

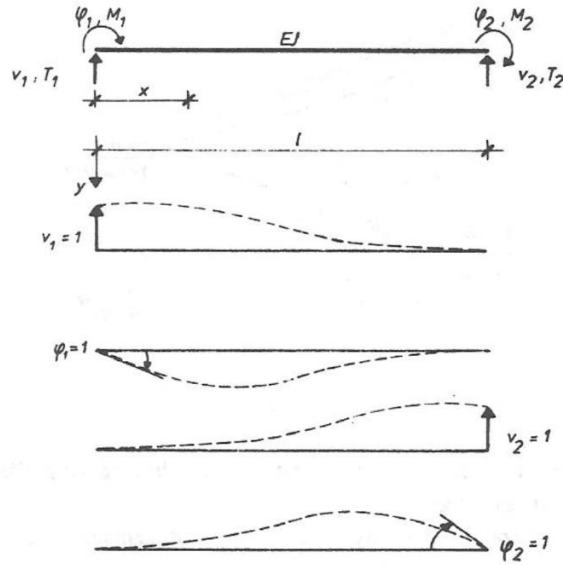
7.2. Analiza elementu

Jak już wspomniano, na etapie analizy elementu budujemy macierz sztywności tzn. ustalamy związki zachodzące pomiędzy przemieszczeniami węzłów elementu i odpowiadającymi tym przemieszczeniom siłami. Jest to etap najtrudniejszy a jednocześnie decydujący w sposób zasadniczy o wynikach. Z tego względu poświęcimy mu znaczną uwagę.

Rozpoczniemy od elementu w postaci pręta prostego, mimo że zagadnienie omówiono już częściowo w rozdziale 3. Przedstawiona metoda określania macierzy sztywności będzie miała bowiem zastosowanie także dla elementów innego rodzaju.

7.2.1. Pręt prosty

Rozważmy pręt pokazany na rys. 7.7.



Rys. 7.7

W węzłach elementu (por. rys. 7.7) występują siły i przemieszczenia, z których tworzymy wektory:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} T_1 \\ M_1 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Określamy linię ugięcia pręta w zależności od przemieszczeń węzłów. Jeżeli przyjąć $v_1 = 1$, a pozostałe przemieszczenia równe zero, wówczas, jak wiadomo np. z kursu wytrzymałości materiałów, linia ugięcia będzie opisana równaniem:

$$y_1 = -1 + 3 \frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3}. \quad (7.5)$$

Podobnie, przyjmując kolejno jednostkowe wartości przemieszczeń φ_1 , v_2 , φ_2 przy jednoczesnym każdorazowym założeniu, że pozostałe przemieszczenia są zerowe, otrzymujemy:

$$y_2 = x - 2 \frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2},$$

$$y_3 = -1 + 3 \frac{(1-x)^2}{l^2} - 2 \frac{(1-x)^3}{l^3}, \quad (7.6)$$

$$y_4 = -(1-x) + 2 \frac{(1-x)^2}{l} - \frac{(1-x)^3}{l^2}.$$

(Por. także rys. 7.7).

Z powyższych funkcji budujemy wektor:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}. \quad (7.7)$$

W rzeczywistości, w ogólnym przypadku, wszystkie przemieszczenia węzłów będą miały wartości różne od zera. Tak więc linia ugięcia pręta wyrazi się równaniem:

$$y = y^T v. \quad (7.8)$$

Należy podkreślić, że w rozpatrywanym przykładzie funkcje y_1, \dots, y_n , zwane *funkcjami kształtu*, są znane skądinąd. W ogólnym przypadku funkcje te należy zakładać, pamiętając o spełnieniu kryteriów omówionych w punkcie 7.1.

Wykorzystując znane równanie różniczkowe osi odkształconej możemy moment zginający przedstawić w postaci:

$$M_\alpha = -EJy''^T v. \quad (7.9)$$

Wyrażenie to wykorzystamy w równaniu prac, które przy potraktowaniu sił S jako obciążenia zewnętrznego wygląda następująco:

$$v^T S = \int_0^l v^T y''^T EJ y''^T v \, dx. \quad (7.10)$$

Prawa strona przedstawia pracę sił wewnętrznych, wyrażonych przez momenty zginające (7.9) na odpowiadających im przemieszczeniach, którymi są przyrosty kątów obrotu przekrojów.

