Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki
Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa, Politechnika Rzeszowska

LABORATORIUM
METODY SZTUCZNEJ INTELIGENCJI

Laboratorium nr 1_2

Temat: **Funkcje aktywacji neuronów, analiza sieci jednowarstwowej i dwuwarstwowej**

Funkcje aktywacji neuronów, struktury sieci neuronowych

1. Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zapoznanie się z podstawowymi funkcjami aktywacji neuronów oraz budową struktur sztucznych sieci neuronowych (SN). Przedstawione zostaną funkcje aktywacji neuronów; skokowe np. funkcja ***sgn***, oraz ciągłe funkcje aktywacji np. funkcja ***liniowa***, funkcja ***sigmoidalna unipolarna*** i ***bipolarna***, funkcja ***Gaussa***. Z podanych funkcji aktywacji zostaną zbudowane przykładowe SN jedno- oraz dwuwarstwowe.

2. Funkcje aktywacji neuronów

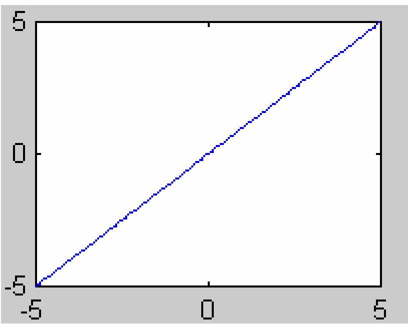
W ogólnym przypadku funkcje aktywacji neuronów SN można podzielić na:
a) liniowe,
b) nieliniowe:
- dyskretne:
  - unipolarne, $y \in \{0, 1\}$, np. funkcja ***skokowa***,
  - bipolarne, $y \in \{-1, 1\}$, np. funkcja ***sgn***,
- ciągłe:
  - unipolarne, $y \in (0, 1)$, np. funkcja ***sigmoidalna unipolarna***,
  - bipolarne, $y \in (-1, 1)$,np. funkcja ***sigmoidalna bipolarna***, ***tangens hiperboliczny***,
  - radialne, np. funkcja ***Gaussa***, funkcje ***bicentralne.***

Innym podziałem, jaki można zastosować do funkcji aktywacji neuronów SN jest podział na:
a) lokalne funkcje aktywacji, np. funkcja Gaussa, funkcje bicentralne,
b) nielokalne funkcje aktywacji, np. funkcje sigmoidalne.

Przykłady funkcji aktywacji neuronów SN:
- ***Liniowe*** funkcje aktywacji neuronów,
W ogólnym przypadku liniowe funkcje aktywacji neuronów można opisać zależnością

$$y = f(x) = x \qquad (1)$$

Przykłady generowania liniowej funkcji aktywacji w Matlab-ie ($y = x$).



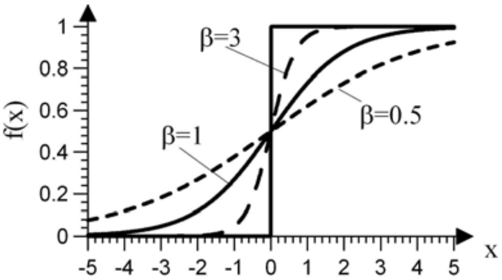

```
x=[-5:0.1:5];% dla k=1
y=x;
plot(x,y)
title('Linear Activation Function')
xlabel('x')
ylabel('Linear(x)')
```

Rys. 1. Przykład generowania funkcji liniowej w Matlab-ie

- ***Nieliniowe*** funkcje aktywacji neuronów:

a) unipolarne

Przykłady unipolarnych funkcji aktywacji pokazano na rys. 2.



Rys. 2. Unipolarne funkcje aktywacji

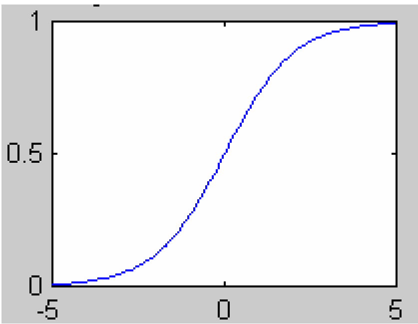
- dyskretna - ***skok jednostkowy***:

$$f(x)=\begin{cases}1 \; gdy \; x>0\\ 0 \; gdy \; x<0\end{cases}, \tag{2}$$

- ciągła - ***funkcja sigmoidalna unipolarna***:

$$f(x)=\frac{1}{1+e^{-\beta x}}, \; \beta>0, \tag{3}$$

Przykładową procedurę generującą w Matlab-ie funkcję sigmoidalną unipolarną dla współczynnika $\beta=1$, przedstawiono na rys. 3.

