

LABORATORIUM METODY SZTUCZNEJ INTELIGENCJI

Laboratorium nr 6_7

Temat: **Aproksymacja funkcji z zastosowaniem jednowarstwowych sieci neuronowych z rozszerzeniami funkcyjnymi**

Celem laboratorium jest budowa sztucznych sieci neuronowych (SN) jednowarstwowych, liniowych ze względu na wagi oraz ich zastosowanie do aproksymacji funkcji nieliniowych jednej zmiennej. Zastosowane zostaną SN z lokalnymi funkcjami bazowymi (*funkcje Gaussa*) oraz nielokalnymi funkcjami bazowymi w warstwie ukrytej (*funkcje sigmoidalne bipolarne*).

1. Sieci neuronowe typu RVFL

Sieć neuronowa typu RVFL jest siecią z losowo wybranymi wagami warstwy wejściowej do sieci, z sigmoidalnymi funkcjami aktywacji neuronów. Jeżeli w miejsce wektora funkcji bazowych $S(\mathbf{x})$ wybierzemy

$$S(\mathbf{x}) = S(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_v), \quad (1)$$

to estymata funkcji $f(\mathbf{x})$ jest dana równaniem

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T S(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_v) \quad (2)$$

gdzie \mathbf{V} to macierz stałych wag warstwy wejściowej, $\mathbf{x}_v = [1, \mathbf{x}^T]^T$ to wektor zmiennych wejściowych do sieci RVFL.

Funkcje aktywacji neuronów dla sieci RVFL są wybierane jako funkcje sigmoidalne:

- unipolarne:

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{1 + \exp(-\beta \mathbf{V}^T \mathbf{x})}, \quad (3)$$

- bipolarne:

$$S(\mathbf{x}) = \frac{2}{1 + \exp(-\beta \mathbf{V}^T \mathbf{x})} - 1, \quad (4)$$

gdzie β jest współczynnikiem.

Metoda gradientowa adaptacji wag SN gwarantuje osiągnięcie jedynie minimum lokalnego. Problem ten można w pewnym stopniu rozwiązać poprzez zastosowanie metody uczenia z tzw. *momentum*.

W metodzie tej proces aktualizacji wag uwzględnia nie tylko informację o gradiencie funkcji, ale również aktualny trend zmian wag.

Proces adaptacji wag z zastosowaniem momentum można zapisać przy pomocy zależności

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \alpha e_k S(\mathbf{V}^T \mathbf{x}_k) + \gamma (\mathbf{W}_k - \mathbf{W}_{k-1}), \quad (5)$$

gdzie γ to tzw. *współczynnik momentum* o stałej wartości.

2. Sieci neuronowe z funkcjami Gaussa (RBF)

SN z lokalnymi funkcjami aktywacji neuronów typu *funkcje Gaussa* (ang. *Radial Basis Functions RBF NN*) można opisać równaniem

$$\hat{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}^T S(\mathbf{x}), \quad (6)$$

gdzie funkcję aktywacji i -tego neuronu SN typu Gaussa możemy zapisać za pomocą zależności

$$S_i(x) = \exp\left[-\left(\frac{x-b_i}{a_i}\right)^2\right], \quad (7)$$

gdzie a_i jest parametrem określającym szerokość krzywej gaussowskiej dla i -tego neuronu, natomiast b_i parametrem określającym położenie środka krzywej.

Wagi SN z radialnymi funkcjami aktywacji neuronów mogą być adaptowane przy pomocy metody gradientowej największego spadku

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \alpha e_k \mathbf{S}(\mathbf{x}_k), \quad (8)$$

lub metody największego spadku z zastosowaniem tzw. momentum

$$\mathbf{W}_{k+1} = \mathbf{W}_k - \alpha e_k \mathbf{S}(\mathbf{x}_k) + \gamma(\mathbf{W}_k - \mathbf{W}_{k-1}). \quad (9)$$

Stosując wiadomości podane na wykładzie należy zrealizować poniższe zadania.

3. Zadania do wykonania

1. Zbudować model SN liniowej ze względu na wagi, z zastosowaniem funkcji aktywacji neuronów w postaci:

- a) funkcji sigmoidalnych bipolarnych (sieć *RVFL NN*),
- b) funkcji Gaussa (sieć *RBF NN*),

w postaci m -pliku w pakiecie Matlab. Zadaniem sieci jest aproksymacja nieliniowej funkcji jednej zmiennej $f(x)$:

- a) $f(x) = 1 - e^{-x} - \sin(x)$,
- b) $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$,
- c) $f(x) = \sin(2x) + 0.5 \cos(0.5x)$,
- d) $f(x) = 5 - e^{-x} - x^2$,
- e) $f(x) = 0.1 \cdot (2x^2 - 5x) - 3e^{-(x-2)(x-2)}$,
- f) $f(x) = \sin(x) + \frac{1}{1 + e^{-3(x-3)}}$,
- g) $f(x) = 3 \cdot e^{-2x} + 0.7 \cdot x$,
- h) $f(x) = e^{-(x-2)(x-2)} \sin(3x) + 0.3x$,

dla $x \in \langle 0,5 \rangle$. Parametry SN dla poszczególnych zespołów przedstawiono w tab.1.