Pamiętając, że $v = \text{const}$ możemy napisać:

$$v^T S = v^T \left(\int_0^l y''^T EJ y''^T \, dx \right) v. \quad (7.11)$$

Powyższa równość jest spełniona dla każdego v , czyli:

$$S = \left(\int_0^l y''^T EJ y''^T \, dx \right) v = kv. \quad (7.12)$$

Otrzymaliśmy zależność analogiczną do (7.2), przy czym $k = \int_0^1 y'' E J y''^T dx$ – jest macierzą sztywności elementu.

Przy $EJ = \text{const}$, i po dwukrotnym całkowaniu przez części otrzymujemy:

$$\int_0^1 y' y''^T dx = (y' y'^T - y y''^T) \Big|_0^1 + \int_0^1 y y^{IV T} dx. \quad (7.13)$$

Całka po prawej stronie równa jest zero, gdyż funkcje $y_1 \div y_n$ są wielomianami stopnia trzeciego.

Wartości wektora y i kolejnych jego pochodnych w węzłach równają się odpowiednio:

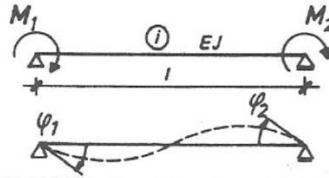
$$y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y'(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad y'(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y''(0) = \begin{bmatrix} \frac{6}{1^2} \\ -\frac{4}{1} \\ -\frac{6}{1^2} \\ -\frac{2}{1} \end{bmatrix} \quad y''(1) = \begin{bmatrix} -\frac{6}{1^2} \\ \frac{2}{1} \\ \frac{6}{1^2} \\ \frac{4}{1} \end{bmatrix} \quad y'''(0) = y'''(1) = \begin{bmatrix} -\frac{12}{1^3} \\ \frac{6}{1^2} \\ \frac{12}{1^3} \\ \frac{6}{1^2} \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

Uwzględniając powyższe i wykonując wskazane działanie po prawej stronie zależności (7.13) otrzymujemy poszukiwaną macierz sztywności elementu.

$$k = EJ \begin{bmatrix} \frac{12}{1^3} & -\frac{6}{1^2} & -\frac{12}{1^3} & -\frac{6}{1^3} \\ -\frac{6}{1^2} & \frac{4}{1} & \frac{6}{1^2} & \frac{2}{1} \\ -\frac{12}{1^3} & \frac{6}{1^2} & \frac{12}{1^3} & \frac{6}{1^2} \\ -\frac{6}{1^2} & \frac{2}{1} & \frac{6}{1^2} & \frac{4}{1} \end{bmatrix}. \quad (7.15)$$

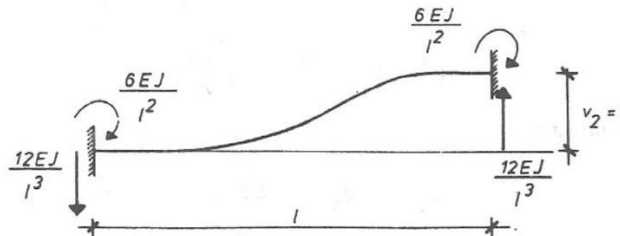
Warto zauważyć, że przy uwzględnieniu tylko M_1, M_2 oraz φ_1, φ_2 otrzymamy z (7.15) macierz sztywności elementu pokazanego na rys. 7.8 w postaci:



Rys. 7.8

$$k = EJ \begin{bmatrix} \frac{4}{l} & \frac{2}{l} \\ \frac{2}{l} & \frac{4}{l} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

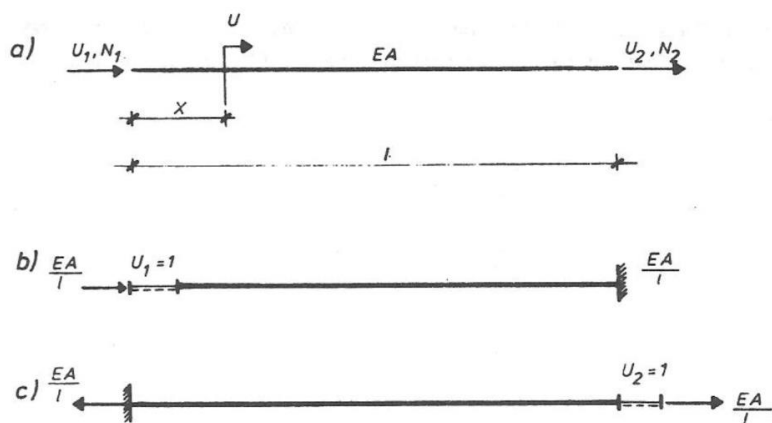
Jak wspomniano, przedstawiony wyżej sposób otrzymywania macierzy sztywności można stosować nie tylko w przypadku pręta. Natomiast macierz sztywności pręta można uzyskać także w inny sposób, wykorzystując znane równania różniczkowe opisujące odkształcenia tego elementu. Należy przy tym zauważyć, że poszczególne kolumny macierzy sztywności elementu przedstawiają wartości sił w węzłach spowodowane odpowiednim przemieszczeniem jednostkowym przy pozostałych przemieszczeniach równych zeru. Tak więc np. we wzorze (7.15) trzecia kolumna odpowiada stanowi pokazanemu na rys. 7.9. Wspomniany sposób omówimy na przykładzie pręta poddanego działaniu sił podłużnych (rys. 7.10a).