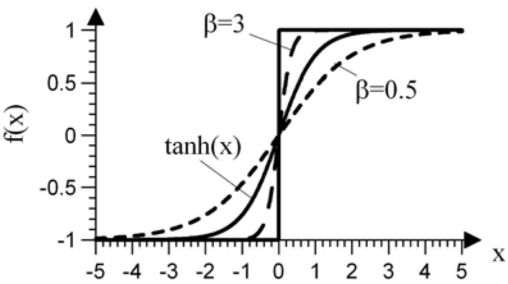


```
x=[-5:0.1:5];
y=1./(1+exp(-x));
plot(x,y)
title('Logistic Activation Function')
xlabel('x');ylabel('logistic(x)')
```

Rys. 3. Przykład generowania funkcji sigmoidalnej w Matlab-ie

b) bipolarne

Przykłady bipolarnych funkcji aktywacji pokazano na rys. 4.

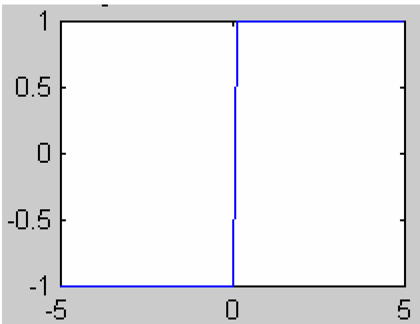


Rys. 4. Bipolarne funkcje aktywacji

- dyskretna - funkcja ***sgn***:

$$f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1 \; gdy \; x\geq 0\\ -1 \; gdy \; x<0\end{cases} \tag{4}$$

Przykładową procedurę generującą w Matlab-ie funkcję sgn przedstawiono na rys. 5.




```
x=[-5:0.1:5];
y=sign(x-eps);
plot(x,y)
title('Signum Activation Function')
xlabel('x')
ylabel('signum(x)')
```

Rys. 5. Przykład generowania funkcji sgn w Matlab-ie

- ciągła

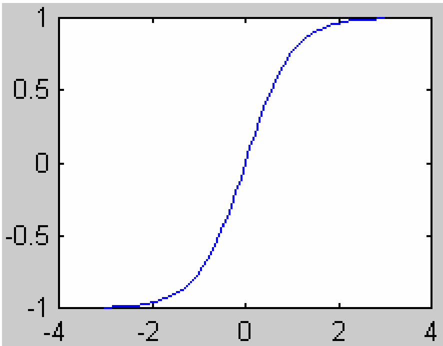
- funkcja ***sigmoidlana bipolarna***:

$$f(x)=\frac{2}{1+e^{-\beta x}}-1,\ \beta>0 \tag{5}$$

- funkcja ***tangens hiperboliczny:***

$$f(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}} \tag{6}$$

Przykładową procedurę generującą w Matlab-ie funkcję tangens hiperboliczny przedstawiono na rys. 6.




```
x=[-3:0.1:3];
y=tanh(x);
plot(x,y)
title('Hyperbolic Tangent Activ. Fun.')
xlabel('x')
ylabel('tanh(x)')
```

