

Sterowanie robotów

Laboratorium nr 14_15

Temat: Układy sterowania o zmiennej strukturze

Wstęp

Układy sterowania o zmiennej strukturze (VSCS) to pewna klasa układów, w których algorytm sterowania zmienia się według pewnych zasad, w zależności od bieżącego stanu obiektu sterowania.

W celu zilustrowania zasad działania takich układów rozważmy obiekt sterowania opisany równaniem różniczkowym (podwójny integrator)

$$\ddot{y}(t) = u(t) \quad (1)$$

Zastosujmy sterowanie typu

$$u(t) = -ky(t), k > 0 \quad (2)$$

Jednym ze sposobów analizy układu drugiego rzędu jest analiza zachowania się układu na płaszczyźnie fazowej.

Wprowadzając (2) do (1) otrzymamy

$$\ddot{y} + k\dot{y} = 0 \quad (3)$$

Całkując równanie (3) otrzymamy zależność prędkości od przemieszczenia

$$\dot{y}^2 + ky^2 = c \quad (4)$$

gdzie $c > 0$ jest stałą całkowania zależną od warunków początkowych. W szczególnym przypadku gdy $k=1$ równanie (4) na płaszczyźnie fazowej opisuje okrąg, ze środkiem w początku układu współrzędnych o promieniu \sqrt{c} . Z analizy takiego przebiegu wynika, że zastosowane sterowanie nie zapewnia stabilności asymptotycznej układu. W ogólnym przypadku dla $k \neq 1$ rozwiązanie jest elipsą.

Wyberzmy inne sterowanie

$$u(t) = \begin{cases} -k_1 y(t) & \text{dla } y\dot{y} < 0 \\ -k_2 y(t) & \text{w innym przypadku} \end{cases} \quad (5)$$

gdzie $0 < k_1 < 1 < k_2$

Znaczenie sterowania o zmiennej strukturze jest jeszcze bardziej widoczne jeżeli wprowadzi się funkcję przełączenia w postaci kombinacji liniowej stanu układu $s(y, \dot{y})$:

$$u(t) = \begin{cases} -k & \text{dla } s(y, \dot{y}) > 0 \\ k & \text{dla } s(y, \dot{y}) < 0 \end{cases} \quad (6)$$

gdzie $k > 0$ a funkcja przełączenia jest zdefiniowana jako

$$s(y, \dot{y}) = \dot{y} + \lambda y \quad (7)$$

gdzie $\lambda > 0$ to współczynnik projektowy.

Zależność (6) można zapisać w postaci

$$u(t) = -k \operatorname{sgn}(s(t)) \quad (8)$$

Przyrównując (7) do zera otrzymamy podprzestrzeń przestrzeni stanu (równanie linii). Teraz, zadaniem sterowania o zmiennej strukturze jest sprowadzenie stanu układu do tej podprzestrzeni i utrzymanie go na tej podprzestrzeni. Formalnie przyjmując funkcję

$$\mathbf{V} = \frac{1}{2} \mathbf{s}^2 \quad (9)$$

oraz jej pochodną

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{s}\dot{\mathbf{s}} = \mathbf{s}(\ddot{\mathbf{y}} + \lambda\dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{s}(\lambda\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{k} \operatorname{sgn}(\mathbf{s})) < |\mathbf{s}|(\lambda|\dot{\mathbf{y}}| - \mathbf{k}) < \mathbf{0} \quad (10)$$

Pochodna (10) jest ujemna jeżeli pochodna $\dot{\mathbf{y}}$ spełnia nierówność

$$\lambda|\dot{\mathbf{y}}| < \mathbf{k} \quad (11)$$

Ruch układu po rozmaitości (podprzestrzeni przestrzeni stanów) nazywamy idealnym ruchem ślizgowym. Ruch ten opisuje równanie różniczkowe wynikające z zależności $\mathbf{s}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$ czyli

$$\dot{\mathbf{y}} = -\lambda\mathbf{y} \quad (12)$$

Równanie to ma strukturę członu inercyjnego pierwszego rzędu a jego rozwiązanie dąży do zera wykładniczo.

Warunek (10)

$$\mathbf{s}\dot{\mathbf{s}} < \mathbf{0} \quad (13)$$

nosi nazwę warunku lokalnego osiągalności powierzchni ślizgowej (linii).

Należy zauważyć, że sterowanie (8) jest nieciągłą funkcją i dla $\mathbf{s}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{0}$ nie jest zdefiniowane.

Ogólnie mówi się, że są to układy z nieciągłą prawą stroną a ich rozwiązanie wymaga zastosowania specjalnych metod. Ponadto, zastosowanie sterowania o zmiennej strukturze (8) generuje ‘*drżania*’ sygnału sterowania. W celu uniknięcia tych drgań wprowadza się **tw. warstwę graniczną wokół rozmaitości ślizgowej i aproksymację sterowania o zmiennej strukturze sterowaniem ciągłym wewnątrz tej warstwy granicznej**

$B(t) = \{y : |s(t)| \leq \Phi\}$, gdzie $\Phi > 0$ jest parametrem.

