Katedra Mechaniki Stosowanej i Robotyki

TEORIA STEROWANIA

Laboratorium_11

Temat:

Problem liniowo kwadratowy

Celem ćwiczenia jest zapoznanie studentów z **optymalizacją liniowo kwadratową.**

Niech dany będzie obiekt liniowy opisany równaniem

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{1}$$

z warunkiem początkowym

$$x(0) = x_o \tag{2}$$

oraz niech będzie dany również wskaźnik jakości o postaci

$$\mathbf{J} = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T(\mathbf{t})\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}^T(\mathbf{t})\mathbf{R}\mathbf{u}(\mathbf{t}))\mathbf{dt} \tag{3}$$

Należy wyznaczyć wektor sterowania u, spełniający równanie (1) z warunkiem początkowym (2), który minimalizuje wskaźnik jakości (3) dla problemu:
a) regulatora, b) stabilizacji o zadanej wartości r.

W przypadku obiektu sterowania liniowego i stacjonarnego sterowanie optymalne **u** jest dane wzorem

$$\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{x} \tag{4}$$

gdzie

$$\mathbf{K} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{P} \tag{5}$$

a P jest macierzą symetryczną i jest rozwiązaniem algebraicznego równania Riccatiego

$$PA + A^T P + PBR^{-1}B^T P - Q = 0 \tag{6}$$

wówczas wartość minimalna wskaźnika jakości wynosi

$$J = x^T(0)Px(0) \tag{7}$$

Z powyższych rozważań wynika następujący tok postępowania przy wyznaczaniu sterowania optymalnego :

- Mając dane macierze A, B, Q i R wyznaczamy macierzy P z równania Riccatiego (6).
- Poszukiwane sterowanie optymalne u wyznaczamy z zależności (4) dla wyznaczonej z równania (5) macierzy K.

Jeżeli macierz A-BK jest stabilna otrzymujemy zawsze poprawne rozwiązanie.

Zadania do wykonania:

1. Należy wyznaczyć sterowanie **u** obiektem liniowym stacjonarnym sprowadzające obiekt dynamiczny z niezerowego stanu początkowego do stanu zerowego, zakładając pełny dostęp pomiarowy do wektora stanu (problem regulatora).

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u$$

z zadanymi warunkami początkowymi $[x_1(0) = x_0]$, $[x_2(0) = 0]$

minimalizujące wskaźnik jakości o postaci

$$\mathbf{J} = \int_0^\infty (\mathbf{x}^\mathbf{T}(\mathbf{t})\mathbf{Q}\mathbf{x}(\mathbf{t}) + \mathbf{u}^\mathbf{T}(\mathbf{t})\mathbf{R}\mathbf{u}(\mathbf{t}))\mathbf{dt}$$

da wartości :

1). $Q = \begin{bmatrix} 100 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, R=0.01 2). $Q = \begin{bmatrix} 66 & .5 \\ .5 & 4 \end{bmatrix}$, R=0.05 3). $Q = \begin{bmatrix} 14 & 1.3 \\ 1.3 & .8 \end{bmatrix}$, R=1

4). $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, R=0.03 5). $Q = \begin{bmatrix} 54 & .6 \\ .6 & 30 \end{bmatrix}$, R=0.1 6). $Q = \begin{bmatrix} 18 & 3.2 \\ 3.2 & 3 \end{bmatrix}$, R=3

7). $Q = \begin{bmatrix} 10 & .05 \\ .05 & .003 \end{bmatrix}$, R=0.02 8). $Q = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, R=o.5

oraz a_{ij}, b, x_o, r podanych w tab.1.

Tab. 1.

Zespół\wsp$_i$	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b	x_o	r
1	-2	-1	2	-6	9	7	5
2	-.2	-1	.2	-6	5	1	7
3	0	1	-12	-6	2	5	3
4	0	1	-8	-.3	1	8	2
5	-10	1	-8	-.3	2	7	9
6	-10	-4	-.3	-1.3	7	8	1
7	-4	-.4	-1.5	-2	7	1	2
8	-6.4	-1.2	-.1	-.02	5	4	8

2. Wyznaczyć sterowanie optymalne u sprowadzające sygnał x_1 do zadanej wartości r podanej w Tab.1.

Dany jest sygnał pomiarowy

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Rozwiązanie przeprowadzić w Maple i Matlabie,Simulinku.

Sprawozdanie powinno zawierać w rozwiązaniach 1 i 2:

- opis matematyczny rozwiązywanego problemu,
- dane przyjęte w symulacji, listing programu, Maple, Matlab,
- otrzymane wykresy $x_1(t), x_2(t), u(t)$, trajektorię fazową w przestrzeni stanów x_1, x_2 (każdy wykres powinien być opisany i skomentowany),
- dla wyznaczonego sterowania optymalnego, podać dodatkowo schemat i rozwiązanie uzyskane w Simulinku,
- przeprowadzić analizę stabilności dla punktu 1 i 2
- podać wpływ elementów macierzy **Q** i **R** na rozwiązanie optymalne w problemie stabilizacji (punkt 2) z uzasadnieniem graficznym.
- wnioski.