Rys. 6. Przykład generowania funkcji tangens hiperboliczny w Matlab-ie

c) radialne

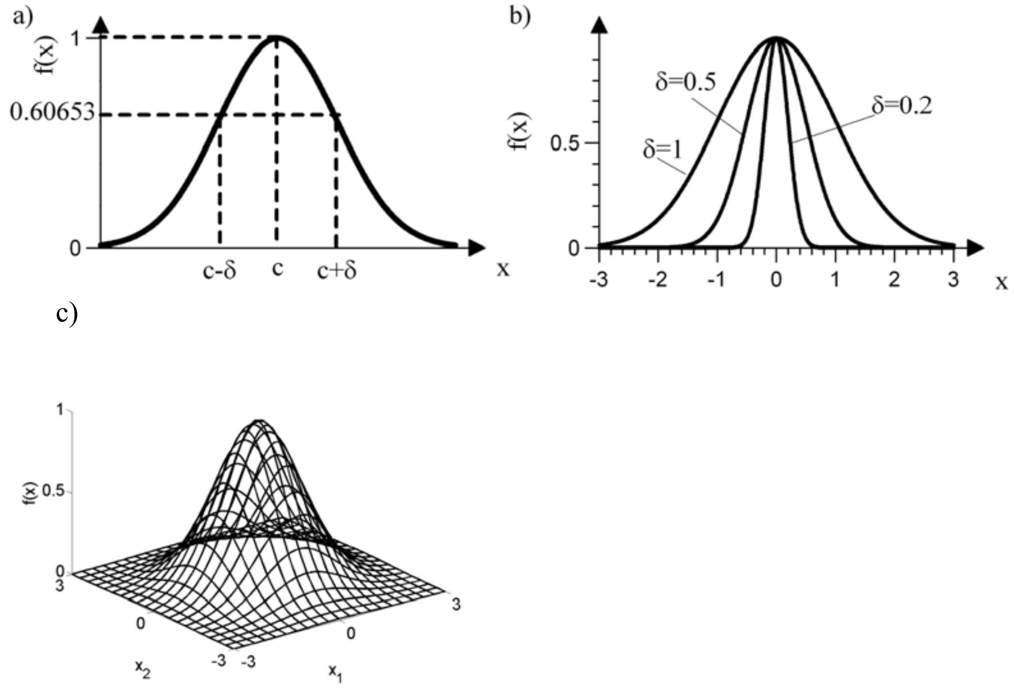
Specjalną odmianę sieci stanowią sieci o radialnej funkcji aktywacji neuronów, w której neuron ukryty realizuje funkcję zmieniającą się radialnie wokół wybranego centrum ***b***. Funkcje takie, oznaczane ogólnie w postaci $\varphi(\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b}\|)$, są nazywane radialnymi funkcjami aktywacji neuronów. Szczególnym przypadkiem funkcji radialnej jest symetryczna funkcja Gaussa (pokazana na rys. 7.), wyrażona wzorem:

$$f(x)=\exp\left(-\sum_{i=1}^{p}(x_i-b_i)^2/2\delta_i^2\right), \tag{7}$$

gdzie: $\boldsymbol{x}=[x_1, ..., x_p]^T$ - wektor wejściowy,

$\boldsymbol{b}=[b_1, ..., b_p]^T$ - wektor współrzędnych położenia centrum,

$\boldsymbol{\delta}=[\delta_1, ..., \delta_p]^T$ - wektor wariancji (odchyleń) wzdłuż poszczególnych osi zmiennych x_i.



Rys. 7. Funkcje Gaussa: a) parametry funkcji Gaussa, b) funkcje Gaussa dla wybranych wartości współczynnika δ, c) dwuwymiarowa funkcja Gaussa

3. Struktury sieci neuronowych

Istnieją różne kryteria podziału sieci neuronowych, jednym z najczęściej stosowanych jest kryterium dotyczące ilości warstw adaptowanych wag sieci, względem którego można wyróżnić sieci:
- jednowarstwowe, z uczoną warstwą wag wejściowych do sieci, lub wyjściowych z sieci, np. sieci *RVFL*, *RBF*,
- sieci dwuwarstwowe,
- sieci wielowarstwowe.

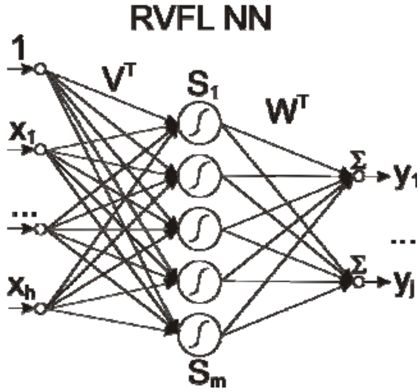
3.1. Sieci jednowarstwowe na przykładzie sieci *RVFL*

Sieć neuronowa typu *RVFL* jest siecią z losowym doborem wag warstwy wejściowej do sieci, z sigmoidalnymi funkcjami aktywacji neuronów. Wartość wyjścia z SN można opisać zależnością

$$y = \hat{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{W}^T \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{V}^T \boldsymbol{x}_V\right) \tag{8}$$

gdzie $y = \hat{f}(\boldsymbol{x})$ wartość wyjścia z SN (estymata funkcji ***f(x)***), $\boldsymbol{V}$ to macierz stałych wag warstwy wejściowej, $\boldsymbol{x}_V = \left[1, \boldsymbol{x}^T\right]^T$ to wektor zmiennych wejściowych do sieci *RVFL*, $\boldsymbol{W}$ to wektor wag warstwy wyjściowej (w przypadku SN o wielu wyjściach $\boldsymbol{W}$ jest macierzą).