W symulacji przyjęto sterowanie ciągle

$$u = -k \operatorname{sat}(s) \quad (14a)$$

gdzie funkcja $\operatorname{sat}(\cdot)$ zdefiniowana jest wzorem

$$\operatorname{sat}(s) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(s) & \text{dla } |s| > \Phi \\ \frac{s}{\Phi} & \text{dla } |s| \leq \Phi \end{cases} \quad (14b)$$

Zadania:

I. Sterowanie obiektem nieliniowym

Mamy dany układ opisany równaniem różniczkowym oraz dane są wartości poszczególnych parametrów

1. $\ddot{y}(t) = -a \sin(y(t)) - \dot{y} + u(t)$, $a = 0.2$,
2. $\ddot{y}(t) = -a y^2(t) - \dot{y} + u(t)$, $a = 0.4$,

3. $\ddot{y}(t) = -a \sin(\dot{y}(t)) + u(t), \quad a = 0.1,$ (15)
4. $\ddot{y}(t) = -ay^2(t) + u(t), \quad a = 0.6,$
5. $\ddot{y}(t) = -a\dot{y}^2(t) + u(t), \quad a = 0.5,$
6. $\ddot{y}(t) = -a \sin(\dot{y}(t)) - y + u(t), \quad a = 0.8,$
7. $\ddot{y}(t) = -a \sin(\dot{y}(t)) - \dot{y}^2 + u(t), \quad a = 0.8,$
8. $\ddot{y}(t) = -ay^2(t) - \dot{y}^2 + u(t), \quad a = 0.6,$

Przyjmujemy sterowanie wg równania (8)

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{k} \operatorname{sgn}(\mathbf{s}(t))$$

gdzie $\mathbf{s}(y, \dot{y}) = \dot{y} + \lambda y$

oraz $\dot{y}(0) = 0, y(0)=1, \lambda = 1, \mathbf{k} = 1$ (lub inne)

Zadania do wykonania:

1. Zbudować w Simulinku układ dla nieliniowego modelu opisanego równaniem (15)
2. Wygenerować trajektorię układu zamkniętego $\dot{y}(y)$ dla „twardej” funkcji signum
3. Wygenerować następujące przebiegi: $u(t), s(t)$ dla „twardej” funkcji signum
4. Wprowadzić aproksymację sterowania przełączającego, sterowaniem ciągłym wg równania (14) i postępować analogicznie jak w punktach 2 i 3

5. Ocenić jakość sterowania wskaźnikiem $J_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_i^2}, i = 1, 2$

II. Odporność sterowania o zmiennej strukturze przy zakłóceniach parametrycznych

Mamy dany układ opisany równaniem różniczkowym oraz wartości poszczególnych parametrów

1. $\ddot{y}(t) = -a \sin(y(t)) - \dot{y} + u(t), \quad a > 0, \lambda = 1, \quad 0 < a < 6, \Delta a = 2, \eta = 0.02$
2. $\ddot{y}(t) = -ay^2(t) - \dot{y} + u(t), \quad a > 0, \lambda = 0.5, \quad 0 < a < 4, \Delta a = 1, \eta = 0.06$
3. $\ddot{y}(t) = -a \sin(\dot{y}(t)) + u(t), \quad a > 0, \lambda = 0.8, \quad 0 < a < 8, \Delta a = 3, \eta = 0.03$ (16)
4. $\ddot{y}(t) = -ay^2(t) + u(t), \quad a > 0, \lambda = 0.6, \quad 0 < a < 6, \Delta a = 3, \eta = 0.07$
5. $\ddot{y}(t) = -a\dot{y}^2(t) + u(t), \quad a > 0, \lambda = 0.9, \quad 0 < a < 8, \Delta a = 2, \eta = 0.01$
6. $\ddot{y}(t) = -a \sin(\dot{y}(t)) - y + u(t), \quad a > 0, \lambda = 0.4, \quad 0 < a < 4, \Delta a = 1.5, \eta = 0.04$
7. $\ddot{y}(t) = -a \sin(\dot{y}(t)) - \dot{y}^2 + u(t), \quad a > 0, \lambda = 0.4, \quad 0 < a < 4, \Delta a = 1.5, \eta = 0.04$
8. $\ddot{y}(t) = -ay^2(t) - \dot{y}^2 + u(t), \quad a > 0, \lambda = 0.6, \quad 0 < a < 6, \Delta a = 3, \eta = 0.07$

gdzie a jest parametrem, którego wartość może zmieniać się w zadanym przedziale, a ocena parametru a jest równa $\hat{a} = 0.5(a_{\min} + a_{\max})$.

Postępujemy według następującej procedury:

1. Wyznaczamy prawo sterowania, które uwzględni parametryczne niedokładności modelowania, przyjmujemy funkcję przełączenia zdefiniowaną jako (7) oraz prawo sterowania
$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_e - \mathbf{k} \operatorname{sgn}(s)$$
2. Wyznaczamy sterowanie równoważne wykorzystując zależność $s = 0, \dot{s} = 0$
3. Określamy warunek powstawania ruchu ślizgowego dla $s \neq 0$ według
$$s\dot{s} = s(\ddot{y} + \lambda\dot{y}) \leq \eta|s|$$
4. Wyznaczamy: k, A, γ (patrz wykład)

Zadania do wykonania:

1. Zamodelować w Simulinku obiekt opisany równaniem (16) wykorzystując „twardą” funkcję signum. Wprowadzić ocenę parametru $\hat{a} = 0.5(a_{\min} + a_{\max})$.
2. Pokazać następujące przebiegi: $u(t), u_e(t), s(t), y(t), \dot{y}(t), \dot{y}(y)$.
3. Wprowadzić zakłócenie parametryczne Δa występujące po czasie $t = 1[s]$.
4. Dla układu z zakłóceniem pokazać następujące przebiegi: $u(t), u_e(t), s(t), y(t), \dot{y}(t), \dot{y}(y)$.
5. Wprowadzić aproksymację sterowania przełączającego, sterowaniem ciągłym wg równania (14) i postępować analogicznie jak w punktach 1, 2, 3 i 4.
6. Ocenić jakość sterowania wskaźnikiem $J_i = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e_i^2}, i = 1, 2$.
7. Na wykresie zamieścić trajektorię fazową w przestrzeni błędów.

Sprawozdanie powinno zawierać:

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji,
- listingi programów,
- otrzymane wykresy (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- wnioski.