Rys. 7.9

Poszukiwana zależność będzie miała postać:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (7.17)$$



Rys. 7.10

Wychodzimy z równania różniczkowego:

$$\frac{du}{dx} = -\frac{N_1}{EA} \quad (7.18)$$

Po scałkowaniu mamy:

$$u = -\frac{N_1}{EA}x + C_1 \quad (7.19)$$

Uwzględniając warunki brzegowe: $x = 0, u = u_1, x = 1, u = 0$ (rys. 7.10b) otrzymujemy:

$$C_1 = u_1, \quad N_1 = \frac{EA}{l}u_1 \quad (7.20)$$

Z warunków równowagi:

$$N_1 = -N_2 = -\frac{EA}{l}u_1 \quad (7.21)$$

Przyjmując $u_1 = 1$ otrzymujemy:

$$k_{11} = \frac{EA}{l}, \quad k_{21} = -\frac{EA}{l} \quad (7.22)$$

Analogicznie przy uwzględnieniu: $x = 0, u = 0, x = 1, u = u_2$ (rys. 7.10c) i przyjęciu $u_2 = 1$ będziemy mieli:

$$k_{12} = -\frac{EA}{l}, \quad k_{22} = \frac{EA}{l}. \quad (7.23)$$

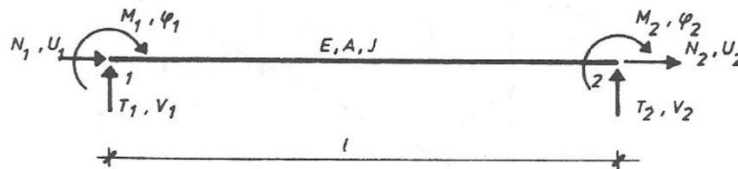
Ostatecznie zależność (7.17) wygląda następująco:

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}, \quad (7.24)$$

czyli:

$$k = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}. \quad (7.25)$$

Przy zachowaniu zasady superpozycji można połączyć (7.25) oraz (7.15) i otrzymać macierz sztywności pręta zginanego z uwzględnieniem sił podłużnych.



Rys. 7.11

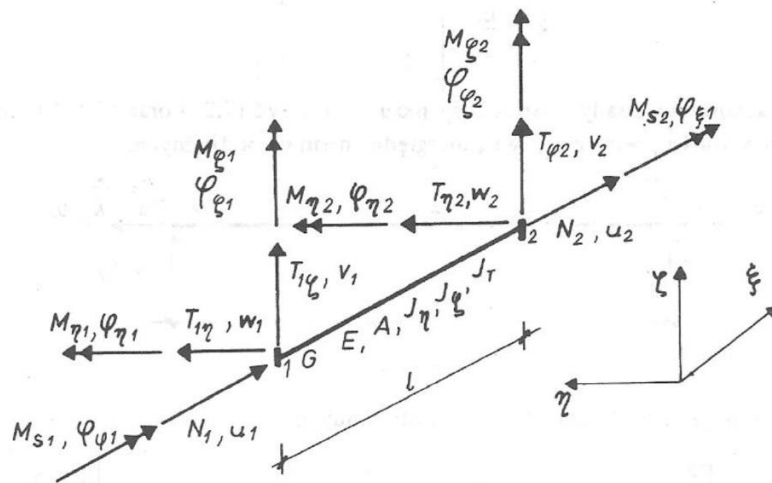
Uwzględniając oznaczenia na rys. 7.11 otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} N \\ T \\ M \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}_1 \\ \begin{bmatrix} u \\ v \\ \varphi \end{bmatrix}_2 \end{bmatrix}, \quad (7.26)$$

co można zapisać krótko w postaci:

$$\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \quad (7.27)$$

Taką samą postać będzie miała macierz sztywności pręta prostego obciążonego przestrzennie tzn. zginanego w płaszczyznach głównych, skręcanego i ściskanego lub rozciąganego, z tym że wektory sił i przemieszczeń są równe odpowiednio (por. rys. 7.12):