Taka sieć jest liniowa ze względu na wagi i jest uniwersalnym aproksymatorem. W sieciach jednowarstwowych uczeniu podlegają jedynie wagi warstwy wyjściowej $\boldsymbol{W}$. Schemat sieci neuronowej *MIMO* (ang. *Multi Input Multi Output*) *RVFL* o *h* wejściach, *j* wyjściach, oraz *m* neuronach w warstwie ukrytej przedstawiono na rys. 8.



Rys. 8. Schemat SN typu *RVFL*

Funkcje aktywacji neuronów dla sieci *RVFL* są wybierane jako funkcje sigmoidalne:

- unipolarne:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_V) = \frac{1}{1 + exp\left(-\beta \boldsymbol{V}^T \boldsymbol{x}_V\right)}, \tag{9}$$

- bipolarne:

$$\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_V) = \frac{2}{1 + exp\left(-\beta \boldsymbol{V}^T x_V\right)} - 1, \tag{10}$$

gdzie β jest współczynnikiem, który determinuje nachylenie funkcji sigmoidlanej w punkcie przegięcia. Ze wzrostem tego współczynnika nachylenie funkcji zwiększa się i przy β =10 funkcja sigmoidalne unipolarna ma charakter prawie skokowy.

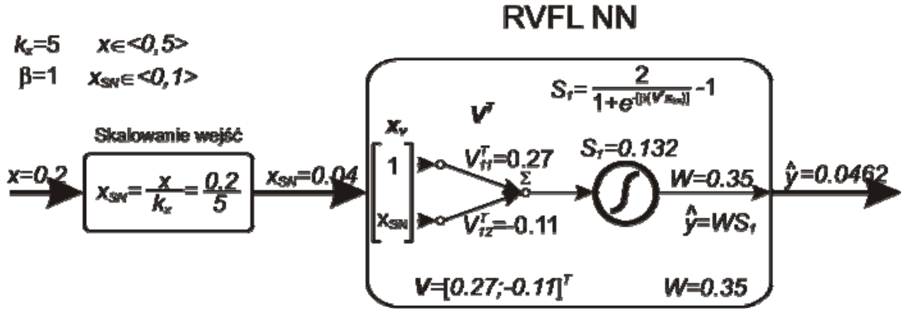
W celu uniknięcia pracy sieci w obszarze nasycenia funkcji sigmoidalanych zaleca się losowanie wag macierzy $\boldsymbol{V}$ z przedziału $V_{hm} \in \langle -0.5;0.5 \rangle$.

Założenie ciągłej funkcji aktywacji umożliwia zastosowanie w uczeniu metody gradientowej. Zwykle przyjmuje się metodę największego spadku, zgodnie z którą aktualizacja wag odbywa się w kierunku ujemnego gradientu funkcji energetycznej.

Przykład 1. Obliczanie wartości wyjścia z SN *RVFL*

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem wartości wyjścia $\hat{y}$ z SN *RVFL* opisanej zależnością (8), dla SN zbudowanej z m=1 neuronu o sigmoidalnej bipolarnej funkcji aktywacji (10), wagach warstwy wejściowej $\boldsymbol{V}$ dobranych losowo w procesie inicjalizacji SN oraz stałej wartości wagi warstwy wyjściowej $\boldsymbol{W}$ (przypadek sieci statycznej z wyuczonymi wagami). Schematycznie proces obliczania wartości wyjścia z SN *SISO* (*Single Input Single Output*) *RVFL* przedstawiono na rys. 9.
Sigmoidalne bipolarna funkcja aktywacji neuronu S_1 realizuje obliczenia

$$S_1(\boldsymbol{x}_V) = \frac{2}{1 + exp\left(-1 \cdot \left(\begin{bmatrix}0.27, -0.11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ x_{SN}\end{bmatrix}\right)\right)} - 1. \tag{11}$$