Tab.1. Parametry SN dla poszczególnych zespołów

nr zespołu	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
$m=l_{neur}$	6	7	5	8	9	10	12	6	8	7	9	11	5	4	8
α	0.2	0.3	0.55	0.35	0.15	0.45	0.25	0.5	0.4	0.3	0.1	0.45	0.31	0.33	0.44
γ	0.35	0.15	0.45	0.2	0.3	0.55	0.1	0.45	0.31	0.25	0.5	0.4	0.55	0.35	0.15

Przyjąć współczynnik pochylenia funkcji sigmoidalnych $\beta=1$.

Przyjąć zerowe warunki początkowe wag warstwy wyjściowej sieci $\mathbf{W}_0 = [0, 0, \dots, 0]^T$.

Przeprowadzić badania symulacyjne tak zbudowanych SN, dzieląc przedział wejściowy $x \in \langle 0, 5 \rangle$ na $N=500$ dyskretnych punktów.

Do oceny jakości aproksymacji nieliniowej funkcji $f(x)$ przyjąć następujące **wskaźniki jakości**:

- maksymalna wartość błędu aproksymacji funkcji zadanej e_{max} ,
- pierwiastek błędu średniokwadratowego aproksymacji

Należy przeprowadzić następujące badania:

I. Badania symulacyjne dla algorytmu SN RVFL zaprogramowanej w m-pliku Matlab:

- 1) symulację aproksymacji nieliniowej funkcji $f(x)$ przez SN dla danych podanych w tab.1., przyjąć wartość współczynnika **momentum** $\gamma=0$, [symulacja 1]
- 2) zbadać wpływ wartości wag początkowych warstwy wyjściowej \mathbf{W} z SN na jakość aproksymacji, w tym celu należy przyjąć wagi początkowe $\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_N$ z [symulacji 1], gdzie N to liczba kroków procesu iteracyjnego, [symulacja 2]
- 3) zbadać wpływ zmiany liczby neuronów SN na jakość aproksymacji nieliniowej funkcji $f(x)$ (dla pozostałych parametrów projektowych SN jak w punkcie 1), w tym celu należy zmienić liczbę neuronów SN dodając do sieci 3 neurony ($l_{neur1} = l_{neur} + 3$) oraz odejmując ze struktury sieci 3 neurony ($l_{neur2} = l_{neur} - 3$), [symulacja 3, symulacja 4]
- 4) zbadać wpływ zmiany wartości współczynnika pochylenia funkcji sigmoidalnych β na jakość aproksymacji (dla pozostałych parametrów projektowych SN jak w punkcie 1), w tym celu należy zmienić wartość współczynnika β do wartości $\beta_1 = \frac{\beta}{nr\ zespolu}$, oraz $\beta_2 = nr\ zespolu$, [symulacja 5, symulacja 6] (Uwaga! Zespół nr 1 przyjmuje odpowiednio $\beta=1$, $\beta_1=0.2$, $\beta_2=5$)
- 5) zbadać wpływ zmiany wartości współczynnika **momentum** γ na jakość aproksymacji (dla pozostałych parametrów projektowych SN jak w punkcie 1), w tym celu należy przeprowadzić symulację z wartością współczynnika **momentum** γ jak w tab.1. [symulacja 7], następnie zmienić wartość współczynnika γ do wartości $\gamma_1 = \frac{\gamma}{nr\ zespolu}$, [symulacja 8] (Uwaga! Zespół nr 1 przyjmuje odpowiednio $\gamma=0.35$, $\gamma_1=0.2$)

II. Należy przeprowadzić badania symulacyjne dla algorytmu SN z funkcjami aktywacji neuronów typu funkcje Gaussa zaprogramowanej w m-pliku Matlab:

- 6) symulację aproksymacji nieliniowej funkcji $f(x)$ przez SN dla danych podanych w tab.1., przyjąć wartość współczynnika **momentum** $\gamma=0$, [symulacja 9]
- 7) zbadać wpływ wartości wag początkowych warstwy wyjściowej \mathbf{W} z SN na jakość aproksymacji, w tym celu należy przyjąć wagi początkowe $\mathbf{W}_0 = \mathbf{W}_N$ z [symulacji 1], gdzie N to liczba kroków procesu iteracyjnego, [symulacja 10]
- 8) zbadać wpływ zmiany liczby neuronów SN na jakość aproksymacji nieliniowej funkcji $f(x)$ (dla pozostałych parametrów projektowych SN jak w punkcie 5), w tym celu należy zmienić liczbę neuronów SN dodając do sieci 4 neurony ($l_{neur1} = l_{neur} + 3$) oraz odejmując ze struktury sieci 3 neurony ($l_{neur2} = l_{neur} - 3$), [symulacja 11, symulacja 12]
- 9) zbadać wpływ zmiany wartości współczynnika szerokości funkcji Gaussa a na jakość aproksymacji (dla pozostałych parametrów projektowych SN jak w punkcie 5), w tym celu należy zmienić wartość współczynnika a do wartości $a_1 = 3a$, oraz $a_2 = 0.5a$, [symulacja 13, symulacja 14]
- 10) zbadać wpływ zmiany wartości współczynnika **momentum** γ na jakość aproksymacji (dla pozostałych parametrów projektowych SN jak w punkcie 5), w tym celu należy przeprowadzić