Rys. 7.12

$$S_i = \{ N \quad T_\eta \quad T_\xi \quad M_s \quad M_\eta \quad M_\xi \}_i \quad (7.28)$$

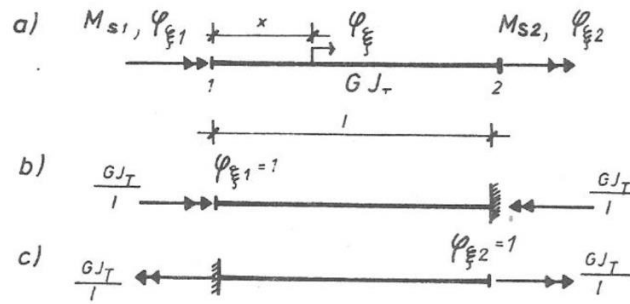
$$v_i = \{ u \quad w \quad v \quad \varphi_\xi \quad \varphi_\eta \quad \varphi_\xi \}_i$$

dla $i = 1, 2$.

Podmacierze k_{11} , k_{12} , k_{21} , k_{22} będą więc macierzami kwadratowymi o wymiarze 6×6 .

Dla zbudowania macierzy sztywności pręta pokazanego na rys. 7.12 brak jest elementów uwzględniających wpływ skręcania. Zginanie i działanie sił podłużnych uwzględnia macierz (7.26).

Brakujące elementy tworzące macierz analogiczną do (7.25) uzyskamy wychodząc z równania różniczkowego pręta skręcanego (por. rys. 7.13a)



Rys. 7.13

$$\frac{d\varphi_{\xi}}{dx} = -\frac{M_{s1}}{GJ_T}. \quad (7.29)$$

Po scałkowaniu mamy:

$$\varphi_{\xi} = -\frac{M_{s1}}{GJ_T}x + C_1. \quad (7.30)$$

Uwzględniając warunki brzegowe: $x = 0, \varphi_{\xi} = \varphi_{\xi 1}, x = 1, \varphi_{\xi} = 0$ (rys. 7.13b), otrzymujemy:

$$C_1 = \varphi_{\xi 1}, \quad M_{s1} = \frac{GJ_T}{l} \varphi_{\xi 1}. \quad (7.31)$$

Z warunków równowagi:

$$M_{s1} = -M_{s2} = -\frac{GJ_T}{l} \varphi_{\xi 1}. \quad (7.32)$$

Dla $\varphi_{\xi 1} = 1$ będzie:

$$k_{11} = \frac{GJ_T}{l}, \quad k_{21} = -\frac{GJ_T}{l}. \quad (7.33)$$

Analogicznie, po uwzględnieniu: $x = 0, \varphi_{\xi 1} = 0; x = 1, \varphi_{\xi} = \varphi_{\xi 2}$ i przyjęciu $\varphi_{\xi 2} = 1$ (rys. 7.13c) otrzymamy:

$$k_{12} = -\frac{GJ_T}{l}, \quad k_{22} = \frac{GJ_T}{l}. \quad (7.34)$$

Poszukiwana zależność będzie miała postać:

$$\begin{bmatrix} M_{s1} \\ M_{s2} \end{bmatrix} = \frac{GJ_T}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_{\xi 1} \\ \varphi_{\xi 2} \end{bmatrix}, \quad (7.35)$$

czyli

$$k = \frac{GJ_T}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (7.36)$$

Postępując się macierzami (7.26), (7.36) przy uwzględnieniu oznaczeń podanych na rys. 7.12, budujemy macierz sztywności pręta prostego obciążonego przestrzennie, odniesioną do układu (ξ, η, ζ) , którego oś ξ jest współliniowa z osią pręta; η, ζ są głównymi osiami bezwładności przekroju poprzecznego. Macierz tę zawiera wzór (7.37):

$$\begin{bmatrix} N \\ T_\eta \\ T_\zeta \\ M_s \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{bmatrix}_1 = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ_x}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_x}{l^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ_T}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{4EJ_x}{l} & 0 \\ 0 & \frac{6EJ_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EJ_x}{l} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ_x}{l^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EJ_x}{l^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EJ_y}{l^3} & 0 & 0 & -\frac{6EJ_y}{l^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ_T}{l} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EJ_x}{l^2} & 0 & \frac{2EJ_x}{l} & 0 \\ 0 & -\frac{6EJ_x}{l^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EJ_x}{l} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u \\ w \\ v \\ \varphi_\xi \\ \varphi_\eta \\ \varphi_\zeta \end{bmatrix}_1 \quad (7.37)$$