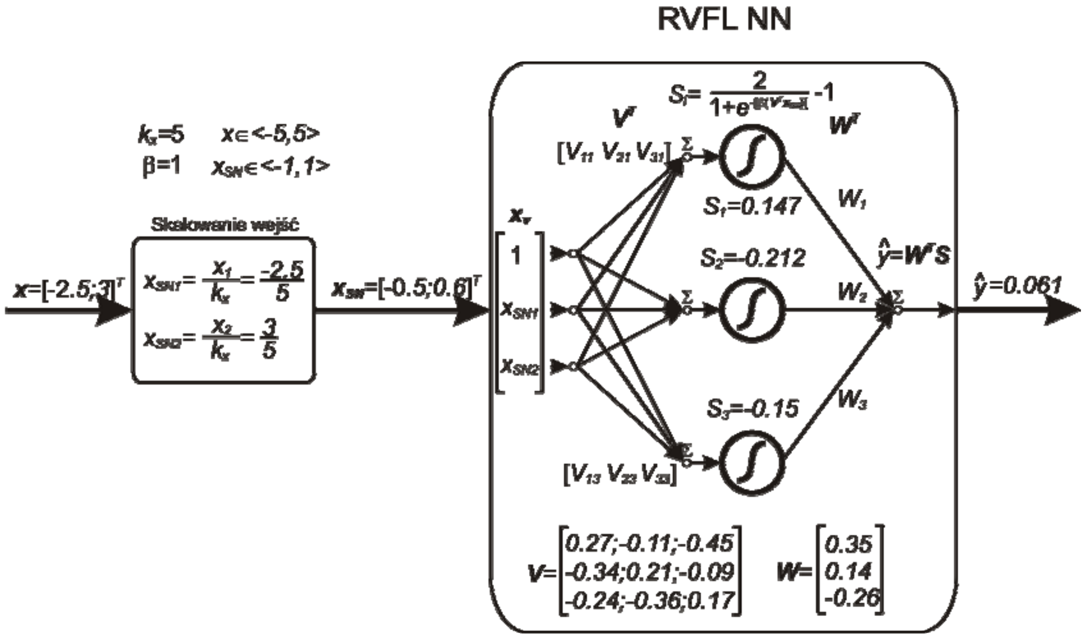


Rys. 9. Schemat działania SN *SISO RVFL* dla 1 neuronu

Wartość wyjścia z SN RVFL wynosi: $\hat{y}$ =0.0462.

Przykład 2. Obliczanie wartości wyjścia z SN *RVFL MISO*

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem wartości wyjścia $\hat{y}$ z SN *RVFL* MISO (*Multi Input Single Output*) dla danych analogicznych jak w przykładzie 1., dla SN zbudowanej z m=3 neuronów o sigmoidalnych bipolarnych funkcjach aktywacji, oraz dwóch wejściach $\boldsymbol{x} = \left[x_1, x_2\right]^T$ (rys. 10.).



Rys. 10. Schemat działania SN *MISO RVFL* dla 3 neuronów

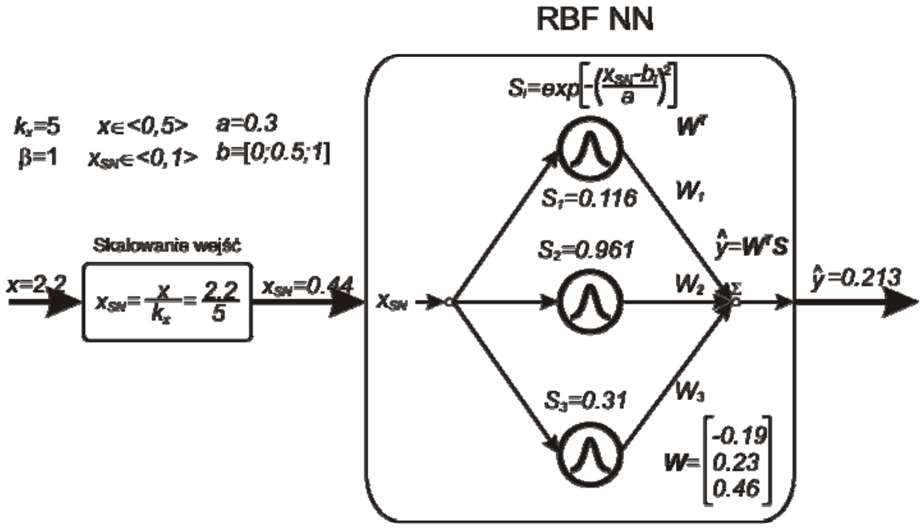
Wartość wyjścia z SN RVFL wynosi: $\hat{y}$ =0.061.

