T}\right\}^{-1} - \underline{S}_{o}\underline{S}_{o}^{\,T}$$

$\underline{S}_{o}$ - macierz modalna dla $\lambda = 0$ (macierz utworzona z wektorów własnych przyporządkowanych zerowym wartościom własnym macierzy $\underline{N}$)

$$\underline{N} = \underline{A}^{T}\underline{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Metoda z zastosowaniem wektorów własnych

Macierz charakterystycza $\Leftarrow \quad \left(\underline{\mathrm{N}} - \lambda \mathrm{E}\right)$

Równanie charakterystyczne $\Leftarrow \quad \det\left\{\underline{\mathrm{N}} - \lambda \mathrm{E}\right\} = 0 \quad \rightarrow$ wartości własne

Macierz spektralna $\underline{\mathrm{D}}_{\lambda} = \mathrm{diag}(0,2,4,4)$

$$\underline{\mathrm{S}}_{\mathrm{o}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Metoda z zastosowaniem wektorów własnych

$$\underline{S}_o \underline{S}_o{}^T = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix}$$

$$\underline{N} + \underline{S}_o \underline{S}_o{}^T = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.25 & -0.75 & -0.75 & -0.75 \\ -0.75 & 2.25 & -0.75 & 0.25 \\ -0.75 & -0.75 & 3.25 & -0.75 \\ -0.75 & 0.25 & -0.75 & 2.25 \end{bmatrix}$$

Metoda z zastosowaniem wektorów własnych

$$\left(\underline{N}+\underline{S}_o\underline{S}_o{}^T\right)^{-1}=\begin{bmatrix}0.4375 & 0.1875 & 0.1875 & 0.1875\\ 0.1875 & 0.5625 & 0.1875 & 0.0625\\ 0.1875 & 0.1875 & 0.4375 & 0.1875\\ 0.1875 & 0.0625 & 0.1875 & 0.5625\end{bmatrix}$$

$$\underline{N}^{+}=\begin{bmatrix}0.4375 & 0.1875 & 0.1875 & 0.1875\\ 0.1875 & 0.5625 & 0.1875 & 0.0625\\ 0.1875 & 0.1875 & 0.4375 & 0.1875\\ 0.1875 & 0.0625 & 0.1875 & 0.5625\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25\\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25\\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25\\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625\\ -0.0625 & 0.3125 & -0.0625 & -0.1875\\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625\\ -0.0625 & -0.1875 & -0.0625 & 0.3125\end{bmatrix}$$

Metoda z zastosowaniem wektorów własnych

$$\underline{N}^{+} = \begin{bmatrix} 0.4375 & 0.1875 & 0.1875 & 0.1875 \\ 0.1875 & 0.5625 & 0.1875 & 0.0625 \\ 0.1875 & 0.1875 & 0.4375 & 0.1875 \\ 0.1875 & 0.0625 & 0.1875 & 0.5625 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & 0.3125 & -0.0625 & -0.1875 \\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.1875 & -0.0625 & 0.3125 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}^{+} = \underline{N}^{+}\underline{A}^{T} = \begin{bmatrix} 0.1875 & -0.0625 & -0.0625 & -0.0625 \\ -0.0625 & 0.3125 & -0.0625 & -0.1875 \\ -0.0625 & -0.0625 & 0.1875 & -0.0625 \\ -0.0625 & -0.1875 & -0.0625 & 0.3125 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Metody wyznaczenia pseudoodwrotności

Zastosowane metody wyznaczenia pseudoodwrotności przyniosły identyczne wyniki, stąd:

$$\underline{\hat{x}} = \underline{A}^{+}\underline{L} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 16 \\ -8 \\ 8 \\ -16 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8.00 \\ 6.00 \\ -4.00 \\ 6.00 \end{bmatrix}$$

Dyskusja

Dziękuję za uwagę