symulację z wartością współczynnika *momentum* γ jak w tab.1. [symulacja 15], następnie zmienić wartość współczynnika γ do wartości $\gamma_1 = \frac{\gamma}{nr\ zespolu}$, [symulacja 16]

III. Należy przeprowadzić następujące badania symulacyjne dla algorytmu SN RVFL zaprogramowanej w Simulinku:

11) symulację aproksymacji nieliniowej funkcji $f(x)$ przez SN dla danych podanych w tab.1., przyjąć wartość współczynnika *momentum* $\gamma=0$, [symulacja 17]

IV. Należy przeprowadzić następujące badania symulacyjne dla algorytmu SN z funkcjami aktywacji neuronów typu funkcje Gaussa zaprogramowanej w Simulinku:

12) symulację aproksymacji nieliniowej funkcji $f(x)$ przez SN dla danych podanych w tab.1., przyjąć wartość współczynnika *momentum* $\gamma=0$, [symulacja 18]

Sprawozdanie powinno zawierać:

1. Wstęp teoretyczny

- podstawowe wiadomości na temat zastosowanych SN liniowych ze względu na wagi,
- podstawowe wiadomości na temat zastosowanej metody uczenia SN.

2. Przebieg ćwiczenia

- przykładowy listing kodu Matlab-a służący do wygenerowania SN RVFL z procedurą uczenia, zastosowany do aproksymacji nieliniowej funkcji,
- przykładowy listing kodu Matlab-a służący do wygenerowania SN z funkcjami RBF, z procedurą uczenia, zastosowany do aproksymacji nieliniowej funkcji,
- graficzne przedstawienie realizacji SN RVFL w postaci schematów modelu Simulinka,
- graficzne przedstawienie realizacji SN z funkcjami RBF w postaci schematów modelu Simulinka

3. Wyniki symulacji

3.1. Wyniki dla SN RVFL:

- wykres (dla symulacji 1,2,3,4):
 - a) funkcji zadanej $f(x)$ oraz wyjścia z SN,
 - b) przebiegu błędu e ,
 - c) przebiegi wartości wag warstwy wyjściowej W SN w procesie uczenia,
 - c) w przypadku badania wpływu zmiany wartości współczynnika pochylenia funkcji sigmoidalnej β oraz liczby neuronów SN RVFL na jakość aproksymacji - wykres funkcji aktywacji neuronów sieci RVFL, [symulacja 1,2,3,4]
- dla wszystkich przeprowadzonych symulacji należy obliczyć wartości wskaźników jakości e_{max} , ε , wartości wskaźników jakości dla SN RVFL należy przedstawić w formie tab. 2. (dane dla zespołu nr 1).

Tab. 2. Wyniki przeprowadzonych symulacji dla SN RVFL (zespół nr 1) (symulacje 2 oraz 10 dla niezerowych wartości wag W)

nr symulacji	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	17.
$m=l_{neur}$	6	6	9	3	6	6	6	6	6
β	1	1	1	1	0.2	5	1	1	1
α	---	---	---	---	---	---	---	---	---
γ	0	0	0	0	0	0	0.35	0.2	0
e_{max}									
ε									

3.2. Wyniki dla *RBF* SN

- wykresy (dla **symulacji 9,10,11,12**):
 - a) funkcji zadanej $f(x)$ oraz wyjścia z SN,
 - b) przebiegu błędu e ,
 - c) przebiegi wartości wag warstwy wyjściowej W SN w procesie uczenia,
 - d) w przypadku badania wpływu zmiany wartości współczynnika szerokości funkcji Gaussa oraz liczby neuronów SN *RBF* na jakość aproksymacji - wykres funkcji aktywacji neuronów sieci *RBF*, [**symulacja 9,10,11,12**]
- dla wszystkich przeprowadzonych symulacji należy obliczyć wartości wskaźników jakości e_{max} ε , wartości wskaźników jakości należy przedstawić w formie tab.2. (dane dla zespołu nr 1).

Tab. 3. Wyniki przeprowadzonych symulacji (zespół nr 1) (symulacje 2 oraz 10 dla niezerowych wartości wag W)

nr symulacji	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.	16.	18.
$m=l_{neur}$	6	6	9	3	6	6	6	6	6
β	---	---	---	---	---	---	---	---	---
α	a	a	a	a	3a	0.5a	a	a	a
γ	0	0	0	0	0	0	0.35	0.2	0
e_{max}									
ε									

3.3. Wnioski.