Przykład 3. Obliczanie wartości wyjścia z SN *RBF SISO*

Zajmiemy się teraz wyznaczaniem wartości wyjścia $\hat{y}$ z SN *RBF SISO* (*Single Input Single Output*) dla SN zbudowanej z m=3 neuronów o funkcjach aktywacji typu krzywa Gaussa oraz jednym wejściu. Funkcję aktywacji i-tego neuronu SN typu Gaussa możemy zapisać za pomocą zależności

$$S_i(x) = exp\left[-\left(\frac{x-b_i}{a_i}\right)^2\right], \tag{12}$$

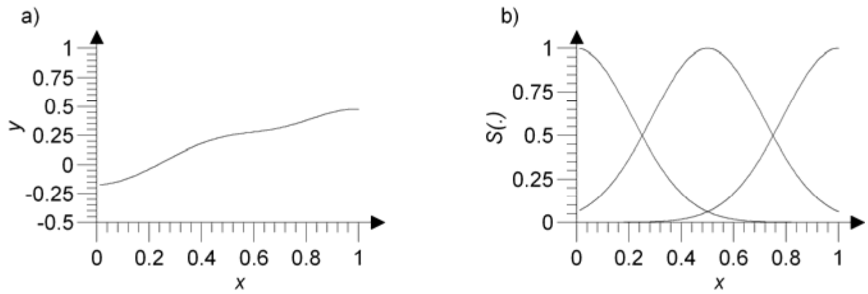
gdzie a_i jest parametrem określającym szerokość krzywej gaussowskiej dla *i*-tego neuronu, natomiast b_i parametrem określającym położenie środka krzywej. Schemat działania sieci z radialnymi funkcjami aktywacji neuronów przedstawiono na rys. 11.



Rys. 11. Schemat działania SN *SISO RBF* dla 3 neuronów

Wartość wyjścia z SN RVFL wynosi: $\hat{y}$ =0.213.

W wyniku działania sieci dla całego zbioru wejść $x_{SN} \in \langle 0;1 \rangle$ otrzymano wartości wyjścia z SN pokazane na rys. 12.a). Na rys. 12.b) pokazano przebiegi wartości funkcji aktywacji typu Gaussa poszczególnych neuronów.



Rys. 12.a) Przebieg wartości wyjścia z SN, b) przebiegi wartości funkcji aktywacji neuronów

4. Zadania do wykonania

4.1. Wyznaczyć przebiegi wartości funkcji aktywacji neuronu:

a) liniowego,
b) dyskretnego unipolarnego,
c) dyskretnego bipolarnego,
d) ciągłego unipolarnego (funkcja sigmoidalna unipolarna, *β=nr zespołu*),
e) ciągłego bipolarnego (funkcja sigmoidalna bipolarna, *β=nr zespołu*),
f) radialnego (funkcja Gaussa dla *b=0*, δ *=nr zespołu*),
dla $x \in \langle -2,\, 2 \rangle$ (oprócz punktu 4.1.f), gdzie przedział zmienności wejścia *x* jest dowolny),
przykłady należy zrealizować w postaci *m*-pliku Matlab-a oraz modelu Simulink-a.

4.2. Wyznaczyć przebiegi wartości wyjścia z SN (analogicznie jak w przykładzie 3, rys. 12.), dla:

a) SN *SISO RVFL*, dla $x \in \langle 0, 5 \rangle$, liczby neuronów sieci dla poszczególnych zespołów przyjąć zgodnie z danymi podanymi w tab. 1., wagi warstwy wejściowej ***V*** oraz wyjściowej ***W*** dobrać w sposób losowy z przedziału $\langle -0.5;0.5 \rangle$,

b) SN *SISO RBF*, dla $x \in \langle 0, 5 \rangle$, liczby neuronów sieci dla poszczególnych zespołów przyjąć zgodnie z danymi podanymi w tab. 1., centra neuronów radialnych rozmieścić równomiernie w przestrzeni wejść, np. dla 8 neuronów radialnych położenia centrów funkcji mogą przyjmować wartości ***b***=*[0, 1/7, 2/7, ..., 7/7]*, odpowiednio dobrać współczynnik szerokości funkcji Gaussa (patrz wykład), wagi warstwy wyjściowej ***W*** dobrać w sposób losowy z przedziału $\langle -0.5;0.5 \rangle$.

Parametry SN dla poszczególnych zespołów przedstawiono w tab. 1.

Tab.1. Parametry SN dla poszczególnych zespołów

nr zespołu	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	13.	14.	15.
$m=l_{neur}$	6	7	5	8	9	10	12	6	8	7	9	11	5	4	8

Sprawozdanie powinno zawierać:

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji,
- listingi programów,
- otrzymane wykresy (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- wnioski.